

POLITECHNIKA POZNAŃSKA  
WYDZIAŁ INŻYNIERII LĄDOWEJ I TRANSPORTU



Agnieszka Lenartowicz

Analiza dźwigarów  
powierzchniowych z uwzględnieniem  
anizotropii materiałowej, tłumienia  
i oddziaływania ośrodka zewnętrznego

ROZPRAWA DOKTORSKA

Promotor:

dr hab. inż. Michał Guminiak, prof. PP

Promotor pomocniczy:

dr inż. Maciej Przychodzki

POZNAŃ, 2025



*„Lecz za łaską Boga jestem tym, czym jestem, a dana mi łaska Jego nie okazała się daremna; przeciwnie, pracowałem więcej od nich wszystkich, nie ja, co prawda, lecz łaska Boża ze mną.” (1 Kor 15, 10)*

*Pierwsze i najważniejsze podziękowanie pragnę skierować do Pana Boga – za dane mi przez Niego dary i talenty, które w połączeniu z włożonym przeze mnie wysiłkiem zaowocowały powstaniem niniejszej rozprawy. To we współpracy z Jego łaską wszelka ludzka praca nabiera sensu i wartości. Panie Boże, chwała Tobie za to, że uświęcasz naszą pracę! Dziękuję też Bogu za wszystkich dobrych ludzi, których postawił na mojej drodze podczas pracy nad niniejszą dysertacją...*

*Serdecznie dziękuję moim Rodzicom, Helenie i Zbigniewowi, za trud wychowania oraz wspieranie mnie na każdym etapie mojej edukacji, a szczególnie w ciągu ostatnich sześciu lat pracy nad rozprawą. Dziękuję za okazaną miłość, zrozumienie i wsparcie duchowe. To Wam, Kochani, dedykuję tę pracę.*

*Chciałabym podziękować mojemu Promotorowi, dr. hab. inż. prof. PP Michałowi Guminiakowi, za propozycję tematu rozprawy, wszelkie wskazówki, cenne uwagi, poświęcony mi czas, a przede wszystkim za ogromną życzliwość, wsparcie i motywację do pracy. Serdecznie dziękuję również mojemu Promotorowi Pomocniczemu, dr. inż. Maciejowi Przychodzkemu, za okazaną pomoc, życzliwość, dobre słowo i cenne uwagi. Jestem ogromnie wdzięczna za wprowadzenie mnie w tematykę rozdziałów 7 i 8 niniejszej rozprawy.*

*Pragnę jeszcze osobno wyrazić wdzięczność prof. dr. hab. inż. Marcinowi Kamińskiemu za przyjęcie mnie na staż naukowy i wprowadzenie w tematykę rozdziału 9 rozprawy. Dziękuję też Koleżance, dr. hab. inż. Magdalenie Łaseckiej-Plurze, za współpracę naukową i cenne wskazówki oraz wsparcie podczas pracy nad podrozdziałem 7.3.2. Chciałabym również podziękować Koleżance, dr. inż. Paulinie Stempin, za okazaną pomoc związaną z opracowywaniem tekstu w systemie  $\text{\LaTeX}$ . Pragnę wyrazić moją wdzięczność Koleżankom i Kolegom z Politechniki Poznańskiej, przede wszystkim Zespołowi z Zakładu Mechaniki Budowli oraz Pracownikom Instytutu Analizy Konstrukcji, za wsparcie, życzliwość i dobre, podnoszące na duchu słowo.*

*Dziękuję moim Znajomym i Przyjaciołom, w tym również Kapłanom, za modlitwę, wsparcie duchowe i każdy, nawet najdrobniejszy gest dobroci i życzliwości.*

*Agnieszka Lenartowicz*



# Streszczenie

mgr inż. Agnieszka Lenartowicz

## **Analiza dźwigarów powierzchniowych z uwzględnieniem anizotropii materiałowej, tłumienia i oddziaływania ośrodka zewnętrznego**

**Słowa kluczowe:** płyty cienkie, częstości drgań własnych, lepkosprężyste tłumiki drgań, obciążenie krytyczne, metoda elementów skończonych, metoda różnic skończonych, metoda elementów brzegowych, metoda roju cząstek, metoda kontynuacji, analiza losowa

Przedmiotem niniejszej dysertacji jest analiza statyki, dynamiki oraz stateczności prostokątnych dźwigarów płytowych spełniających główne założenia hipotezy Kirchhoffa-Love'a. Przyjęto, że badane płyty charakteryzują się stałą lub zmienną sztywnością. Ponadto w przypadku stałej sztywności rozważono kwestię anizotropii materiałowej.

Zasadniczą część rozprawy rozpoczęto od rozdziału poświęconego zagadnieniu statyki płyt. Zawarto w nim opis postępowania, które należy zastosować, aby wyznaczyć wartości przemieszczeń pionowych płyt w ujęciu metody elementów skończonych (MES) oraz metody różnic skończonych (MRS). Zamieszczono również szczegółowe zasady sprowadzania równania deformacji płyty izotropowej o zmiennej sztywności do układu równań różnicowych, zgodnie z metodologią MRS. Zawarte w rozdziale wyprowadzenia stanowiły bazę do zagadnień przedstawionych w dalszej części rozprawy, a więc dotyczących wyznaczania częstości drgań własnych oraz obciążenia krytycznego płyt o stałej lub zmiennej grubości, ustalonej zgodnie ze wstępnie założoną funkcją.

Znaczną część rozprawy poświęcono analizie dynamicznej płyt, w ramach której rozwiązywano zadania drgań własnych pojedynczej płyty oraz układów dwóch płyt zanurzonych w płynie. Zastosowano autorskie procedury obliczeniowe korzystające z metod elementów skończonych i różnic skończonych oraz metody elementów brzegowych (MEB). Rozważono także dynamikę płyt spoczywających na więzach lepkosprężystych, gdzie odpowiedni nieliniowy problem własny, utworzony przy użyciu metodologii MES, rozwiązano zgodnie z zasadami metody kontynuacji. Zastosowano również pomocniczo metodę podprzestrzennych iteracji, aby zredukować problem

własny do zagadnienia o mniejszym wymiarze. Wieży (tłumiki) lepkosprężyste opisano za pomocą dwóch modeli: klasycznego i ułamkowego, przy czym w drugim z nich wykorzystano rachunek pochodnych niecałkowitego rzędu. W rozprawie rozwiązano również zadanie optymalnego rozmieszczenia ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty w celu uzyskania maksymalnego efektu tłumienia wybranej postaci drgań. Aby rozwiązać tak sformułowany problem, posłużono się algorytmem optymalizacji metodą roju cząstek (PSO).

W pracy przeprowadzono także analizę losową dla zagadnień dynamicznych płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań oraz układów płyt zanurzonych całkowicie w płynie. Odpowiednie momenty losowe wyznaczano przy użyciu trzech alternatywnych metod probabilistycznych: metody półanalitycznej, uogólnionej metody perturbacji stochastycznej oraz metody symulacyjnej Monte-Carlo.

Na zakończenie głównych rozważań wykonano analizę stateczności płyt obciążonych w swej płaszczyźnie w celu wyznaczenia wartości obciążeń krytycznych odpowiadających kilku wybranym postaciom utraty stateczności. Zagadnienie rozwiązano numerycznie zgodnie z zasadami metody różnic skończonych. Tematyka ta stanowi naturalne dopełnienie całości rozważań.

Wśród najważniejszych oryginalnych elementów niniejszej dysertacji można wyróżnić propozycję autorskich metod całkowania numerycznego mających na celu wyznaczenie macierzy sztywności oraz macierzy bezwładności płyty dla potrzeb wykonania jej analizy dynamicznej. Ponadto opracowano autorskie procedury obliczeniowe pozwalające rozwiązać nieliniowe zadanie analizy dynamicznej płyt spoczywających na więzach lepkosprężystych oraz wyznaczyć optymalną lokalizację ustalonej liczby tych więzów na powierzchni płyty. Opracowane procedury umożliwiły także wykonanie analizy statyki, dynamiki i stateczności płyt o zmiennej grubości. Dokonano również połączenia wybranych metod numerycznych spośród MES, MRS i MEB w zadaniach interakcji płyta–ciecz. Aby rozwiązać nieliniowy problem własny dla płyt z więzami lepkosprężystymi, użyto w algorytmach metodę kontynuacji. W zagadnieniu tym uwzględniono także podejście losowe.

Autorskie procedury obliczeniowe w zakresie analizy statycznej, dynamicznej i stateczności płyt opracowano w środowisku Octave, a na potrzeby analizy losowej użyto środowisko programistyczne Maple.

# Abstract

Agnieszka Lenartowicz, M.Sc., Eng.

**The analysis of plane girders taking into account material anisotropy, damping and the influence of an external medium**

**Keywords:** thin plates, natural frequencies, viscoelastic vibration dampers, critical load, finite element method, finite difference method, boundary element method, particle swarm method, continuation method, random analysis

The subject of this dissertation is the static, dynamic and stability analysis of rectangular plate girders fulfilling the main assumptions of the Kirchhoff-Love hypothesis. It was assumed that the tested plates were characterized by constant or variable stiffness. Furthermore, in the case of constant stiffness plates, the issue of material anisotropy was considered.

The main part of the dissertation began with a chapter devoted to the issue of plate statics. It describes the procedure to be used to determine the values of vertical displacements of plates using the finite element method (FEM) and the finite difference method (FDM). Detailed rules for reducing the deformation equation of an isotropic plate with variable stiffness to a system of difference equations, in accordance with the MRS methodology, are also included. The derivations included in the chapter constituted the basis for the issues presented in the further part of the thesis, i.e. those related to determining the natural frequency and the critical load of plates with constant or variable thickness, determined in accordance with the initially assumed function.

A significant part of the thesis was devoted to the dynamic analysis of plates, in which the problems of natural vibrations of a single plate and systems of two plates immersed in a fluid were solved. Proprietary calculation procedures based on the finite element and finite difference methods as well as the boundary element method (BEM) were used. The dynamics of plates resting on viscoelastic constraints was also considered, where the corresponding nonlinear eigenproblem, generated using the FEM methodology, was solved according to the principles of the continuation method. The subspace iteration method was also used as an auxiliary method to reduce the eigenvalue problem to a lower-dimensional problem. Viscoelastic constraints (dampers) were described using two models: classical and fractional, the latter

of which used fractional derivative calculus. The thesis also solved the problem of optimally distributing a fixed number of viscoelastic dampers on the plate surface in order to obtain the maximum damping effect for the selected vibration mode. To solve this problem, the particle swarm optimization (PSO) algorithm was used.

The paper also performed a random analysis for dynamic problems of plates equipped with viscoelastic vibration dampers and plate systems completely immersed in a fluid. The corresponding random moments were determined using three alternative probabilistic methods: the semi-analytical method, the generalized stochastic perturbation method and the Monte-Carlo simulation method.

At the end of the main considerations, an analysis of the stability of the plates loaded in their plane was performed in order to determine the values of critical loads corresponding to several selected modes of stability loss. The problem was solved numerically according to the principles of the finite difference method. This topic is a natural complement to the overall considerations.

Among the most important original elements of this dissertation, one can highlight the proposal of original numerical integration methods allowing to determine the stiffness matrix and the inertia matrix of the plate for the purposes of its dynamic analysis. In addition, proprietary computational procedures were developed to solve the nonlinear problem of dynamic analysis of plates resting on viscoelastic constraints and to determine the optimal location of a fixed number of these constraints on the plate surface. The developed procedures also enabled the analysis of statics, dynamics and stability of plates with variable thickness. Selected numerical methods from FEM, FDM and BEM were also combined in plate–fluid interaction problems. In order to solve nonlinear eigenproblems for plates with viscoelastic constraints, the continuation method was used in the algorithms. A random approach was also taken into account in this issue.

Proprietary calculation procedures for static, dynamic and plate stability analysis were developed in the Octave environment, and the Maple programming environment was also used for random analysis.

# Spis treści

|                                                                                          |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Streszczenie .....                                                                       | 5   |
| Abstract .....                                                                           | 7   |
| Spis tabel .....                                                                         | 11  |
| Spis rysunków .....                                                                      | 18  |
| Wykaz skrótów i oznaczeń .....                                                           | 27  |
| Ważniejsze skróty .....                                                                  | 27  |
| Ważniejsze oznaczenia .....                                                              | 27  |
| Wprowadzenie do podjętej tematyki badań .....                                            | 47  |
| 1. Analiza stanu wiedzy i omówienie informacji ze źródeł .....                           | 53  |
| 2. Problem badawczy i cel pracy .....                                                    | 61  |
| 3. Analiza statyczna płyt prostokątnych .....                                            | 65  |
| 3.1. Wprowadzenie teoretyczne .....                                                      | 65  |
| 3.2. Omówienie metod obliczeniowych .....                                                | 67  |
| 3.2.1. Metoda elementów skończonych .....                                                | 68  |
| 3.2.2. Metoda różnic skończonych .....                                                   | 73  |
| 3.3. Przykłady analizy statycznej płyt .....                                             | 87  |
| 4. Analiza dynamiczna płyt prostokątnych w próżni .....                                  | 99  |
| 4.1. Równanie ruchu płyty w ujęciu MES .....                                             | 99  |
| 4.2. Równanie ruchu płyty w ujęciu MRS .....                                             | 107 |
| 4.3. Przykłady analizy dynamicznej płyt w próżni .....                                   | 111 |
| 5. Analiza dynamiczna płyt prostokątnych zanurzonych w płynie .....                      | 117 |
| 5.1. Wyznaczanie macierzy bezwładności płynu przy zastosowaniu MEB ...                   | 118 |
| 5.2. Rozwiązanie zadania interakcji płyty i płynu przy zastosowaniu MES.                 | 128 |
| 5.3. Rozwiązanie zadania interakcji płyty i płynu przy zastosowaniu MRS.                 | 134 |
| 5.4. Przykłady analizy dynamicznej płyt zanurzonych w płynie .....                       | 138 |
| 6. Analiza dynamiczna układu płyt prostokątnych zanurzonych całkowicie<br>w płynie ..... | 153 |
| 6.1. Wyznaczanie macierzy bezwładności płynu dla układu płyt w ujęciu<br>MEB .....       | 154 |

|                                                                                                                      |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.2. Rozwiązanie problemu przy zastosowaniu MES .....                                                                | 160 |
| 6.3. Rozwiązanie problemu przy zastosowaniu MRS .....                                                                | 165 |
| 6.4. Przykłady analizy dynamicznej układu płyt zanurzonych w płynie .....                                            | 168 |
| 7. Analiza dynamiczna płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań ....                                          | 181 |
| 7.1. Opis modelu tłumika lepkosprężystego .....                                                                      | 183 |
| 7.2. Opis zależności parametrów tłumika od temperatury .....                                                         | 188 |
| 7.3. Równanie ruchu płyty z więzami lepkosprężystymi w ujęciu MES .....                                              | 191 |
| 7.3.1. Rozwiązanie nieliniowego problemu własnego metodą kontynuacji .....                                           | 193 |
| 7.3.2. Rozwiązanie nieliniowego problemu własnego przy użyciu metod podprzestrzennych iteracji oraz kontynuacji..... | 197 |
| 7.4. Przykłady analizy dynamicznej płyt z lepkosprężystymi tłumikami drgań.....                                      | 201 |
| 8. Optymalizacja lokalizacji tłumików na powierzchni płyty .....                                                     | 211 |
| 8.1. Podstawy teoretyczne metody PSO w zadaniu optymalizacji lokalizacji tłumików .....                              | 212 |
| 8.2. Przykłady optymalizacji lokalizacji tłumików .....                                                              | 221 |
| 9. Analiza dynamiczna płyt prostokątnych w ujęciu probabilistycznym .....                                            | 235 |
| 9.1. Wprowadzenie teoretyczne do analizy probabilistycznej .....                                                     | 237 |
| 9.2. Przykłady numeryczne zastosowania analizy probabilistycznej .....                                               | 242 |
| 10. Analiza stateczności płyt prostokątnych.....                                                                     | 271 |
| 10.1. Rozwiązanie zadania stateczności płyty przy zastosowaniu MRS.....                                              | 272 |
| 10.2. Przykłady analizy stateczności płyt .....                                                                      | 277 |
| 11. Podsumowanie i wnioski końcowe .....                                                                             | 295 |
| 11.1. Wnioski poznawcze .....                                                                                        | 295 |
| 11.2. Wnioski metodyczne .....                                                                                       | 304 |
| 11.3. Wnioski aplikacyjne .....                                                                                      | 307 |
| 11.4. Wnioski prognostyczne.....                                                                                     | 309 |
| Bibliografia .....                                                                                                   | 311 |
| Dodatek A. Uwzględnienie warunków podparcia płyt w metodzie różnic skończonych.....                                  | 319 |
| A.1. Płyta podparta przegubowo na obwodzie .....                                                                     | 319 |
| A.2. Płyta podparta swobodnie na dwóch krawędziach.....                                                              | 323 |
| A.3. Płyta utwierdzona na jednej krawędzi.....                                                                       | 333 |
| Skorowidz .....                                                                                                      | 357 |

# Spis tabel

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.1. Wartości przemieszczeń wybranych punktów płyty z rysunku 3.7 otrzymane przy zastosowaniu MES oraz MRS dla różnych dyskretyzacji powierzchni płyty .....                                                                                                                                                                                                | 90  |
| 3.2. Ugięcia w wybranych punktach płyty z rysunku 3.9 otrzymane za pomocą MRS/MES dla różnych dyskretyzacji powierzchni płyty, stosując dwa warianty obliczania wektora obciążenia $\mathbf{f}$ zgodnie z zasadami MES – sprowadzając obciążenie rozłożone do węzłów siatki MES (a) lub wyznaczając wektor obciążenia przy użyciu funkcji kształtu (b)..... | 93  |
| 3.3. Wartości przemieszczeń wybranych punktów płyty z przykładu 3.3 otrzymane przy zastosowaniu MRS dla różnych dyskretyzacji powierzchni płyty oraz trzech różnych relacji maksymalnej i minimalnej grubości płyty .....                                                                                                                                   | 96  |
| 4.1. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 4.1.....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 111 |
| 4.2. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 4.2.....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 113 |
| 4.3. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 4.3 wyznaczone dla różnych wartości grubości maksymalnej $H_1$ płyty, przy użyciu czterech gęstości siatek MRS .....                                                                                                                                                                                        | 114 |
| 4.4. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 4.4 wyznaczone przy użyciu różnych metod numerycznego całkowania oraz dwóch sposobów dyskretyzacji powierzchni płyty zgodnie z MES .....                                                                                                                                                           | 116 |
| 5.1. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 5.1.....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 139 |
| 5.2. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 5.2.....                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 140 |
| 5.3. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.3 wyznaczone dla trzech przypadków jej grubości maksymalnej $H_1$ , z użyciem różnych gęstości siatek MRS .....                                                                                                                                                                                  | 141 |

|                                                                                                                                                                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.4. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.4 wyznaczone przy pomocy kombinacji metod MES–MEB, z użyciem różnych metod numerycznego całkowania oraz dwóch sposobów dyskretyzacji powierzchni płyty .....         | 143 |
| 5.5. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB z użyciem siatki MES $21 \times 21$ [26].....           | 145 |
| 5.6. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB z użyciem siatki MRS $40 \times 40$ [26].....           | 145 |
| 5.7. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB z użyciem siatki MRS $32 \times 32$ [26].....           | 146 |
| 5.8. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB z użyciem siatki MRS $24 \times 24$ [26].....           | 146 |
| 5.9. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, na podstawie rozwiązania analitycznego [21] oraz przy użyciu MEB [24].....                         | 146 |
| 5.10. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.6 wyznaczone dla trzech wariantów głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB i MRS–MEB oraz na podstawie rozwiązania analitycznego [26]..... | 148 |
| 5.11. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.6 wyznaczone przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB, z użyciem dwóch różnych gęstości siatki MRS [26].....                                                               | 149 |
| 5.12. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.7 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB [26] .....                                             | 150 |

|                                                                                                                                                                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.13. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.7 wyznaczone przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB, dla dwóch wariantów grubości płyty przy utwierdzonej krawędzi i czterech różnych siatek MRS [26] ..... | 150 |
| 6.1. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB oraz siatki MES $20 \times 20$ .....                                                            | 170 |
| 6.2. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS $20 \times 20$ .....                                                            | 170 |
| 6.3. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS $32 \times 32$ .....                                                            | 170 |
| 6.4. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu MEB, na podstawie [9] .....                                                                                              | 171 |
| 6.5. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.2 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB oraz siatki MES $20 \times 20$ .....                                                            | 174 |
| 6.6. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.2 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatek MRS $20 \times 20$ i $32 \times 32$ .....                                           | 174 |
| 6.7. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.2 otrzymane przy zastosowaniu MEB, na podstawie [9] .....                                                                                              | 174 |
| 6.8. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.3 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS $20 \times 20$ .....                                                            | 177 |
| 6.9. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.3 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS $32 \times 32$ .....                                                            | 177 |
| 6.10. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.4 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatek MRS $20 \times 20$ i $32 \times 32$ .....                                          | 179 |
| 7.1. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 7.1 w zależności od temperatury otoczenia [33] .....                                                                                                               | 203 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 7.2. Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia wyznaczone dla płyty z przykładu 7.1 w zależności od temperatury otoczenia [33] .                                                                                                                                      | 203 |
| 7.3. Charakterystyki dynamiczne płyty z przykładu 7.1 otrzymane dla temperatury $T = 2^{\circ}\text{C}$ i różnych dyskretyzacji MES [33] .....                                                                                                                               | 205 |
| 7.4. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 7.2 wyposażonej w: dwa, cztery, siedem oraz czternaście tłumików rozmieszczonych zgodnie z rysunkami 7.11a)–d) [111] .....                                                                                                   | 207 |
| 7.5. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 7.2 wyposażonej w cztery tłumiki rozmieszczone zgodnie z rysunkiem 7.11b), obliczone przy różnych rozmiarach $\tilde{m}$ zredukowanego problemu własnego [111] ..                                                            | 208 |
| 7.6. Liczba iteracji potrzebnych do obliczenia $p$ częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 7.2 wyposażonej w cztery tłumiki rozmieszczone zgodnie z rysunkiem 7.11b), przy różnych rozmiarach $\tilde{m}$ zredukowanego problemu własnego [111] .....                 | 209 |
| 8.1. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 8.2 w przypadku braku tłumików oraz w przypadku wyposażenia w cztery tłumiki zgodnie z optymalną lokalizacją przedstawioną na rysunku 8.9e) [76].....                                                           | 233 |
| 9.1. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 9.1 otrzymane przy założeniu długości $A$ jej krawędzi jako zmiennej losowej .....                                                                                                                                  | 245 |
| 9.2. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 9.1 otrzymane przy założeniu jej grubości $H$ jako zmiennej losowej .....                                                                                                                                           | 245 |
| 9.3. Wartości znormalizowanego gradientu wrażliwości płyty z przykładu 9.1 otrzymane dla kolejnych parametrów projektowych mających wpływ na jej pierwszą częstość drgań własnych [86] .....                                                                                 | 249 |
| 9.4. Wartości dwóch pierwszych częstości drgań własnych płyty z przykładu 9.2 otrzymane przy założeniu trzech zmiennych losowo parametrów projektowych: modułu Younga ( $E$ ), współczynnika Poissona ( $\nu$ ), rzędu pochodnej ułamkowej ( $\alpha_d$ ) tłumika [115]..... | 255 |
| 9.5. Wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9 otrzymane przy użyciu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB, dla różnych dyskretyzacji płyt zgodnie z MES, MRS i MEB [96] .....                                               | 261 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.6. Wartości częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9<br>otrzymane dla zmiennej losowo gęstości cieczy $\rho_c$ przy zastosowaniu<br>kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB.....                                                           | 262 |
| 9.7. Wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych układu<br>płyt z rysunku 9.12, otrzymane przy użyciu kombinacji metod<br>numerycznych MES–MEB i MRS–MEB dla trzech różnych<br>dyskretyzacji siatkami MES, MRS i siatką podobszarów cieczy [96]..... | 265 |
| 9.8. Wartości częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.12<br>otrzymane dla zmiennej losowo odległości $c$ między płytami<br>przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i<br>MRS–MEB .....                                                 | 266 |
| 10.1. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty z<br>rysunku 10.2, przy założeniu stałej grubości $H$ , otrzymane dla trzech<br>różnych dyskretyzacji siatką MRS [106].....                                                                        | 278 |
| 10.2. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty z<br>rysunku 10.2, przy założeniu liniowo zmiennej grubości, otrzymane<br>dla dyskretyzacji siatką MRS $10 \times 10$ [106] .....                                                                  | 279 |
| 10.3. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty z<br>rysunku 10.2, przy założeniu liniowo zmiennej grubości, otrzymane<br>dla dyskretyzacji siatką MRS $15 \times 15$ [106] .....                                                                  | 279 |
| 10.4. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o<br>stałej grubości $H = 0,05$ m, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z<br>rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu trzech gęstości siatki MRS<br>[106] .....                                    | 282 |
| 10.5. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o<br>liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z<br>rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości $10 \times 10$<br>[106] .....                             | 283 |
| 10.6. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o<br>liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z<br>rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości $15 \times 15$<br>[106] .....                             | 283 |

|                                                                                                                                                                                                                            |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 10.7. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty prostokątnej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości $10 \times 10$ [106] ..... | 283 |
| 10.8. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty prostokątnej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości $15 \times 15$ [106] ..... | 284 |
| 10.9. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty o stałej grubości 0,05 m, obciążonej jak na rysunku 10.6, otrzymane dla trzech gęstości siatki MRS [106] .....                                                      | 286 |
| 10.10. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej jak na rysunku 10.6, otrzymane przy użyciu siatki MRS $10 \times 10$ [106] .....                                           | 286 |
| 10.11. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej jak na rysunku 10.6, otrzymane przy użyciu siatki MRS $15 \times 15$ [106] .....                                           | 286 |
| 10.12. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o stałej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7a), otrzymane dla trzech gęstości siatki MRS .....                                                      | 290 |
| 10.13. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o stałej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7b), otrzymane dla trzech gęstości siatki MRS [106] .....                                                | 290 |
| 10.14. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7a), otrzymane przy użyciu siatki MRS $10 \times 10$ .....                                     | 290 |
| 10.15. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7a), otrzymane przy użyciu siatki MRS $15 \times 15$ .....                                     | 291 |
| 10.16. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7b), otrzymane przy użyciu siatki MRS $10 \times 10$ .....                                     | 291 |
| 10.17. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7b), otrzymane przy użyciu siatki MRS $16 \times 16$ .....                                     | 291 |

---

|                                                                                                                                                                              |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 11.1. Krotność wzrostu pierwszej częstości drgań własnych w wyniku zmiany grubości płyt lub ich układów, analizowanych w rozdziałach 4–6, ze stałej na liniowo zmienną ..... | 302 |
| 11.2. Krotność wzrostu pierwszego obciążenia krytycznego ze względu na zmianę grubości płyt, analizowanych w przykładach 10.1–10.4, ze stałej na liniowo zmienną .....       | 303 |

# Spis rysunków

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            |    |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 3.1. Element skończony 4-węzłowy typu plQ4: numeracja węzłów (po lewej), stopnie swobody w węzłach (po prawej) .....                                                                                                                                                                                                                       | 68 |
| 3.2. Lokalizacja punktów całkowania będących środkami geometrycznymi utworzonych podobszarów [25] .....                                                                                                                                                                                                                                    | 70 |
| 3.3. Podział płyty prostokątnej na elementy skończone czterowęzłowe typu plQ4 .....                                                                                                                                                                                                                                                        | 71 |
| 3.4. Płyta prostokątna z nałożoną siatką MRS .....                                                                                                                                                                                                                                                                                         | 73 |
| 3.5. Trzy przypadki podparcia płyty: podparta na obwodzie (a), podparta na dwóch przeciwległych krawędziach (b), zamocowana wspornikowo na jednej krawędzi (c).....                                                                                                                                                                        | 80 |
| 3.6. Zbiór 13 punktów użytych do zapisu równania ugięcia płyty w postaci różnicowej (3.39) dla wybranego punktu $(i, j)$ siatki MRS wraz ze wskazaniem odpowiednich współczynników $(\alpha_l)_{ij}$ , przez które mnożone są przemieszczenia w kolejnych punktach związanych z punktem $(i, j)$ [25] .....                                | 83 |
| 3.7. Schemat płyty wspornikowej rozpatrywanej w przykładzie 3.1 .....                                                                                                                                                                                                                                                                      | 88 |
| 3.8. Sposoby dyskretyzacji powierzchni płyty: siatka $3 \times 2$ (a), siatka $6 \times 2$ (b), siatka $12 \times 4$ (c), siatka $20 \times 10$ (d) .....                                                                                                                                                                                  | 89 |
| 3.9. Wymiary oraz schemat obciążenia płyty kwadratowej rozpatrywanej w przykładzie 3.2 .....                                                                                                                                                                                                                                               | 91 |
| 3.10. Schematy podparcia płyty kwadratowej rozpatrywanej w przykładzie 3.2: płyta utwierdzona na obwodzie (a), płyta swobodnie podparta na obwodzie (b), płyta swobodnie podparta na dwóch przeciwległych krawędziach (c), płyta swobodnie podparta na dwóch przeciwległych krawędziach i utwierdzona na pozostałych krawędziach (d) ..... | 92 |
| 3.11. Sposób sprowadzania obciążenia rozłożonego na powierzchni płyty do węzłów siatki MES.....                                                                                                                                                                                                                                            | 92 |

|                                                                                                                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 3.12. Wykresy ugięcia płyty analizowanej w przykładzie 3.2, utwierdzonej na obwodzie (a) oraz swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach (b).....                                                                    | 94  |
| 3.13. Przekrój płyty o zmiennej grubości, analizowanej w przykładzie 3.3....                                                                                                                                                      | 95  |
| 3.14. Wykresy ugięcia płyty analizowanej w przykładzie 3.3, utwierdzonej na obwodzie (a) oraz swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach (b).....                                                                    | 97  |
| 4.1. Graficzne przedstawienie fragmentów płyty przypadających na poszczególne masy skupione: we wszystkich węzłach siatki MES (a), w wewnętrznych węzłach siatki MES przy nierównym rozdziale mas na poszczególne węzły (b) ..... | 105 |
| 4.2. Numeracja mas skupionych w węzłach siatki MRS dla płyty o zmiennej sztywności.....                                                                                                                                           | 110 |
| 4.3. Oznaczenie współrzędnych określających położenie obszarów płyty przypadających na masy skupione w węzłach siatki MRS.....                                                                                                    | 110 |
| 4.4. Pięć pierwszych postaci drgań własnych płyty kwadratowej swobodnie podpartej z przykładu 4.1 .....                                                                                                                           | 112 |
| 4.5. Cztery pierwsze postaci drgań własnych płyty kwadratowej wspornikowej z przykładu 4.2.....                                                                                                                                   | 113 |
| 5.1. Dyskretyzacja płyty całkowicie zanurzonej w płynie z użyciem jednakowych podobszarów cieczy o kształcie prostokątnym .....                                                                                                   | 118 |
| 5.2. Wyjaśnienie oznaczeń do wzoru (5.15) pozwalającego obliczyć całkę (5.14) po obszarze prostokąta [9] .....                                                                                                                    | 121 |
| 5.3. Rysunek pomocniczy do wzoru (5.18) .....                                                                                                                                                                                     | 122 |
| 5.4. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem jednakowych podobszarów cieczy o kształcie prostokątnym – rysunek pokazujący prawidłowe rozmieszczenie w przestrzeni ośrodków próżnia–ciecz.....                 | 123 |
| 5.5. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem jednakowych podobszarów cieczy o kształcie prostokątnym – rysunek odwrócony utworzony pomocniczo w celu opracowania algorytmów komputerowych .....               | 124 |
| 5.6. Sposób uwzględniania powierzchni swobodnej cieczy dla płyty zanurzonej pionowo (a) lub poziomo (b) [24] .....                                                                                                                | 125 |

|                                                                                                                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 5.7. Rysunek pomocniczy do obliczania całek (5.19) oraz (5.20) dla płyty zanurzonej pionowo w cieczy .....                                                                        | 126 |
| 5.8. Rysunek pomocniczy do obliczania całek (5.19) oraz (5.20) dla płyty zanurzonej poziomo w cieczy .....                                                                        | 127 |
| 5.9. Dyskretyzacja płyty całkowicie zanurzonej w płynie z użyciem regularnego podziału na podobszary cieczy i dopasowanej odpowiednio siatki MES .....                            | 129 |
| 5.10. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem regularnego podziału na podobszary cieczy i dopasowanej odpowiednio siatki MES .....                            | 133 |
| 5.11. Dyskretyzacja płyty całkowicie zanurzonej w płynie z użyciem regularnej siatki MRS i dopasowanej odpowiednio siatki podobszarów cieczy .....                                | 135 |
| 5.12. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem regularnej siatki MRS i dopasowanej odpowiednio siatki podobszarów cieczy .....                                 | 137 |
| 5.13. Prostokątna płyta wspornikowa zanurzona w wodzie pionowo (a) oraz poziomo (b) [24] .....                                                                                    | 144 |
| 5.14. Prostokątna płyta wspornikowa o zmiennej grubości zanurzona pionowo w wodzie .....                                                                                          | 150 |
| 6.1. Układ dwóch płyt o powierzchniach środkowych leżących w jednej płaszczyźnie wraz z dyskretyzacją na podobszary cieczy .....                                                  | 154 |
| 6.2. Układ dwóch płyt o powierzchniach środkowych leżących w dwóch płaszczyznach równoległych wraz z dyskretyzacją na podobszary cieczy .....                                     | 155 |
| 6.3. Oznaczenie odległości w układzie płyt w celu obliczenia całek (6.4)–(6.7) .....                                                                                              | 156 |
| 6.4. Rzut poziomy układu płyt zawierających się w dwóch równoległych płaszczyznach, w przypadku gdy rzuty płyt nachodzą na siebie (a) oraz gdy nie mają części wspólnej (b) ..... | 159 |
| 6.5. Struktura blokowa macierzy bezwładności układu płyt (a) oraz macierzy bezwładności płynu otaczającego układ (b) .....                                                        | 161 |
| 6.6. Układ dwóch płyt z przykładową dyskretyzacją MRS oraz odpowiadającą jej dyskretyzacją na podobszary cieczy .....                                                             | 167 |
| 6.7. Układ dwóch płyt kwadratowych leżących w jednej płaszczyźnie, analizowany w przykładzie 6.1 .....                                                                            | 169 |

|                                                                                                                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 6.8. Układ dwóch płyt kwadratowych leżących w dwóch płaszczyznach równoległych, analizowany w przykładzie 6.2.....                                                                          | 173 |
| 6.9. Układ dwóch płyt kwadratowych o zmiennej grubości, leżących w jednej płaszczyźnie, analizowany w przykładzie 6.3.....                                                                  | 176 |
| 6.10. Układ dwóch płyt kwadratowych o zmiennej grubości, leżących w dwóch płaszczyznach równoległych, analizowany w przykładzie 6.4.....                                                    | 178 |
| 7.1. Budowa lepkosprężystego tłumika drgań [30] .....                                                                                                                                       | 182 |
| 7.2. Schemat lepkosprężystego tłumika drgań opisanego uogólnionym modelem reologicznym [39].....                                                                                            | 183 |
| 7.3. Schemat lepkosprężystego tłumika drgań opisanego uogólnionym modelem Maxwella [76].....                                                                                                | 184 |
| 7.4. Schemat lepkosprężystego tłumika drgań opisanego przy pomocy modelu ułamkowego [39] .....                                                                                              | 184 |
| 7.5. Schemat lepkosprężystego tłumika drgań opisanego modelem ułamkowym zawierający element sprężysty zamiast elementu Kelvina. ....                                                        | 185 |
| 7.6. Płyta wspornikowa analizowana w przykładzie 7.1, wyposażona w trzy tłumiki lepkosprężyste przy jej swobodnej krawędzi (oznaczone czerwonymi okręgami) .....                            | 202 |
| 7.7. Schemat tłumika lepkosprężystego opisanego uogólnionym modelem Maxwella, zawierającego jeden element Maxwella .....                                                                    | 202 |
| 7.8. Wykres zależności pierwszej częstości drgań własnych od temperatury dla płyty z przykładu 7.1 [33].....                                                                                | 204 |
| 7.9. Wykres zależności bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań od temperatury dla płyty z przykładu 7.1 [33] .....                                                   | 204 |
| 7.10. Schemat podparcia płyty z przykładu 7.2.....                                                                                                                                          | 206 |
| 7.11. Sposób rozmieszczenia: dwóch (a), czterech (b), siedmiu (c) oraz czternastu (d) tłumików lepkosprężystych w analizie dynamicznej płyty z przykładu 7.2 .....                          | 207 |
| 8.1. Schematy podparcia płyt analizowanych w podrozdziale 8.2: płyta wspornikowa (a), płyta utwierdzona na dwóch sąsiednich krawędziach i swobodnie podparta na trzeciej krawędzi (b) ..... | 221 |
| 8.2. Dyskretyzacja siatkami MES płyt analizowanych w podrozdziale 8.2 wraz z numeracją węzłów wewnętrznych: siatka $10 \times 10$ (a), siatka $15 \times 15$ (b) .....                      | 222 |

- 
- 8.3. Przyjęte otoczenia zawierające cząstki roju w obrębie płyty analizowanej w przykładzie 8.1: jedno otoczenie na całej powierzchni płyty (a), cztery otoczenia w poszczególnych ćwiartkach płyty (b) ..... 223
- 8.4. Schemat optymalizacji położenia tłumika dla płyty wspornikowej rozważanej w przykładzie 8.1 przy założeniu jednego otoczenia na powierzchni płyty: rój cząstek wybrany losowo w kroku zerowym iteracji (a), najlepsze położenia cząstek w poszczególnych iteracjach algorytmu PSO (b) [76] ..... 224
- 8.5. Rój cząstek wybrany losowo w kroku zerowym iteracji PSO dla płyty wspornikowej rozważanej w przykładzie 8.1 przy założeniu czterech otoczeń na powierzchni płyty zgodnie z rysunkiem 8.3b): w otoczeniu nr 1 (a), w otoczeniu nr 2 (b), w otoczeniu nr 3 (c), w otoczeniu nr 4 (d) [76] ..... 226
- 8.6. Schemat optymalizacji położenia tłumika dla płyty wspornikowej rozważanej w przykładzie 8.1 przy założeniu czterech otoczeń na powierzchni płyty – najlepsze położenia cząstek w poszczególnych iteracjach algorytmu PSO: dla otoczenia nr 1 (a), dla otoczenia nr 2 (b), dla otoczenia nr 3 (c), dla otoczenia nr 4 (d) [76] ..... 227
- 8.7. Wykresy dwóch pierwszych postaci drgań własnych nietłumionych dla płyty o schemacie podparcia według rysunku 8.1b), wygenerowane w programie Octave..... 228
- 8.8. Rój cząstek wybrany losowo w zerowym kroku metody PSO dla płyty rozważanej w przykładzie 8.2, zakładając dwa otoczenia na jej powierzchni: w otoczeniu nr 1 (a) oraz nr 2 (b) przy losowaniu nr 1, w otoczeniu nr 1 (c) oraz nr 2 (d) przy losowaniu nr 2, w otoczeniu nr 1 (e) oraz nr 2 (f) przy losowaniu nr 3 [76]..... 229
- 8.9. Optymalne położenie czterech tłumików dla płyty rozważanej w przykładzie 8.2, zakładając dwa otoczenia na jej powierzchni: dla otoczenia nr 1 (a) oraz nr 2 (b) przy wstępnym losowaniu nr 1, dla otoczenia nr 1 (c) oraz nr 2 (d) przy wstępnym losowaniu nr 2, dla otoczenia nr 1 (e) oraz nr 2 (f) przy wstępnym losowaniu nr 3 [76] ..... 231
- 8.10. Schemat optymalizacji położenia czterech tłumików na powierzchni płyty z przykładu 8.2 – najkorzystniejsze lokalizacje cząstek w poszczególnych iteracjach algorytmu PSO dla wstępnego losowania nr 3 cząstek w otoczeniu nr 1 ..... 232

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                           |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.1. Wykresy wielomianów wyrażonych wzorami (9.20)–(9.23) wraz z wynikami obliczeń deterministycznych zestawionymi w tabeli 9.1.....                                                                                                                                                                                                                                      | 247 |
| 9.2. Wykresy wielomianów wyrażonych wzorami (9.25)–(9.28) wraz z wynikami obliczeń deterministycznych zestawionymi w tabeli 9.2.....                                                                                                                                                                                                                                      | 248 |
| 9.3. Wykresy zależności wartości oczekiwanej, współczynnika zmienności, skośności i kurtozy dla pięciu pierwszych częstości drgań własnych od współczynnika zmienności $\alpha$ losowo zmiennej długości boku $A$ płyty z przykładu 9.1 [86] .....                                                                                                                        | 250 |
| 9.4. Wykresy zależności wartości oczekiwanej, współczynnika zmienności, skośności i kurtozy dla pięciu pierwszych częstości drgań własnych od współczynnika zmienności $\alpha$ losowo zmiennej grubości $H$ płyty z przykładu 9.1 [86].....                                                                                                                              | 251 |
| 9.5. Wykresy zależności wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od współczynnika zmienności $\alpha(E)$ modułu Younga, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), symulacyjnej Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115].....                      | 256 |
| 9.6. Wykresy zależności wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej $\alpha(\nu)$ współczynnika Poissona, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115] .....                         | 257 |
| 9.7. Wykresy zależności wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej $\alpha(\alpha_d)$ parametru $\alpha_d$ tłumików, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), symulacyjnej Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115]..... | 258 |
| 9.8. Wykresy zależności miary niezawodności pierwszego rzędu (a) oraz miary bezpieczeństwa obliczanej według entropii względnej (b) od niepewności wejściowej $\alpha(E)$ modułu Younga, otrzymane przy użyciu dwóch metod: półanalitycznej (SAM) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115] .....                                                                       | 259 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |     |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.9. Układ dwóch wspornikowych płyt kwadratowych leżących w jednej płaszczyźnie i zanurzonych całkowicie w cieczy, rozpatrywany w przykładzie 9.3 .....                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 260 |
| 9.10. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej $\alpha(\rho_c)$ gęstości cieczy $\rho_c$ , otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9 przy użyciu metod: półanalizycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT). W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MES–MEB [96] ..... | 263 |
| 9.11. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej $\alpha(\rho_c)$ gęstości cieczy $\rho_c$ , otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9 przy użyciu metod: półanalizycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT). W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MRS–MEB [96] ..... | 264 |
| 9.12. Układ wspornikowych płyt kwadratowych leżących w dwóch płaszczyznach równoległych i zanurzonych całkowicie w cieczy, rozpatrywany w przykładzie 9.3 .....                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 265 |
| 9.13. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej $\alpha(c)$ odległości między płytami, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.12 przy użyciu metod: półanalizycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT). W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MES–MEB [96] .....     | 267 |
| 9.14. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej $\alpha(c)$ odległości między płytami, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.12 przy użyciu metod: półanalizycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT). W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MRS–MEB [96] .....     | 268 |

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        |     |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 9.15. Wykresy zależności miary bezpieczeństwa $\beta_H$ układu płyt z rysunku 9.9 od niepewności wejściowej $\alpha(\rho_c)$ gęstości cieczy, otrzymane przy użyciu metody półanalitycznej (SAM) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) dla pierwszej (a, c) i drugiej (b, d) częstości drgań, stosując w obliczeniach deterministycznych kombinacje metod MES–MEB (a, b) oraz MRS–MEB (c, d) [96]..... | 269 |
| 10.1. Obciążenie działające na płytę w analizie jej stateczności [106].....                                                                                                                                                                                                                                                                                                                            | 272 |
| 10.2. Płyta prostokątna analizowana w przykładzie 10.1, podparta swobodnie na obwodzie oraz ściskana obciążeniem $N_x$ działającym w jednym kierunku [106].....                                                                                                                                                                                                                                        | 278 |
| 10.3. Trzy pierwsze postacie utraty stateczności odpowiadające obciążeniom krytycznym zestawionym w tabeli 10.1 dla płyty kwadratowej o stałej grubości [106].....                                                                                                                                                                                                                                     | 279 |
| 10.4. Trzy pierwsze postacie utraty stateczności odpowiadające obciążeniom krytycznym zestawionym w tabeli 10.3 dla płyty kwadratowej o liniowo zmiennej grubości przy założeniu, że $H_1 = 2,5H_2$ [106].....                                                                                                                                                                                         | 280 |
| 10.5. Płyta prostokątna analizowana w przykładzie 10.2, podparta swobodnie na obwodzie, ściskana lub rozciągana w dwóch kierunkach .                                                                                                                                                                                                                                                                   | 281 |
| 10.6. Płyta prostokątna podparta swobodnie (a) lub utwierdzona na obwodzie (b), obciążona stycznie do krawędzi, stanowiąca przedmiot analizy w przykładzie 10.3 .....                                                                                                                                                                                                                                  | 285 |
| 10.7. Płyta prostokątna podparta swobodnie na obwodzie, poddana działaniu zmiennego obciążenia normalnego $N_x$ w dwóch wariantach, analizowana w przykładzie 10.4 .....                                                                                                                                                                                                                               | 288 |
| 10.8. Schemat obliczeniowy płyty prostokątnej poddanej działaniu liniowo zmiennego obciążenia normalnego $N_x$ w dwóch wariantach przedstawionych na rysunku 10.7.....                                                                                                                                                                                                                                 | 289 |
| A.1. Zbiór 13 punktów użytych w celu zapisania równania (3.39) dla węzła siatki $(i, j) = (2, 1)$ wraz ze wskazaniem współczynników $(\alpha_l)_{ij}$ występujących w równaniu.....                                                                                                                                                                                                                    | 354 |



# Wykaz skrótów i oznaczeń

## Ważniejsze skróty

- AEM – metoda równań równoważnych (ang. *the analog equation method*),  
MCS – metoda symulacyjna Monte-Carlo stosowana w analizie losowej  
(ang. *Monte-Carlo simulation method*),  
MEB – metoda elementów brzegowych,  
MES – metoda elementów skończonych,  
MPS – metoda pasm skończonych,  
MRS – metoda różnic skończonych,  
PSO – metoda roju cząstek (ang. *the particle swarm optimization method*),  
SAM – metoda półanalityczna służąca do obliczania momentów losowych  
(ang. *semi-analytical method*),  
SPT – uogólniona metoda perturbacji stochastycznej (ang. *generalized stochastic perturbation method*).

## Ważniejsze oznaczenia

### Podrozdział 3.1

- $w = w(x, y)$  – funkcja ugięcia płaszczyzny środkowej płyty  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  
 $p = p(x, y)$  – funkcja obciążenia płyty w jednostkach siły na jednostkę powierzchni,  
 $\mathbf{D}$  – macierz kwadratowa o wymiarze  $3 \times 3$  zawierająca sztywności płyty na zginanie i skręcanie,  
 $E$  – moduł Younga materiału płyty izotropowej,  
 $\nu$  – współczynnik Poissona materiału płyty izotropowej,  
 $H$  – stała grubość płyty,  
 $E_w, E_0$  – moduł Younga odpowiednio włókien i osnowy materiału płyty ortotropowej (włóknokompozytowej),

---

|                |   |                                                                                                       |
|----------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\nu_w, \nu_0$ | – | współczynnik Poissona odpowiednio włókien i osnowy materiału płyty ortotropowej (włóknokompozytowej), |
| $m_w, m_0$     | – | udział objętościowy włókien i osnowy w materiale płyty ortotropowej (włóknokompozytowej),             |
| $A, B$         | – | długość i szerokość płyty prostokątnej,                                                               |
| $H = H(x, y)$  | – | funkcja grubości płyty określona na obszarze $\Omega = [0, A] \times [0, B]$ ,                        |
| $D = D(x, y)$  | – | funkcja sztywności na zginanie płyty izotropowej o zmiennej grubości.                                 |

### Podrozdział 3.2.1

|                                   |   |                                                                                                                                                                     |
|-----------------------------------|---|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| plQ4                              | – | prostokątny element skończony 4-węzłowy opisany w [1],                                                                                                              |
| $l_{el}$                          | – | liczba elementów skończonych typu plQ4 dyskretyzujących powierzchnię płyty,                                                                                         |
| $\Omega_e$                        | – | powierzchnia pojedynczego elementu skończonego $e$ , przy czym $e = 1, 2, 3, \dots, l_{el}$ ,                                                                       |
| $w_i, \varphi_{ix}, \varphi_{iy}$ | – | stopnie swobody w $i$ -tym węźle ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) elementu skończonego plQ4 (przemieszczenie translacyjne oraz dwa obroty względem osi odpowiednio $x$ i $y$ ), |
| $\mathbf{w}_i^e$                  | – | wektor przemieszczenia $i$ -tego węzła ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) elementu skończonego $e$ typu plQ4,                                                                     |
| $w^e(x, y)$                       | – | wielomian czwartego stopnia służący do aproksymacji funkcji ugięcia płyty w dowolnym punkcie elementu skończonego $e$ ,                                             |
| $\alpha_1 - \alpha_{12}$          | – | współczynniki wielomianu $w^e(x, y)$ określonego wyżej,                                                                                                             |
| $\mathbf{w}^e$                    | – | wektor przemieszczenia elementu skończonego $e$ typu plQ4,                                                                                                          |
| $N_i^e(x, y)$                     | – | funkcje kształtu pojedynczego elementu skończonego $e$ typu plQ4 odpowiadające kolejnym jego stopniom swobody, przy czym $i = 1, 2, 3, \dots, 12$ ,                 |
| $\mathbf{N}^e$                    | – | wektor zawierający wyżej określone funkcje kształtu pojedynczego elementu skończonego $e$ typu plQ4,                                                                |
| $\mathbf{K}^e$                    | – | macierz sztywności o wymiarze $12 \times 12$ pojedynczego elementu skończonego $e$ typu plQ4,                                                                       |
| $\mathbf{B}$                      | – | macierz pochodnych drugiego rzędu z funkcji kształtu pojedynczego elementu skończonego plQ4,                                                                        |
| $(\xi_i, \eta_j)$                 | – | punkty całkowania należące do obszaru $[-1, 1] \times [-1, 1]$ , stosowane w niestandardowej metodzie całkowania numerycznego,                                      |
| $w_{ij}$                          | – | wagi stosowane w niestandardowej metodzie całkowania numerycznego,                                                                                                  |

|                                  |                                                                                                                                                                              |
|----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $ J(\xi_i, \eta_j) $             | – jakobian przekształcenia obszaru $\Omega$ w obszar $[-1, 1] \times [-1, 1]$ ,                                                                                              |
| $m \times n$                     | – wymiary siatki MES dyskretyzującej płytę prostokątną umieszczoną w próżni (liczba elementów skończonych dzielących odpowiednio poziomą i pionową krawędź płyty),           |
| $h_i$                            | – szerokości elementów skończonych w kierunku poziomym ( $i = 1, 2, 3, \dots, m$ ),                                                                                          |
| $k_j$                            | – szerokości elementów skończonych w kierunku pionowym ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ),                                                                                          |
| <b>K</b>                         | – globalna macierz sztywności płyty,                                                                                                                                         |
| <b>w</b>                         | – globalny wektor przemieszczeń węzłowych płyty,                                                                                                                             |
| <b>f</b>                         | – globalny wektor obciążeń węzłowych płyty,                                                                                                                                  |
| <b>f<sup>e</sup></b>             | – wektor obciążeń węzłowych pojedynczego elementu skończonego $e$ typu plQ4,                                                                                                 |
| <b>P<sub>w</sub></b>             | – globalny wektor sił skupionych działających na płytę, przyłożonych bezpośrednio do węzłów siatki MES,                                                                      |
| <b>Q<sub>0</sub><sup>e</sup></b> | – wektor sił węzłowych elementu skończonego $e$ pochodzących od obciążenia rozłożonego, przypadającego w jego obrębie; wartości wektora zależą od funkcji kształtu elementu, |
| $h \times k$                     | – wymiary podobszarów prostokątnych składających się na regularną siatkę MES.                                                                                                |

### Podrozdział 3.2.2

|                                                                                                    |                                                                                                                                                                                |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $m \times n$                                                                                       | – wymiary siatki MRS nałożonej na powierzchnię środkową płyty prostokątnej,                                                                                                    |
| $h \times k$                                                                                       | – wymiary podobszarów prostokątnych składających się na regularną siatkę MRS,                                                                                                  |
| $(x_i, y_j)$                                                                                       | – współrzędne pojedynczego węzła siatki MRS, przy czym $i = 1, 2, 3, \dots, m + 1$ oraz $j = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ ,                                                          |
| $w_{ij}$                                                                                           | – przybliżona wartość przemieszczenia punktu płyty o współrzędnych $(x_i, y_j)$ ,                                                                                              |
| $w_{i\pm 1, j\pm 1}$                                                                               | – przybliżona wartość przemieszczenia punktu płyty o współrzędnych $(x_i \pm h, y_j \pm k)$ ,                                                                                  |
| $\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ij}, \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{ij}$ | – przybliżone pochodne funkcji przemieszczenia pionowego płyty w punkcie $(x_i, y_j)$ , wyrażone przy pomocy różnic centralnych,                                               |
| $(\alpha_1)_{ij}, -(\alpha_{13})_{ij}$                                                             | – współczynniki przy niewiadomych przemieszczeniach w otoczeniu punktu $(x_i, y_j)$ występujące w różnicowej postaci równania ugięcia płyty izotropowej o zmiennej sztywności, |

|                                                                                                    |                                                                                                                                                                 |
|----------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $D_{ij}$                                                                                           | – wartość dokładna funkcji sztywności płyty w punkcie $(x_i, y_j)$ ,                                                                                            |
| $\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{ij}, \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)_{ij}$ | – przybliżone pochodne funkcji sztywności płyty w punkcie $(x_i, y_j)$ , wyrażone przy pomocy różnic centralnych,                                               |
| $(M_x)_{ij}, (M_y)_{ij}$                                                                           | – przybliżone wartości momentów zginających w punkcie $(x_i, y_j)$ , względem osi odpowiednio $x$ oraz $y$ , wyrażone przy pomocy różnic centralnych,           |
| $(\bar{Q}_x)_{ij}, (\bar{Q}_y)_{ij}$                                                               | – przybliżone wartości zastępczych sił poprzecznych w punkcie $(x_i, y_j)$ , względem osi odpowiednio $x$ oraz $y$ , wyrażone przy pomocy różnic centralnych,   |
| $(\varphi_x)_{ij}, (\varphi_y)_{ij}$                                                               | – przybliżone wartości kątów obrotu płyty w punkcie $(x_i, y_j)$ , względem osi odpowiednio $x$ oraz $y$ , wyrażone przy pomocy różnic centralnych,             |
| $R_{ij}$                                                                                           | – przybliżona wartość reakcji naroża płyty w punkcie $(x_i, y_j)$ , wyrażona przy pomocy różnic centralnych,                                                    |
| $\Delta$                                                                                           | – macierz operatorów różnicowych, tzn. macierz układu równań różnicowych zastępującego równanie ugięcia płyty o zmiennej sztywności,                            |
| $\mathbf{w}$                                                                                       | – wektor niewiadomych przemieszczeń węzłów siatki MRS,                                                                                                          |
| $\mathbf{p}$                                                                                       | – wektor obciążenia przypadającego na poszczególne punkty siatki MRS,                                                                                           |
| $\mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}_k, \mathbf{D}_j, \mathbf{E}_k$                             | – macierze-bloki tworzące blokową strukturę macierzy $\Delta$ , przy czym $i = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ ; $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ; $k = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ , |
| $H_1, H_2$                                                                                         | – odpowiednio maksymalna i minimalna grubość płyty o liniowo zmiennej grubości w jednym kierunku.                                                               |

## Dodatek A

Obowiązują oznaczenia do podrozdziału 3.2.2 z poniższym uzupełnieniem:

|                                |                                                                                                                                                                                                                     |
|--------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\beta_i, \gamma_j, \varphi_k$ | – oznaczenia pomocnicze stosowane przy wyprowadzaniu macierzy operatorów różnicowych dla płyty swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach, gdzie $i = 1, 2$ ; $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ; $k = 1, 2, 3, 4$ , |
| $\varphi'_1$                   | – oznaczenie pomocnicze stosowane przy wyprowadzaniu macierzy operatorów różnicowych dla płyty utwierdzonej na dwóch przeciwległych krawędziach,                                                                    |

- $\beta'_i, \gamma'_j, \varphi_k, \varphi'_l$  – oznaczenia pomocnicze używane przy wyprowadzaniu macierzy operatorów różnicowych dla płyty podpartej wspornikowo na lewej krawędzi, gdzie  $i = 1, 2$ ;  $j = 1, 2, 3, 4, 5$ ;  $k = 5, 6, 7, \dots, 24$ ;  $l = 5, 6, 7, \dots, 10$ .

## Podrozdział 4.1

- K** – globalna macierz sztywności płyty,  
**q** – globalny wektor przemieszczeń węzłów siatki MES,  
**F** – globalny wektor obciążeń płyty,  
 $t$  – zmienna czasowa,  
 $w_e$  – liczba węzłów siatki MES dyskretyzującej powierzchnię płyty,  
 $n_s$  – liczba stopni swobody płyty ustalana według zasad MES,  
**M** – globalna macierz bezwładności (mas) płyty,  
**C** – macierz tłumienia konstrukcyjnego płyty,  
 $\ddot{\mathbf{q}}(t), \dot{\mathbf{q}}(t), \mathbf{q}(t)$  – zależne od zmiennej czasowej  $t$  wektory odpowiednio: przyspieszenia, prędkości i przemieszczeń uogólnionych węzłów płyty,  
 $\mathbf{F}(t)$  – zależny od zmiennej czasowej  $t$  wektor obciążeń zewnętrznych płyty,  
 $t_0$  – chwila początkowa,  
 $\dot{\mathbf{q}}_0, \mathbf{q}_0$  – wektory odpowiednio prędkości i przemieszczeń uogólnionych węzłów płyty w chwili początkowej,  
 $\mathbf{q}_{a,i}$  –  $i$ -ty wektor własny, gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,  
 $\omega_i$  –  $i$ -ta częstość drgań własnych, gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,  
 $\lambda_i$  –  $i$ -ta wartość własna, gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,  
**Q** – macierz wektorów własnych o wymiarze  $n_s \times n_s$ ,  
**L** – diagonalna macierz wartości własnych o wymiarze  $n_s \times n_s$  albo macierz trójkątna dolna w rozkładzie Choleskiego,  
**H** – macierz symetryczna w standardowym problemie własnym,  
**I** – macierz jednostkowa,  
 $m_i$  – wartość masy skupionej w  $i$ -tym węźle siatki MES przy założeniu granulacji masy w płycie, gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, w_e$ ,  
 $\rho$  – gęstość materiału płyty,  
 $A_i$  – pole powierzchni płyty przypadające na  $i$ -ty węzeł siatki MES, gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, w_e$ ,  
 $H$  – grubość płyty,  
 $A, B$  – długość i szerokość płyty prostokątnej,

---

|                |                                                                                                                |
|----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $n_e$          | – liczba elementów skończonych dyskretyzujących powierzchnię płyty zgodnie z zasadami MES,                     |
| $\mathbf{M}_e$ | – macierz bezwładności pojedynczego elementu skończonego wchodzącego w skład siatki MES dyskretyzującej płytę, |
| $\mathbf{N}_m$ | – macierz pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu z funkcji kształtu charakteryzujących element skończony,     |
| $\bar{\rho}$   | – macierz zależna od gęstości materiału płyty.                                                                 |

## Podrozdział 4.2

|                     |                                                                                                                                                                          |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $p(x, y) = B(x, y)$ | – intensywność obciążenia siłami bezwładności w punkcie płyty o współrzędnych $(x, y)$ ,                                                                                 |
| $m$                 | – masa płyty na jednostkę powierzchni wyrażona w $\text{kg}/\text{m}^2$ albo liczba podobszarów siatki MRS wzdłuż poziomej krawędzi płyty,                               |
| $n$                 | – liczba podobszarów siatki MRS wzdłuż pionowej krawędzi płyty,                                                                                                          |
| $w(x, y, t)$        | – przemieszczenie pionowe punktu płyty o współrzędnych $(x, y)$ w chwili $t$ ,                                                                                           |
| $p_{ij} = B_{ij}$   | – obciążenie płyty siłami bezwładności, przypadające na punkt płyty o współrzędnych $(i, j) = (x_i, y_j)$ , gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, m$ oraz $j = 1, 2, 3, \dots, n$ , |
| $m_{ij}$            | – masa części płyty przypadającej na węzeł $(i, j)$ siatki MRS,                                                                                                          |
| $A_{ij}$            | – pole powierzchni części płyty przypadającej na węzeł $(i, j)$ siatki MRS,                                                                                              |
| $w_{ij}(t)$         | – przemieszczenie pionowe punktu $(i, j)$ płyty w chwili $t$ ,                                                                                                           |
| $W_{ij}$            | – amplituda drgań punktu $(i, j)$ płyty,                                                                                                                                 |
| $\tilde{m}_{ij}$    | – iloraz masy oraz pola powierzchni części płyty przypadającej na węzeł $(i, j)$ siatki MRS ,                                                                            |
| $\mathbf{M}$        | – diagonalna macierz bezwładności płyty,                                                                                                                                 |
| $\mathbf{W}$        | – wektor amplitud płyty w węzłach siatki MRS.                                                                                                                            |

## Podrozdział 5.1

|              |                                                                                         |
|--------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $N$          | – liczba podobszarów cieczy dyskretyzujących powierzchnię płyty zgodnie z zasadami MEB, |
| $c \times d$ | – wymiary siatki podobszarów cieczy dyskretyzującej płytę zgodnie z zasadami MEB,       |

---

|                                       |   |                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------------------------|---|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $h_1 \times k_1$                      | – | wymiary prostokątnych podobszarów cieczy tworzących siatkę regularną, dyskretyzującą płytę zgodnie z zasadami MEB,                                                                              |
| $S$                                   | – | pole powierzchni pojedynczego podobszaru cieczy współtworzącego siatkę regularną, dyskretyzującą płytę zgodnie z zasadami MEB,                                                                  |
| $\varphi = \varphi(\mathbf{x}, t)$    | – | potencjał pola prędkości płynu,                                                                                                                                                                 |
| $\mathbf{x}$                          | – | wektor położenia punktu w przestrzeni,                                                                                                                                                          |
| $\kappa$                              | – | współczynnik ściśliwości cieczy,                                                                                                                                                                |
| $a_0$                                 | – | prędkość dźwięku w cieczy,                                                                                                                                                                      |
| $\omega = \omega_{Re} + i\omega_{Im}$ | – | częstość kołowa drgań własnych cieczy ściśliwej (liczba zespolona, przy czym dla płynu nieściśliwego $\omega_{Im} = 0$ ),                                                                       |
| $w = w(\mathbf{x}, t)$                | – | przemieszczenie normalne powierzchni środkowej płyty,                                                                                                                                           |
| $\tilde{w}(\mathbf{x})$               | – | amplituda przemieszczenia punktu płyty,                                                                                                                                                         |
| $\Delta p_n$                          | – | amplituda wypadkowego wektora ciśnienia hydrodynamicznego w punkcie $(x_n, y_n)$ na powierzchni $S_n$ płyty,                                                                                    |
| $\rho_c$                              | – | gęstość cieczy otaczającej płytę,                                                                                                                                                               |
| $\mathbf{H}$                          | – | macierz kwadratowa o wymiarze $N \times N$ wyznaczana w celu otrzymania macierzy bezwładności cieczy otaczającej płytę,                                                                         |
| $\mathbf{P}$                          | – | siły hydrodynamiczne działające na powierzchnię płyty,                                                                                                                                          |
| $\mathbf{M}_c$                        | – | macierz bezwładności (mas) cieczy otaczającej płytę,                                                                                                                                            |
| $\mathbf{S}$                          | – | macierz diagonalna o wymiarze $N \times N$ zawierająca na głównej przekątnej pola powierzchni podobszarów cieczy otaczającej płytę,                                                             |
| $x_p, x_k, y_p, y_k$                  | – | współrzędne punktów narożnych $n$ -tego podobszaru cieczy względem lokalnego układu współrzędnych o początku w punkcie $m$ , użyte w celu wyznaczenia elementu $H_{mn}$ macierzy $\mathbf{H}$ , |
| $\mathbf{W}$                          | – | macierz zawierająca w kolejnych kolumnach współrzędne punktów narożnych podobszarów cieczy w układzie globalnym, przyjętym w lewym dolnym narożu płyty,                                         |
| $\mathbf{Sr}$                         | – | macierz zawierająca w kolejnych kolumnach współrzędne punktów kolokacji podobszarów cieczy w układzie globalnym płyty,                                                                          |
| $\mathbf{t}$                          | – | macierz powiązań dla podobszarów cieczy, o wymiarze $4 \times N$ , zawierająca w kolejnych kolumnach numery węzłów narożnych podobszarów cieczy,                                                |
| $h_n$                                 | – | głębokość położenia $n$ -tego podobszaru cieczy poniżej powierzchni swobodnej płynu.                                                                                                            |

**Podrozdział 5.2**

- $\mathbf{M}, \mathbf{M}_{pc}$  – macierz bezwładności układu płyta–ciecz,  
 $\mathbf{M}_c$  – macierz bezwładności (mas) cieczy otaczającej płytę,  
 $\mathbf{M}_p$  – macierz bezwładności płyty,  
 $c \times d$  – wymiary siatki podobszarów cieczy dyskretyzującej płytę zgodnie z zasadami MEB,  
 $h_1 \times k_1$  – wymiary prostokątnych podobszarów cieczy składających się na regularną siatkę dyskretyzującą płytę zgodnie z zasadami MEB,  
 $m \times n$  – wymiary siatki MES dyskretyzującej płytę,  
 $\mathbf{K}^e, \mathbf{M}_p^e$  – macierz sztywności oraz konsystentna macierz bezwładności pojedynczego elementu skończonego dyskretyzującego płytę zgodnie z zasadami MES,  
 $n_1$  – liczba elementów skończonych w kierunku pionowym, liczona w części płyty niezanurzonej w płynie,  
 $A$  – wymiar poziomy płyty zanurzonej w płynie,  
 $B$  – wymiar pionowy płyty zanurzonej w płynie, mierzony w części otoczonej cieczą,  
 $B_1$  – wymiar pionowy płyty zanurzonej w płynie, mierzony w części znajdującej się w próżni,  
 $H$  – grubość płyty,  
 $k_2$  – pionowy wymiar elementu skończonego dyskretyzującego powierzchnię płyty zanurzonej w płynie, mierzony w części znajdującej się w próżni.

**Podrozdział 5.3**

- $\mathbf{M}$  – macierz bezwładności układu płyta–ciecz,  
 $\Delta$  – macierz operatorów różnicowych według metodologii MRS,  
 $c \times d$  – wymiary siatki podobszarów cieczy dyskretyzującej płytę zgodnie z zasadami MEB,  
 $h \times k$  – wymiary podobszarów składających się na regularną siatkę dyskretyzującą płytę zgodnie z zasadami MRS,  
 $m \times n$  – wymiary siatki MRS dyskretyzującej płytę,  
 $m_1$  – liczba podobszarów siatki MRS w kierunku pionowym, liczona w części płyty w próżni,  
 $A$  – wymiar poziomy (pionowy) płyty zanurzonej całkowicie (częściowo) w płynie,

|       |                                                                                         |
|-------|-----------------------------------------------------------------------------------------|
| $B$   | – wymiar pionowy (poziomy) płyty zanurzonej całkowicie (częściowo) w płynie,            |
| $A_1$ | – wymiar pionowy płyty zanurzonej w płynie, mierzony w części znajdującej się w próżni, |
| $A_2$ | – wymiar pionowy płyty zanurzonej w płynie, mierzony w części znajdującej się w cieczy, |
| $H$   | – grubość płyty.                                                                        |

### Podrozdział 6.1

|                                                                      |                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\rho_c$                                                             | – gęstość cieczy otaczającej układ płyt,                                                                                                                                                    |
| $c_i \times d_i$                                                     | – wymiary siatki podobszarów cieczy dyskretyzującej $i$ -tą płytę układu zanurzonego całkowicie w płynie ( $i = 1, 2$ ),                                                                    |
| $A_i \times B_i \times H_i$                                          | – wymiary geometryczne $i$ -tej płyty układu zanurzonego całkowicie w płynie ( $i = 1, 2$ ),                                                                                                |
| $h_i \times k_i$                                                     | – wymiary podobszarów cieczy dyskretyzujących $i$ -tą płytę układu zanurzonego całkowicie w płynie ( $i = 1, 2$ ),                                                                          |
| $l_1$                                                                | – odległość między płytami stanowiącymi układ zanurzony całkowicie w cieczy ( $l_1 < 0$ , jeśli rzuty płyt nachodzą na siebie),                                                             |
| $l_2$                                                                | – przesunięcie dolnej krawędzi płyty prawej względem dolnej krawędzi płyty lewej w układzie dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie,                                                     |
| $l_3$                                                                | – odległość między płaszczyznami pokrywającymi się z powierzchniami środkowymi płyt stanowiących układ zanurzony całkowicie w płynie,                                                       |
| $\mathbf{M}_{u,c}$                                                   | – macierz bezwładności cieczy otaczającej układ dwóch płyt,                                                                                                                                 |
| $\mathbf{S}_u$                                                       | – macierz diagonalna zawierająca pola podobszarów cieczy dla kolejnych płyt stanowiących układ zanurzony całkowicie w płynie,                                                               |
| $\mathbf{S}_i$                                                       | – macierze zawierające wartości pól powierzchni podobszarów cieczy $i$ -tej płyty w układzie zanurzonym całkowicie w płynie ( $i = 1, 2$ ),                                                 |
| $\mathbf{H}_u$                                                       | – macierz kwadratowa o wymiarze $(c_1 d_1 + c_2 d_2) \times (c_1 d_1 + c_2 d_2)$ wyznaczana w celu otrzymania macierzy bezwładności cieczy $\mathbf{M}_{u,c}$ ,                             |
| $\mathbf{H}_{11}, \mathbf{H}_{12}, \mathbf{H}_{21}, \mathbf{H}_{22}$ | – podmacierze o wymiarach odpowiednio: $c_1 d_1 \times c_1 d_1$ , $c_1 d_1 \times c_2 d_2$ , $c_2 d_2 \times c_1 d_1$ , $c_2 d_2 \times c_2 d_2$ składające się na macierz $\mathbf{H}_u$ , |

|                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|--------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{W}_i$                       | – macierz zawierająca w kolejnych kolumnach współrzędne punktów narożnych podobszarów cieczy $i$ -tej płyty ( $i = 1, 2$ ) układu zanurzonego całkowicie w płynie w globalnym układzie współrzędnych przyjętym w lewym dolnym narożu wysuniętej najbardziej na lewo płyty,                                                                                                                                                                                           |
| $\mathbf{S}\mathbf{r}_i$             | – macierz zawierająca w kolejnych kolumnach współrzędne punktów kolokacji podobszarów cieczy $i$ -tej płyty ( $i = 1, 2$ ) układu zanurzonego całkowicie w płynie w globalnym układzie współrzędnych określonym jak wyżej,                                                                                                                                                                                                                                           |
| $\mathbf{t}_i$                       | – macierz powiązań o wymiarze $4 \times c_i d_i$ dla podobszarów cieczy, zawierająca w kolejnych kolumnach numery węzłów narożnych podobszarów cieczy dla $i$ -tej płyty układu zanurzonego całkowicie w płynie,                                                                                                                                                                                                                                                     |
| $x_{p,i}, x_{k,i}, y_{p,i}, y_{k,i}$ | – współrzędne punktów narożnych podobszaru cieczy o numerze $n$ lub $n'$ , gdzie $n = 1, 2, 3, \dots, c_1 d_1$ oraz $n' = 1, 2, 3, \dots, c_2 d_2$ , względem lokalnego układu współrzędnych o początku w środku podobszaru cieczy o numerze $m$ lub $m'$ , gdzie $m = 1, 2, 3, \dots, c_1 d_1$ oraz $m' = 1, 2, 3, \dots, c_2 d_2$ , użyte w celu wyznaczenia elementów podmacierzy $\mathbf{H}_{ij}$ składających się na macierz $\mathbf{H}_u$ ( $i, j = 1, 2$ ). |

## Podrozdział 6.2

|                    |                                                                                                                                    |
|--------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{K}_u$     | – macierz sztywności układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie,                                                            |
| $\mathbf{K}_i$     | – macierz sztywności $i$ -tej płyty ( $i = 1, 2$ ) układu otoczonego całkowicie płynem,                                            |
| $\mathbf{M}_u$     | – macierz bezwładności układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie,                                                          |
| $\mathbf{M}_{u,p}$ | – macierz bezwładności układu dwóch płyt znajdujących się w próżni, mająca wymiar $3(w_{e1} + w_{e2}) \times 3(w_{e1} + w_{e2})$ , |
| $\mathbf{M}_{u,c}$ | – macierz bezwładności cieczy otaczającej układ dwóch płyt,                                                                        |
| $\mathbf{M}_i$     | – macierz bezwładności $i$ -tej płyty ( $i = 1, 2$ ) układu zanurzonego całkowicie w płynie,                                       |
| $w_{ei}$           | – liczba węzłów siatki MES dyskretyzującej $i$ -tą płytę ( $i = 1, 2$ ) układu otoczonego całkowicie płynem,                       |

- $\mathbf{M}_{11}, \mathbf{M}_{12}, \mathbf{M}_{21}, \mathbf{M}_{22}$  – podmacierze o wymiarach odpowiednio:  $c_1 d_1 \times c_1 d_1$ ,  $c_1 d_1 \times c_2 d_2$ ,  $c_2 d_2 \times c_1 d_1$ ,  $c_2 d_2 \times c_2 d_2$  składające się na macierz  $\mathbf{M}_{u,c}$ .

### Podrozdział 6.3

- $\Delta_u$  – macierz operatorów różnicowych wyznaczona dla układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie,
- $\Delta_i$  – macierz operatorów różnicowych wyznaczona dla  $i$ -tej płyty ( $i = 1, 2$ ) układu otoczonego całkowicie płynem,
- $\mathbf{M}_u$  – macierz bezwładności układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie,
- $\mathbf{M}_{u,p}$  – macierz bezwładności układu dwóch płyt znajdujących się w próżni, mająca wymiar  $3(w_{e1} + w_{e2}) \times 3(w_{e1} + w_{e2})$ ,
- $\mathbf{M}_{u,c}$  – macierz bezwładności cieczy otaczającej układ dwóch płyt,
- $\mathbf{M}_i$  – macierz bezwładności  $i$ -tej płyty ( $i = 1, 2$ ) układu zanurzonego całkowicie w płynie,
- $m_i \times n_i$  – wymiary siatki MRS dyskretyzującej  $i$ -tą płytę układu zanurzonego całkowicie w płynie ( $i = 1, 2$ ),
- $c_i \times d_i$  – wymiary siatki podobszarów cieczy dyskretyzującej  $i$ -tą płytę układu zanurzonego całkowicie w płynie ( $i = 1, 2$ ),
- $h_i \times k_i$  – wymiary podobszarów cieczy zdefiniowanych dla  $i$ -tej płyty układu zanurzonego całkowicie w płynie ( $i = 1, 2$ ).

### Podrozdział 7.1

- $m$  – liczba elementów Maxwella wchodzących w skład tłumika lepkosprężystego opisanego uogólnionym modelem reologicznym,
- $k_j$  – parametr sztywności  $j$ -tego elementu (Maxwella lub Kelvina) tłumika lepkosprężystego, gdzie  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ,
- $c_j$  – parametr tłumienia  $j$ -tego elementu (Maxwella lub Kelvina) tłumika lepkosprężystego, gdzie  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ,
- $\alpha$  – parametr przyjmujący wartości z przedziału  $(0, 1]$ , charakteryzujący ułamkowy element Kelvina lub ułamkowy element Maxwella wchodzący w skład tłumika lepkosprężystego opisanego modelem ułamkowym,

---

|                                          |                                                                                                                                                                                       |
|------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $k_d$                                    | – parametr sztywności ułamkowego elementu Maxwella,                                                                                                                                   |
| $c_d$                                    | – parametr tłumienia ułamkowego elementu Maxwella,                                                                                                                                    |
| $u(t)$                                   | – całkowita siła panująca w tłumiku lepkosprężystym, będąca funkcją czasu $t$ ,                                                                                                       |
| $u_j(t)$                                 | – siła w $j$ -tym elemencie wchodzącym w skład tłumika lepkosprężystego, gdzie $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ,                                                                              |
| $u_d(t)$                                 | – siła w ułamkowym elemencie Maxwella wchodzącym w skład tłumika lepkosprężystego opisanego modelem ułamkowym,                                                                        |
| $\nu_j$                                  | – iloraz współczynnika sztywności $k_j$ i współczynnika tłumienia $c_j$ dla $j$ -tego elementu Maxwella wchodzącego w skład tłumika lepkosprężystego, gdzie $j = 1, 2, 3, \dots, m$ , |
| $\nu_d$                                  | – iloraz współczynnika sztywności $k_d$ i współczynnika tłumienia $c_d$ dla ułamkowego elementu Maxwella wchodzącego w skład tłumika lepkosprężystego opisanego modelem ułamkowym,    |
| $\Delta q(t)$                            | – względne przemieszczenie tłumika równe różnicy przemieszczeń jego końców,                                                                                                           |
| $D_t^\alpha(\cdot)$                      | – pochodna ułamkowa rzędu $\alpha$ względem czasu $t$ z wyrażenia będącego funkcją czasu,                                                                                             |
| $\bar{u}_j(s), \bar{u}_d(s), \bar{u}(s)$ | – przekształcenie Laplace’a funkcji odpowiednio: $u_j(t)$ , $u_d(t)$ oraz $u(t)$ ,                                                                                                    |
| $\Delta \bar{q}(s)$                      | – przekształcenie Laplace’a funkcji $\Delta q(t)$ ,                                                                                                                                   |
| $K_r, C_r(s), G_r(s)$                    | – oznaczenia pomocnicze użyte w celu opisania $\mathcal{L}$ -transformaty całkowitej siły występującej w tłumiku lepkosprężystym.                                                     |

## Podrozdział 7.2

|             |                                                                                                                                                                        |
|-------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $T_0$       | – temperatura referencyjna, w której ustalono parametry tłumika lepkosprężystego,                                                                                      |
| $\bar{k}_j$ | – parametr sztywności $j$ -tego elementu (Maxwella lub Kelvina) tłumika lepkosprężystego ustalony w temperaturze referencyjnej $T_0$ , gdzie $j = 0, 1, 2, \dots, m$ , |
| $\bar{c}_j$ | – parametr tłumienia $j$ -tego elementu (Maxwella lub Kelvina) tłumika lepkosprężystego ustalony w temperaturze referencyjnej $T_0$ , gdzie $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ,  |

|                |                                                                                                                                                                                           |
|----------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $k_j$          | – parametr sztywności $j$ -tego elementu (Maxwella lub Kelvina) tłumika lepkosprężystego ustalony w temperaturze $T$ różnej od temperatury referencyjnej, gdzie $j = 0, 1, 2, \dots, m$ , |
| $c_j$          | – parametr tłumienia $j$ -tego elementu (Maxwella lub Kelvina) tłumika lepkosprężystego ustalony w temperaturze $T$ różnej od temperatury referencyjnej, gdzie $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ,  |
| $\lambda$      | – częstość wymuszonych drgań harmonicznym wykonywanych przez tłumik lepkosprężysty,                                                                                                       |
| $\Delta Q$     | – amplituda względnego przemieszczenia tłumika $\Delta q(t)$ ,                                                                                                                            |
| $U, U_j$       | – amplituda odpowiednio całkowitej siły w tłumiku oraz siły w $j$ -tym elemencie tłumika, gdzie $j = 0, 1, 2, \dots, m$ ,                                                                 |
| $i$            | – jednostka urojona,                                                                                                                                                                      |
| $K'(\lambda)$  | – moduł sztywności dynamicznej (moduł zachowawczy),                                                                                                                                       |
| $K''(\lambda)$ | – moduł tłumienia (moduł stratności),                                                                                                                                                     |
| $K^*(\lambda)$ | – moduł zespolony,                                                                                                                                                                        |
| $\alpha_T$     | – funkcja przesunięcia,                                                                                                                                                                   |
| $C_1, C_2$     | – stałe wyznaczone doświadczalnie w celu określenia postaci funkcji przesunięcia $\alpha_T$ .                                                                                             |

### Podrozdział 7.3

|                                              |                                                                                                          |
|----------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{M}$                                 | – globalna macierz bezwładności płyty,                                                                   |
| $\mathbf{C}$                                 | – macierz tłumienia konstrukcyjnego płyty,                                                               |
| $\mathbf{K}$                                 | – globalna macierz sztywności płyty,                                                                     |
| $\mathbf{q}(t)$                              | – wektor przemieszczeń uogólnionych węzłów płyty,                                                        |
| $\mathbf{f}(t)$                              | – wektor obciążenia wynikający z oddziaływania tłumików na płytę,                                        |
| $n_d$                                        | – liczba tłumików przymocowanych do płyty,                                                               |
| $\mathbf{f}_r(t)$                            | – wektor oddziaływania $r$ -tego tłumika na płytę, gdzie $r = 1, 2, 3, \dots, n_d$ ,                     |
| $\bar{\mathbf{q}}(s)$                        | – przekształcenie Laplace’a funkcji $\mathbf{q}(t)$ ,                                                    |
| $\bar{\mathbf{f}}(s), \bar{\mathbf{f}}_r(s)$ | – przekształcenie Laplace’a funkcji odpowiednio $\mathbf{f}(t)$ oraz $\mathbf{f}_r(t)$ ,                 |
| $n_s$                                        | – liczba stopni swobody płyty,                                                                           |
| $\mathbf{L}_r$                               | – macierz lokalizacji $r$ -tego tłumika, gdzie $r = 1, 2, 3, \dots, n_d$ ,                               |
| $\mathbf{L}$                                 | – macierz lokalizacji układu $n_d$ tłumików zamocowanych do płyty,                                       |
| $\omega_i$                                   | – $i$ -ta częstość drgań własnych, gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,                                     |
| $\gamma_i$                                   | – bezwymiarowy współczynnik tłumienia $i$ -tej postaci drgań własnych, gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ . |

### Podrozdział 7.3.1

- $\kappa$  – parametr homotopii przyjmujący wartości z przedziału  $[0, 1]$ , stosowany w metodzie kontynuacji,
- $\mathbf{h}_1(\bar{\mathbf{q}}(s), s)$  – skrótowe oznaczenie nieliniowego problemu własnego opisującego równanie ruchu płyty wyposażonej w podpory lepkosprężyste,
- $h_2(\bar{\mathbf{q}}(s), s)$  – równanie normalizujące, wykorzystywane w metodzie kontynuacji,
- $s_i^{(k)}, \bar{\mathbf{q}}_i^{(k)}$  –  $k$ -te przybliżenie  $i$ -tej wartości własnej oraz  $i$ -tego wektora własnego, gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,
- $\delta s^{(k)}, \delta \bar{\mathbf{q}}^{(k)}$  –  $k$ -ty przyrost wartości własnej oraz wektora własnego służący do wyznaczenia  $k$ -tego przybliżenia  $i$ -tej wartości własnej oraz  $i$ -tego wektora własnego w nieliniowym problemie własnym,
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  – dokładności obliczeń wartości własnej i wektora własnego w metodzie kontynuacji,
- $\mu_i, \eta_i$  – odpowiednio część rzeczywista i część urojona  $i$ -tej częstości drgań własnych  $\omega_i$ .

### Podrozdział 7.3.2

- $\mathbf{X}$  – macierz kwadratowa o wymiarze  $n_s \times n_s$  zawierająca w kolejnych kolumnach wektory własne:  $\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, \bar{\mathbf{q}}_3, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{n_s}$  stanowiące rozwiązanie pełnego nieliniowego problemu własnego,
- $\Gamma$  – macierz diagonalna o wymiarze  $n_s \times n_s$  zawierająca na głównej przekątnej kolejne wartości własne:  $s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n_s}$  stanowiące rozwiązanie pełnego nieliniowego problemu własnego,
- $\tilde{m}$  – wymiar zredukowanego nieliniowego problemu własnego, przy czym  $\tilde{m} \ll n_s$ ,
- $\mathbf{X}_j$  – macierz o wymiarze  $n_s \times \tilde{m}$  zawierająca w kolejnych kolumnach wektory własne:  $\bar{\mathbf{q}}_1^{(j)}, \bar{\mathbf{q}}_2^{(j)}, \bar{\mathbf{q}}_3^{(j)}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{\tilde{m}}^{(j)}$  stanowiące  $j$ -te przybliżenie rozwiązania zredukowanego nieliniowego problemu własnego,
- $\Gamma_j$  – macierz diagonalna o wymiarze  $\tilde{m} \times \tilde{m}$  zawierająca na głównej przekątnej kolejne wartości własne:  $s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, s_3^{(j)}, \dots, s_{\tilde{m}}^{(j)}$  stanowiące  $j$ -te przybliżenie rozwiązania zredukowanego nieliniowego problemu własnego,
- $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  – dokładności obliczeń wartości własnej i wektora własnego w metodzie podprzestrzennych iteracji.

**Podrozdział 8.1**

|                                                      |                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $n_d$                                                | – liczba tłumików zamocowanych do powierzchni płyty,                                                                                                                                                                                                                                                 |
| $n_p$                                                | – liczba cząstek wchodzących w skład roju utworzonego zgodnie z metodą PSO,                                                                                                                                                                                                                          |
| $n_s$                                                | – liczba otoczeń, tzn. liczba niezależnych zbiorów $n_p$ potencjalnych położeń $n_d$ tłumików,                                                                                                                                                                                                       |
| $\mathbf{X}_i, \mathbf{V}_i$                         | – odpowiednio wektor położenia oraz wektor prędkości $i$ -tej cząstki roju, czyli zbioru $n_d$ tłumików lepkosprężystych,                                                                                                                                                                            |
| $m \times n$                                         | – wymiary siatki MES dyskretyzującej płytę,                                                                                                                                                                                                                                                          |
| $h \times k$                                         | – wymiary podobszarów prostokątnych składających się na regularną siatkę MES,                                                                                                                                                                                                                        |
| „ $\mathbf{XX}$ ”                                    | – macierz pomocnicza do algorytmu PSO, tworzona w środowisku Octave, zawierająca w kolejnych wierszach odpowiednio numerację oraz współrzędne węzłów wewnętrznych siatki MES,                                                                                                                        |
| $\{\mathbf{Ot}\}_l$                                  | – ciąg tzw. macierzy otoczeniowych mających wymiar $3n_d \times n_p$ , gdzie $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ oraz każda z macierzy zawiera w kolejnych kolumnach numery węzłów siatki MES i ich współrzędne $x$ oraz $y$ odpowiadające położeniom $n_d$ tłumików składających się na kolejne cząstki roju, |
| $\{\mathbf{Vt}\}_l$                                  | – ciąg macierzy mających wymiar $3n_d \times n_p$ , przy czym $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ oraz każda z macierzy zawiera w kolejnych kolumnach numery węzłów siatki MES oraz współrzędne $v_x$ oraz $v_y$ odpowiadające prędkościom $n_d$ tłumików składających się na kolejne cząstki roju,            |
| $\mathbf{X}_i^{(t+1)}$                               | – położenie $i$ -tej cząstki roju w $(t + 1)$ -szym kroku czasowym,                                                                                                                                                                                                                                  |
| $\mathbf{V}_i^{(t+1)}$                               | – prędkość $i$ -tej cząstki roju w $(t + 1)$ -szym kroku czasowym,                                                                                                                                                                                                                                   |
| $\mathbf{L}_{1,i}^{(t+1)}, \mathbf{L}_{2,i}^{(t+1)}$ | – macierze diagonalne o wymiarze $2n_d \times 2n_d$ zawierające na przekątnej głównej liczby losowe z przedziału $[0, 1]$ ,                                                                                                                                                                          |
| $c_1, c_2$                                           | – współczynniki uczenia (kognitywny i socjalny) wykorzystywane w metodzie PSO,                                                                                                                                                                                                                       |
| $w$                                                  | – waga inercji (miara bezwładności) ruchu cząstki roju w metodzie PSO,                                                                                                                                                                                                                               |
| $\mathbf{p}_i^{(t)}$                                 | – najlepsze położenie $i$ -tej cząstki roju spośród chwil czasowych: $0, 1, 2, \dots, t$ , gdzie $i = 1, 2, 3, \dots, n_p$ ,                                                                                                                                                                         |
| $\mathbf{p}_g^{(t)}$                                 | – najlepsza globalna pozycja zbioru $n_d$ tłumików w zakresie całego roju w rozpatrywanym otoczeniu, wybrana spośród chwil czasowych: $0, 1, 2, \dots, t$ ,                                                                                                                                          |

|                              |                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\mathbf{M}$                 | – globalna macierz bezwładności płyty,                                                                                                                                            |
| $\mathbf{K}$                 | – globalna macierz sztywności płyty,                                                                                                                                              |
| $\mathbf{C}$                 | – globalna macierz tłumienia konstrukcyjnego płyty,                                                                                                                               |
| $\gamma_i$                   | – bezwymiarowy współczynnik tłumienia $i$ -tej postaci drgań,                                                                                                                     |
| $\omega_i$                   | – $i$ -ta częstość drgań własnych płyty,                                                                                                                                          |
| $k_0, c_0, k_j, c_j, \alpha$ | – parametry tłumików lepkosprężystych objaśnione w oznaczeniach do podrozdziału 7.1,                                                                                              |
| $\Delta t$                   | – przyrost czasowy w algorytmie PSO,                                                                                                                                              |
| $n_{iter}$                   | – maksymalna przyjęta liczba iteracji w algorytmie PSO,                                                                                                                           |
| $\{\mathbf{Gt}\}_l$          | – ciąg wektorów stanowiących kolumny z macierzy $\{\mathbf{Ot}\}_l$ odpowiadające największym wartościom funkcji celu dla kolejnych otoczeń o numerze $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ , |
| $\{\mathbf{Pt}^{(t)}\}_l$    | – ciąg macierzy zawierających w kolejnych kolumnach najlepsze położenia poszczególnych cząstek roju w każdym z otoczeń o numerze $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ w kroku czasowym $t$ . |

### Podrozdział 9.1

|                                |                                                                                                                                                                                                                                    |
|--------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $p$                            | – liczba parametrów projektowych, od których zależą obliczane charakterystyki dynamiczne układu,                                                                                                                                   |
| $v_j$                          | – $j$ -ty parametr projektowy, gdzie $j = 1, 2, 3, \dots, p$ ,                                                                                                                                                                     |
| $g_{v_j}(x)$                   | – gęstość normalnego rozkładu prawdopodobieństwa $j$ -tego parametru projektowego $v_j$ będącego zmienną losową,                                                                                                                   |
| $\mu$                          | – wartość średnia charakteryzująca rozkład normalny $g_{v_j}(x)$ ,                                                                                                                                                                 |
| $\sigma$                       | – odchylenie standardowe charakteryzujące rozkład normalny $g_{v_j}(x)$ ,                                                                                                                                                          |
| $\alpha$                       | – współczynnik zmienności (wariancji) zmiennej losowej będący ilorazem jej odchylenia standardowego i wartości średniej,                                                                                                           |
| $N$                            | – liczba elementów zbioru wartości, które może przyjmować rozpatrywany (zmienny losowo) parametr projektowy albo liczba wygenerowanych losowo wartości parametru projektowego zgodnie z rozkładem normalnym o znanych parametrach, |
| $\Gamma_j$                     | – zbiór wartości przyjmowanych przez $j$ -ty parametr projektowy będący zmienną losową,                                                                                                                                            |
| $\omega_{i,j} = \omega_i(v_j)$ | – wielomianowa zależność funkcyjna między $i$ -tą częstością drgań własnych i $j$ -tym parametrem projektowym,                                                                                                                     |
| $n$                            | – założony stopień wielomianu $\omega_i(v_j)$ ,                                                                                                                                                                                    |

---

|                                     |                                                                                                                                                                              |
|-------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $C_{i,k}$                           | – współczynniki wielomianu $\omega_i(v_j)$ aproksymującego zależność $i$ -tej częstości drgań własnych od parametru projektowego $v_j$ , przy czym $k = 0, 1, 2, \dots, n$ , |
| $A \times B \times H$               | – wymiary płyty, odpowiednio: długość, szerokość i grubość,                                                                                                                  |
| $c$                                 | – odległość między dwiema płytami stanowiącymi układ zanurzony całkowicie w płynie,                                                                                          |
| $E$                                 | – moduł Younga materiału płyty,                                                                                                                                              |
| $\nu_p$                             | – współczynnik Poissona materiału płyty,                                                                                                                                     |
| $\rho_p$                            | – gęstość materiału płyty,                                                                                                                                                   |
| $\rho_c$                            | – gęstość cieczy otaczającej płytę,                                                                                                                                          |
| $k_0$                               | – stała elementu sprężystego w tłumiku lepkośćprężystym,                                                                                                                     |
| $k_d, c_d, \alpha_d$                | – stałe charakteryzujące ułamkowy element Maxwella w tłumiku lepkośćprężystym,                                                                                               |
| $T_0$                               | – temperatura referencyjna, w której ustalono parametry tłumika lepkośćprężystego,                                                                                           |
| $T$                                 | – temperatura otoczenia płyty,                                                                                                                                               |
| $\mathbf{v}_1$                      | – wektor zawierający zmienne projektowe płyty wyposażonej w lepkośćprężyste tłumiki drgań,                                                                                   |
| $\mathbf{v}_2$                      | – wektor zawierający zmienne projektowe układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie,                                                                                   |
| $\frac{\Delta\omega_i}{\Delta v_j}$ | – znormalizowany gradient wrażliwości $i$ -tej częstości drgań własnych na losowe zmiany parametru projektowego $v_j$ ,                                                      |
| $\bar{v}_j$                         | – wartość średnia parametru projektowego $v_j$ ,                                                                                                                             |
| $\bar{\omega}_i$                    | – średnia wartość $i$ -tej częstości drgań własnych, tj. odpowiadająca średniej wartości parametru projektowego $\bar{v}_j$ ,                                                |
| $\mathbb{E}(\omega_i)$              | – wartość oczekiwana $i$ -tej częstości drgań własnych zależnej od losowo zmiennego parametru projektowego $v_j$ ,                                                           |
| $\sigma^2(\omega_i)$                | – wariancja $i$ -tej częstości drgań własnych zależnej od losowo zmiennego parametru projektowego $v_j$ ,                                                                    |
| $\alpha(\omega_i)$                  | – współczynnik zmienności $i$ -tej częstości drgań własnych zależnej od losowo zmiennego parametru projektowego $v_j$ ,                                                      |
| $\mu_m(\omega_i)$                   | – $m$ -ty moment centralny $i$ -tej częstości drgań własnych zależnej od losowo zmiennego parametru projektowego $v_j$ ,                                                     |
| $\beta(\omega_i)$                   | – skośność $i$ -tej częstości drgań własnych zależnej od losowo zmiennego parametru projektowego $v_j$ ,                                                                     |
| $\kappa(\omega_i)$                  | – kurtoza $i$ -tej częstości drgań własnych zależnej od losowo zmiennego parametru projektowego $v_j$ ,                                                                      |
| $\beta_{FORM}$                      | – miara niezawodności pierwszego rzędu $i$ -tej częstości drgań własnych $\omega_i$ ,                                                                                        |

---

|               |                                                                                                     |
|---------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $H(\omega_i)$ | – entropia względna $i$ -tej częstości drgań własnych obliczana na podstawie teorii Bhattacharyya,  |
| $\beta_H$     | – miara bezpieczeństwa $i$ -tej częstości drgań własnych wyznaczana przy pomocy entropii względnej. |

### Podrozdział 10.1

|                                          |                                                                                                                                                                                        |
|------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $N_x, N_y$                               | – obciążenie ściskające lub rozciągające płytę, działające w jej płaszczyźnie wzdłuż kierunku osi odpowiednio $x$ oraz $y$ ,                                                           |
| $N_{xy}$                                 | – obciążenie działające w płaszczyźnie płyty, stycznie do jej krawędzi,                                                                                                                |
| $A, B$                                   | – długości boków płyty prostokątnej,                                                                                                                                                   |
| $D = D(x, y)$                            | – funkcja sztywności płyty,                                                                                                                                                            |
| $w = w(x, y)$                            | – funkcja ugięcia płyty,                                                                                                                                                               |
| $\bar{p}(x, y)$                          | – funkcja obciążenia płyty rozważana w analizie jej stateczności,                                                                                                                      |
| $N_x^*, N_y^*, N_{xy}^*$                 | – obciążenie porównawcze (referencyjne) rozważane w analizie stateczności płyty, działające w jej płaszczyźnie odpowiednio wzdłuż kierunku osi $x$ , osi $y$ lub stycznie do krawędzi, |
| $\alpha$                                 | – iloraz obciążenia $N_y$ przez obciążenie $N_x$ , przy czym $\alpha > 0$ ,                                                                                                            |
| $\beta$                                  | – iloraz obciążenia $N_{xy}$ przez obciążenie $N_x$ , przy czym $\beta > 0$ ,                                                                                                          |
| $\lambda_x$                              | – dodatni parametr wskazujący, ile razy obciążenie krytyczne $N_x$ płyty jest większe od obciążenia porównawczego $N_x^*$ ,                                                            |
| $m \times n$                             | – wymiary regularnej siatki MRS pokrywającej powierzchnię środkową płyty prostokątnej w analizie jej stateczności,                                                                     |
| $h \times k$                             | – wymiary podobszarów prostokątnych składających się na regularną siatkę MRS,                                                                                                          |
| $(x_i, y_j)$                             | – współrzędne pojedynczego węzła siatki MRS, przy czym $i = 1, 2, 3, \dots, m + 1$ oraz $j = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ ,                                                                  |
| $w_{ij}$                                 | – przybliżona wartość przemieszczenia punktu płyty o współrzędnych $(x_i, y_j)$ ,                                                                                                      |
| $w_{i\pm 1, j\pm 1}$                     | – przybliżona wartość przemieszczenia punktu płyty o współrzędnych $(x_i \pm h, y_j \pm k)$ ,                                                                                          |
| $\bar{p}_{ij}$                           | – przybliżona wartość funkcji obciążenia płyty $\bar{p}(x, y)$ w punkcie o współrzędnych $(x_i, y_j)$ ,                                                                                |
| $\Delta$                                 | – macierz operatorów różnicowych,                                                                                                                                                      |
| $\mathbf{w}$                             | – wektor niewiadomych przemieszczeń węzłów siatki MRS,                                                                                                                                 |
| $\bar{\mathbf{p}} = -\lambda_x \Delta_G$ | – wektor obciążenia płyty w poszczególnych węzłach siatki MRS wyznaczany w analizie jej stateczności,                                                                                  |

---

|                                                   |                                                                                                                    |
|---------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\Delta_G^{(x)}, \Delta_G^{(xy)}, \Delta_G^{(y)}$ | – macierze blokowe takie, że $\Delta_G^{(x)} + \Delta_G^{(xy)} + \Delta_G^{(y)} = \Delta_G$ ,                      |
| <b>A, B, C, D, E</b>                              | – macierze-bloki wchodzące w skład wyżej określonych macierzy: $\Delta_G^{(x)}, \Delta_G^{(xy)}, \Delta_G^{(y)}$ . |

## Podrozdział 10.2

|                    |                                                                                                                         |
|--------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $l_x, l_y$         | – długości boków płyty prostokątnej mierzone wzdłuż osi odpowiednio $x$ oraz $y$ ,                                      |
| $H_1, H_2$         | – odpowiednio maksymalna oraz minimalna grubość płyty o liniowo zmiennej sztywności,                                    |
| $H$                | – stała grubość płyty,                                                                                                  |
| $\tilde{N}_{cr}$   | – obciążenie krytyczne płyty wyrażone w notacji bezwymiarowej,                                                          |
| $E$                | – moduł Younga materiału płyty,                                                                                         |
| $\nu$              | – współczynnik Poissona materiału płyty,                                                                                |
| $N_x, N_y, N_{xy}$ | – obciążenie płyty działające w jej płaszczyźnie, odpowiednio wzdłuż kierunków osi $x$ i $y$ oraz stycznie do krawędzi, |
| $m \times n$       | – wymiary regularnej siatki MRS pokrywającej powierzchnię środkową płyty prostokątnej w analizie jej stateczności,      |
| $h \times k$       | – wymiary podobozarów prostokątnych składających się na regularną siatkę MRS.                                           |

## Podrozdział 11.1

|                                 |                                                                                                                                                                                              |
|---------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $\gamma_1$                      | – bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań,                                                                                                                               |
| $H$                             | – grubość płyty (stała lub liniowo zmienna)                                                                                                                                                  |
| $H_1, H_2$                      | – odpowiednio maksymalna oraz minimalna grubość płyty o liniowo zmiennej grubości $H$ , tzn. $H_2 \leq H \leq H_1$ ,                                                                         |
| $\omega_1^{(1)}/\omega_1^{(2)}$ | – iloraz pierwszych częstości drgań własnych wyznaczonych dla płyty o liniowo zmiennej grubości ( $H_2 \leq H \leq H_1$ ) oraz dla odpowiadającej jej płyty o stałej grubości ( $H = H_2$ ), |
| $N_{cr,1}/N_{cr,2}$             | – iloraz pierwszych obciążeń krytycznych wyznaczonych dla płyty o liniowo zmiennej grubości ( $H_2 \leq H \leq H_1$ ) oraz dla odpowiadającej jej płyty o stałej grubości ( $H = H_2$ ).     |



# Wprowadzenie do podjętej tematyki badań

Tematem niniejszej dysertacji doktorskiej jest analiza płytowych dźwigarów powierzchniowych stanowiących ważny element konstrukcji budowlanych i inżynierskich. Rozprawa obejmuje zagadnienia z zakresu statyki, dynamiki i stateczności płyt cienkich, dla których przyjmuje się grubość nie przekraczającą 0,1 długości krótszego boku. Rozpatrywane dźwigary powierzchniowe mogą być w ogólności wykonane z materiałów anizotropowych tj. takich, które wykazują różne właściwości zależnie od kierunku obserwacji. Ponadto w niniejszej pracy uwzględniono przypadek umieszczenia badanych elementów konstrukcyjnych w różnych ośrodkach zewnętrznych, np. w cieczy. Rozpatrzono również sytuację wyposażenia płyt w dodatkowe elementy służące pasywnej redukcji drgań, do których należą tłumiki (więzy) lepko-sprężyste.

Motywację do podjęcia badań nad niniejszym tematem stanowi chęć opracowania autorskich procedur obliczeniowych usprawniających projektowanie nietypowych dźwigarów powierzchniowych, np. wykonanych z materiałów anizotropowych lub wyposażonych w elementy tłumiące drgania. Procedury te mogą służyć efektywnej analizie statyki, dynamiki i stateczności prostokątnych dźwigarów płytowych. Opracowane algorytmy umożliwiają ponadto wybór różnych wariantów numerycznych metod obliczeniowych w celu ustalenia metody optymalnej dla rozpatrywanego przypadku.

Ważną kwestią w projektowaniu elementów płytowych jest optymalne zabezpieczenie ich przed niekorzystnymi skutkami drgań. Zagadnienie to przyjęto jako główną motywację do tego, aby opracować, w ramach niniejszej rozprawy, procedury obliczeniowe pozwalające ustalić optymalną lokalizację elementów tłumiących drgania na powierzchni płyt.

W wielu zagadnieniach inżynierskich związanych z procesem projektowania konstrukcji istotną rolę odgrywają zdarzenia losowe. Wartości parametrów projektowych, mających wpływ na końcowy dobór elementów konstrukcyjnych, często zmieniają się w sposób losowy. Tą problematykę uznano jako motywację do tego, aby na zakończenie rozważań nad zjawiskami dynamicznymi w płytach przeprowadzić dodatkowe badania z zastosowaniem numerycznego aparatu probabilistycznego przy rozwiązywaniu nieliniowych problemów własnych.

Podsumowując powyższe rozważania, można stwierdzić, że teoria dźwigarów powierzchniowych jest zagadnieniem na etapie ciągłego rozwoju, wymagającym wprowadzania uzupełnień oraz procedur obliczeniowych usprawniających ich skuteczną analizę.

Niniejsza praca składa się z jedenastu rozdziałów. W rozdziale pierwszym omówiono aktualny stan wiedzy związanej z tematyką pracy. Dokonano przeglądu najważniejszych pozycji literaturowych z zakresu teorii dźwigarów powierzchniowych oraz analizy dynamiki i stateczności elementów konstrukcyjnych. Przedstawiono również prace naukowe obejmujące zagadnienia dynamiczne w wybranych typach konstrukcji budowlanych z uwzględnieniem obecności ośrodka zewnętrznego oraz elementów pasywnej redukcji drgań. Zestawiono też wiedzę dotyczącą zastosowania metod probabilistycznych w mechanice konstrukcji.

W rozdziale drugim sformułowano pytania składające się na główny problem badawczy oraz postawiono kilka hipotez badawczych. Przedstawiono koncepcję rozwiązania problemu w postaci zadań szczegółowych oraz podano kryteria umożliwiające weryfikację hipotez. Omówiono również istotę nowości poszukiwanego rozwiązania problemu badawczego.

W rozdziale trzecim przedstawiono istotne informacje z zakresu analizy statycznej prostokątnych płyt cienkich. Ta tematyka nie jest wiodącą w niniejszej rozprawie, jednak zawarto ją w celu płynnego przejścia do tematu zasadniczego, jakim jest dynamika płyt. W rozdziale opisano dwie metody numeryczne stosowane w analizie statycznej, do których należą metoda elementów skończonych (MES) oraz metoda różnic skończonych (MRS). Podstawy teoretyczne służące wyznaczaniu przemieszczeń punktów płyty zgodnie z MES są znane i w pracy przedstawiono je skrótowo. Bardziej szczegółowo zaprezentowano wyprowadzenia bazujące na MRS i pozwalające uzyskać układ równań różnicowych, z rozwiązania którego otrzymuje się przemieszczenia punktów należących do dyskretnego zbioru węzłów siatki pokrywającej powierzchnię środkową płyty. Rozdział zakończono przykładami numerycznymi obejmującymi zagadnienia wyznaczania ugięć w płytach o wybranych schematach podparcia i obciążenia przy zastosowaniu MES oraz MRS. Wzięto pod uwagę płyty o stałej i zmiennej grubości.

W rozdziale czwartym rozważono tematykę drgań własnych płyt prostokątnych umieszczonych w próżni. Dynamika płyt stanowi wiodący temat niniejszej rozprawy, stąd też kontynuowano go przez kolejne rozdziały, tj. od piątego do dziewiątego. Rozdział czwarty rozpoczął od przedstawienia istotnych wyprowadzeń, przy użyciu metodologii MES lub MRS, które podano w celu otrzymania odpowiedniego uogólnienia.

nionego problemu własnego. W zaprezentowanych pod koniec rozdziału przykładach numerycznych wyznaczano częstości oraz postacie drgań własnych wybranych płyt o stałej lub zmiennej grubości, biorąc pod uwagę różne schematy ich podparcia.

Rozdział piąty poświęcono zagadnieniu dynamiki cienkich płyt prostokątnych zanurzonych w płynie. Stanowi on kontynuację głównego wątku niniejszej dysertacji. Rozpoczęto go od wprowadzenia teoretycznego, w którym omówiono metodę elementów brzegowych (MEB), biorąc pod uwagę kwestię budowy macierzy bezwładności płynu. Następnie zaprezentowano metodykę wyznaczania charakterystyk dynamicznych płyt zanurzonych całkowicie lub częściowo w płynie. Zastosowano dwie kombinacje metod numerycznych: MES i MEB oraz MRS i MEB. W rozdziale zamieszczono również przykłady numeryczne, w których przeprowadzono analizę drgań własnych wybranych płyt otoczonych płynem, mających stałą lub zmienną grubość.

Rozdział szósty dotyczy analizy dynamicznej układu dwóch prostokątnych płyt cienkich zanurzonych całkowicie w płynie. Na wstępie opisano sposób wyznaczania macierzy bezwładności płynu otaczającego układ dwóch płyt przy zastosowaniu MEB i założeniu, że ich powierzchnie środkowe zawierają się w jednej płaszczyźnie lub w dwóch płaszczyznach równoległych. W dalszej części rozdziału opisano metodykę określania częstości drgań własnych układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie. Podobnie jak w rozdziale piątym, zastosowano dwie kombinacje metod numerycznych: MES–MEB oraz MRS–MEB. Na zakończenie rozdziału zaprezentowano przykłady numeryczne, w których analizowano otoczone płynem układy płyt o stałej lub zmiennej grubości.

W rozdziale siódmym przeprowadzono analizę dynamiczną płyt cienkich wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań. Rozważono drgania własne tłumione płyt spoczywających na podporach (wężach) lepkosprężystych, przy ustalonych warunkach podparcia na krawędziach. Rozdział rozpoczął od opisu modelu tłumika lepkosprężystego, przy czym rozważono dwa modele: uogólniony Maxwella oraz ułamkowy. Następnie opisano zależność od temperatury parametrów tłumika, zgodnie z zasadą proporcjonalności częstotliwościowo-temperaturowej. Przedstawiono także równanie ruchu płyty wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań oraz zaprezentowano wyprowadzenie pozwalające sprowadzić je do nieliniowego problemu własnego przy użyciu transformaty Laplace’a. Podano podstawy teoretyczne dwóch metod numerycznych: kontynuacji i podprzestrzennych iteracji, pozwalających ten problem rozwiązać. Rozdział zakończono przykładami numerycznymi, w których wyznaczano częstości drgań własnych oraz bezwymiarowe współczynniki tłumienia wybranych

plyt wyposażonych w ustaloną liczbę tłumików lepkosprężystych, z uwzględnieniem wpływu temperatury. Do opisu deformacji plyt zastosowano metodę elementów skończonych. W badaniach analizowano wyłącznie płyty o stałej grubości.

Rozdział ósmy stanowi kontynuację tematyki związanej z dynamiką plyt wyposażonych w więzy (tłumiki) lepkosprężyste. Rozważono w nim kwestię optymalnego rozmieszczenia ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni plyty w celu maksymalizacji efektu tłumienia wybranej postaci drgań. Do tak sformułowanego zagadnienia zastosowano metaheurystyczny algorytm optymalizacyjny nazywany metodą roju cząstek (ang. *Particle Swarm Optimization Method*, PSO). Na początku rozdziału przedstawiono teoretyczne podstawy zastosowanej metody optymalizacyjnej. Następnie zaprezentowano przykłady numeryczne, w których przeprowadzono badania mające na celu optymalne rozmieszczenie zadanej liczby tłumików na powierzchni plyt o ustalonych warunkach podparcia na krawędziach. W przykładach przyjęto bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań jako funkcję celu.

Rozdział dziewiąty jest ostatnim z zakresu analizy dynamicznej plyt cienkich. O ile wcześniej badania prowadzono w ujęciu deterministycznym, to w tym rozdziale dokonano przejścia na poziom probabilistyczny, tzn. uwzględniono losowość wybranych parametrów projektowych mających wpływ na wartości kilku początkowych częstości drgań własnych analizowanych układów. Na początku rozdziału przedstawiono teoretyczne podstawy stochastycznej metody elementów skończonych stosowanej w analizie probabilistycznej. Następnie zamieszczono kilka przykładów numerycznych, w których rozważano dynamikę plyt w ujęciu losowym. W przykładach wzięto pod uwagę płyty wyposażone w lepkosprężyste tłumiki drgań oraz układy dwóch plyt zanurzonych całkowicie w płynie.

Rozdział dziesiąty dotyczy analizy stateczności prostokątnych plyt cienkich o stałej lub zmiennej grubości. Tematyka ta nie jest wiodącą w niniejszej rozprawie, jednak stanowi naturalne dopełnienie rozważań z zakresu analizy dynamicznej. Zarówno w analizie drgań własnych, jak i w badaniach stateczności szukane charakterystyki plyt otrzymuje się w wyniku rozwiązania odpowiedniego uogólnionego problemu własnego. Rozdział rozpoczęto od teoretycznych wyprowadzeń prowadzących do sformułowania postaci tego problemu, którego rozwiązanie umożliwia wyznaczenie wartości obciążeń krytycznych oraz postaci utraty stateczności plyt. Aparatem badawczym stosowanym w niniejszym rozdziale była metoda różnic skończonych. Rozdział zakończono przykładami numerycznymi, w których wyznaczano parametry

try stateczności płyt podpartych na obwodzie, przy różnych przypadkach obciążenia działającego w ich płaszczyźnie.

W rozdziale jedenastym zawarto analizę i interpretację wyników badań pod kątem odpowiedzi na pytania badawcze oraz oceny poprawności postawionych hipotez badawczych. Dokonano także podsumowania i zestawiono wnioski końcowe z pracy, dzieląc je na poznawcze, metodyczne, aplikacyjne oraz prognostyczne.

Na zakończenie dysertacji podano zestawienie literatury przydatnej w celu podjęcia studiów nad rozważanym tematem oraz skorowidz wybranych pojęć występujących w rozprawie.



# 1. Analiza stanu wiedzy i omówienie informacji ze źródeł

Klasyczna teoria dźwigarów powierzchniowych, tj. płyt i powłok stosowanych jako elementy konstrukcji budowlanych, w zakresie ich analizy statycznej, jest znana i dostępna w literaturze ogólnej. Podstawowe informacje z tej tematyki zawarto np. w pracach [1]–[3]. Aby ustalić postać deformacji płyty przy zadanym obciążeniu, można zastosować zamieszczone w tych pozycjach wyprowadzenia i wzory analityczne. Dotyczą one jednak tylko typowych schematów obciążenia oraz podparcia płyt i pozwalają wyznaczyć przemieszczenia jedynie w charakterystycznych punktach ich powierzchni. W celu określenia przybliżonej postaci deformacji płyty jako całości, przy niestandardowych warunkach podparcia lub obciążenia, stosuje się znane metody numeryczne. Do najważniejszych należą: metoda elementów skończonych (MES), metoda różnic skończonych (MRS) oraz metoda elementów brzegowych (MEB). W wybranych zadaniach alternatywą może być metoda pasm skończonych (MPS), która łączy technikę MES z podejściem analitycznym. Wiedzę z zakresu teoretycznych podstaw wymienionych metod numerycznych zestawiono w dostępnej literaturze ogólnej. W niniejszej pracy w ramach analizy statycznej utworzono modele obliczeniowe płyt zgodnie z metodologiami MES oraz MRS. Z matematycznymi podstawami MES można zapoznać się, korzystając np. z prac [4]–[6]. Zastosowanie MES w mechanice konstrukcji zostało obszernie opisane w pozycjach [1, 7]. Natomiast podstawy MRS w odniesieniu do analizy konstrukcji przedstawiono w [8]. Alternatywną i skuteczną metodę numeryczną wykorzystywaną w analizie płyt cienkich, obok MES i MRS, stanowi MEB, która jest głównym narzędziem użytym w pracy [9]. Natomiast zadanie statyki płyt cienkich spoczywających na podłożu sprężystym typu Winklera zostało w efektywny sposób rozwiązane za pomocą MPS w pozycji [10].

Wiodącą tematyką niniejszej rozprawy obejmuje zagadnienie analizy dynamicznej prostokątnych płyt cienkich. Dynamika konstrukcji budowlanych stanowi temat wielu badań, a dostępna literatura jest bardzo obszerna. Problematyka drgań własnych i wymuszonych w strukturach prętowych, strunowych, płytowych i powłokowych została szczegółowo opisana w pracy [11]. Autorzy prac [12]–[14] przeprowadzili analizę dynamiczną płyt cienkich o zmiennej grubości przy zastosowa-

niu metody elementów brzegowych oraz tzw. metody równań równoważnych (ang. *the Analog Equation Method*, AEM). W niniejszej pracy analiza tego typu została wykonana przy użyciu aparatu metody różnic skończonych, stosując odpowiednie równanie deformacji płyty, które można wyprowadzić przy wykorzystaniu założeń teorii sprężystości. Odpowiednie wyprowadzenia zawarto w pracach [12]–[14]. Wpływ masy płynnego ośrodka sprężystego (powietrza i wody) na częstości i postacie drgań własnych płyt został zbadany w pracach [15]–[22]. Autorzy pracy [23] przedstawili nieliniowe drgania belek Timoshenki w ujęciu metody elementów skończonych połączonej z metodą różnic skończonych. W pracach [9, 24] zaprezentowano analizę drgań własnych płyt całkowicie lub częściowo zanurzonych w wodzie przy użyciu pełnego podejścia MEB z uwzględnieniem zmodyfikowanego (uproszczonego) sformułowania warunków brzegowych. W niniejszej dysertacji ta tematyka została opisana przy zastosowaniu dwóch kombinacji metod numerycznych, MES–MEB oraz MRS–MEB, przy czym MEB użyto jedynie do budowy macierzy bezwładności płynu otaczającego płytę, a wyniki obliczeń opublikowano w pracach [25, 26]. Problem interakcji konstrukcji i płynu był przedmiotem wielu analiz zawartych np. w [27]–[29]. Został on np. zbadany analitycznie w pracy [21]. Zagadnienie wyznaczania macierzy bezwładności płynu z użyciem teorii potencjału i bezpośredniego podejścia MEB szczegółowo opisano np. w pozycjach [17, 19].

Ważną problematykę omawianą w niniejszej pracy stanowi analiza drgań własnych płyt wyposażonych w elementy pasywnej redukcji drgań, do których należą tłumiki (wieży) lepkosprężyste. Mocowanie do płyt tych elementów ma na celu zmianę charakterystyk dynamicznych powstałych w ten sposób układów, głównie częstości drgań własnych, i tym samym zmniejszenie ich podatności na wpływy dynamiczne. Badanie konstrukcji wyposażonej w tłumiki drgań stanowi przedmiot wielu prac oraz publikacji naukowych. Informacje teoretyczne dotyczące elementów pasywnej redukcji drgań zawarto np. w monografii [30]. W pracy [31] rozważone zostały drgania ram ścinanych z uwzględnieniem wpływu temperatury na parametry tłumików zamocowanych do konstrukcji. Autorzy pracy [32] zbadali zachowanie się materiału lepkosprężystego pod wpływem wzrostu temperatury.

W niniejszej dysertacji rozważono bardziej szczegółowo drgania własne prostokątnych płyt cienkich wyposażonych w ustaloną liczbę tłumików (wieżów) lepkosprężystych zamocowanych jednym końcem do powierzchni płyty oraz drugim końcem do sztywnego podłoża. Wyniki badań opublikowano w pozycji [33]. W prowadzonych w rozprawie analizach przyjęto, że parametry tłumików lepkosprężystych zależą od temperatury zgodnie z zasadą proporcjonalności częstotliwościowo-temperaturowej,

co zostało omówione między innymi w pracach [31, 32, 34, 35]. W przypadku analizy dynamicznej płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań należy wyznaczyć rozwiązanie równania ruchu płyty (równanie chwilowej równowagi dynamicznej), które ma postać nieliniowego problemu własnego. Problem tego typu można rozwiązać np. przy pomocy metody kontynuacji opisanej szerzej w pracach [36]–[39]. Metoda ta została użyta np. w zadaniach dynamiki belek wielowarstwowych, co zaprezentowano w [40, 41], oraz w dwuwymiarowych ramach ścinanych z tłumikami lepkosprężystymi [39, 41]. W pracy [41] wzięto pod uwagę metodę kontynuacji w połączeniu z metodą podprzestrzennych iteracji użytej w celu zredukowania wymiaru nieliniowego problemu własnego.

W niniejszej dysertacji pojedynczy tłumik lepkosprężysty opisano przy pomocy uogólnionego modelu Maxwella lub, alternatywnie, modelu ułamkowego. Opis pierwszego z nich można znaleźć między innymi w pracach [42]–[44]. W ułamkowym modelu tłumika lepkosprężystego wykorzystuje się pochodne niecałkowitego rzędu (ułamkowe, frakcyjne) w celu opisu jego parametrów materiałowych. Wiedzę teoretyczną dotyczącą matematycznych podstaw tych pochodnych zawarto np. w pracy [45]. Pochodne ułamkowe znajdują zastosowanie praktyczne między innymi do modelowania właściwości mikrostruktur. Autorzy pracy [46] dokonali analizy sejsmicznej konstrukcji z tłumikami lepkosprężystymi opisanymi modelem ułamkowym. Z kolei w pracy [47] zastosowano pochodne frakcyjne w celu przeanalizowania stochastycznej odpowiedzi sejsmicznej tego typu układów. Pochodne niecałkowitego rzędu zostały użyte również w [48], aby zbadać stochastyczną odpowiedź wielowymiarowego układu nieliniowego wyposażonego w tłumiki lepkosprężyste opisane przy pomocy modelu ułamkowego. W pracach [45, 49, 50] zbadano ten model więzów lepkosprężystych, wykorzystując tzw. podejście „pełnej pamięci”, tzn. operator ułamkowy zarządza pamięcią od chwili początkowej do chwili bieżącej. Takie podejście można uogólnić przez użycie tzw. „krótkiej pamięci”, czyli ograniczonej do konkretnego przedziału czasowego (skala długości czasu), co zostało zaprezentowane w [45, 51, 52].

W wielu konstrukcjach inżynierskich wyposażonych w tłumiki lepkosprężyste wymaga się, aby ich liczba była ograniczona, a rozmieszczenie spełniało pewne z góry narzucone warunki. Istotną kwestią staje się wówczas ustalenie optymalnej lokalizacji elementów tłumiących drgania zamocowanych do konstrukcji. W niniejszej dysertacji podjęto się rozwiązanie zadania optymalnego rozmieszczenia określonej liczby tłumików (wieszów) lepkosprężystych na powierzchni płyty w taki sposób, aby docelowo uzyskać maksymalny efekt tłumienia wybranej postaci drgań powstałego

układu. Problem optymalnej lokalizacji tłumików w konstrukcjach budowlanych jest częstym przedmiotem badań, jednak przeważnie odnoszą się one do modeli ramowych, głównie ram ścinanych. Opis tych analiz zawarto np. w pracach [53]–[63]. W niniejszej rozprawie, w celu ustalenia najkorzystniejszego położenia tłumików na powierzchni płyt, zastosowano metaheurystyczny algorytm optymalizacyjny nazywany metodą roju cząstek (ang. *particle swarm optimization method*, PSO). Metoda ta znajduje szerokie zastosowanie praktyczne w rozwiązywaniu różnego rodzaju zadań optymalizacyjnych i stanowi przedmiot wielu prac naukowych. Algorytm PSO został utworzony w 1995 roku jako wynik badań prowadzonych przez Kennedy’ego i Eberharta, które opublikowano w pracy [64]. Jest to stochastyczny algorytm oparty na obserwacji zachowania się np. wędrującego stada ptaków. Pozwala on określić przybliżone rozwiązanie różnych zadań optymalizacyjnych. Istotę metody PSO oraz jej zastosowanie w problemach optymalizacyjnych konstrukcji opisano w pracy [65], gdzie autorzy zbadali wpływ współczynników algorytmu na rozwiązanie zadania optymalizacji struktury kratowej. Algorytm PSO wykazuje wrażliwość na wartości przypisanych do niego tzw. parametrów sterujących. Wyniki badań wpływu tych parametrów na efektywność metody PSO zaprezentowano w pracach [66]–[68]. Do omawianej metody optymalizacyjnej wprowadzono wiele modyfikacji, których opis można odnaleźć w pracach [69]–[74]. Spójną prezentację ścieżki rozwoju oraz aktualny stan wiedzy o metodzie PSO zawarto w publikacji [75]. W niniejszej rozprawie zastosowano klasyczny wariant tej metody, opisany w pracy [65], a wyniki prowadzonych badań opublikowano w pozycji [76].

Analiza dynamiczna konstrukcji z uwzględnieniem zjawisk losowych stanowi przedmiot wielu badań. W niniejszej pracy tematyka ta została przedstawiona pod koniec rozważań z zakresu dynamiki płyt cienkich. Problematykę mechaniki stochastycznej szeroko opisano między innymi w pracach [77, 78]. Podstawową metodą numeryczną stosowaną w tego typu zagadnieniach jest stochastyczna metoda elementów skończonych, która została użyta między innymi w kontekście analizy zginania cienkich płyt prostokątnych w [79]. Biorąc pod uwagę niepewności parametrów geometrycznych, analizę zginania tych płyt można również przeprowadzić przy wykorzystaniu stochastycznej metody elementów skończonych i transformacji falkowej [80]. Stochastyczna MES była także efektywnie stosowana w analizie odpowiedzi dynamicznej płyt kompozytowych wykonanych z kompozytu grafit-epoksyd [81]. Inne badania z tej problematyki można też znaleźć w pracach [82, 83]. Interesujący, naukowy i inżynierski problem modelowania łopaty śmigła przedstawiono w pracy [84]. Choć autorzy tej pracy nie użyli typowego podejścia losowego, to jednak wykonali

analizę histogramu odchyłeń błędów obróbki, które mogą mieć charakter losowy. Kompleksowy przegląd niektórych deterministycznych i stochastycznych metod używanych w dynamice zawarto w pracy [85]. W niniejszej dysertacji rozważono odpowiedź probabilistyczną w zagadnieniu drgań własnych cienkich płyt prostokątnych spoczywających na lepkosprężystych podporach. Wyniki przeprowadzonych badań opublikowano w pracy [86], gdzie rozważono uogólniony model Maxwella w opisie tłumików lepkosprężystych. W publikacji tej nie uwzględniono analizy entropii względnej, natomiast zawarto ją np. w pracach [87, 88].

Analiza losowa dynamiki płyt cienkich wyposażonych w tłumiki lepkosprężyste opisane modelem ułamkowym stanowi przedmiot kolejnych badań prowadzonych w dysertacji i opublikowanych w [89]. Zadania brzegowe uwzględniające pochodne frakcyjne mają istotne znaczenie w mechanice, jednak rzadko są one rozwiązywane z niepewnościami natury losowej [90]. W zagadnieniach tych problemy odnoszące się do stochastycznej linearyzacji mogą być rozwiązywane metodami pozwalającymi na mniejszy nakład obliczeniowy, do których włącza się metodę półanalityczną oraz uogólnioną metodę perturbacji stochastycznej [78, 91, 92].

W niniejszej rozprawie, przy pomocy procedur obliczeniowych uwzględniających efekty losowe, określano postacie tzw. funkcji odpowiedzi wiążących badane charakterystyki dynamiczne płyt (częstości drgań własnych) z wybranym źródłem niepewności (parametrem projektowym). Przy pomocy tych funkcji wyznaczano następnie, ze względnie dużą dokładnością, kilka pierwszych momentów losowych dla wybranych częstości drgań własnych badanych układów, stosując dwie wspomniane wcześniej metody stochastyczne (półanalityczną oraz uogólnioną perturbacji stochastycznej), a także metodę symulacyjną Monte-Carlo [92]. Uwzględniono również entropię względną zgodnie z modelem Bhattacharyya [93], którą porównywano z miarą niezawodności pierwszego rzędu [94]. Podobnego typu badania przeprowadzono w publikacji [95], gdzie wzięto pod uwagę różne warianty podparcia badanych płyt przy pomocy więzów lepkosprężystych.

W dysertacji rozważano także kwestię losowości występującej w układach dwóch płyt cienkich zanurzonych całkowicie w płynie, przy czym analizę dynamiczną w ujęciu deterministycznym prowadzono przy użyciu kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB. Tą tematykę w nieco szerszym kontekście, kładącym większy nacisk na MEB, przedstawiono w pracy [96].

Pod koniec dysertacji przedstawiono rozważania z zakresu analizy stateczności cienkich płyt prostokątnych. Tematykę tą ujęto w rozprawie ze względu na analogie występujące w procedurach obliczeniowych między zagadnieniami dynamiki oraz

stateczności płyt. Najważniejsze informacje odnośnie teorii stateczności elementów płytowych zawarto w [2, 97], a zadania zawierające liniowe oraz nieliniowe zagadnienia z tej tematyki, w ujęciu metody równań równoważnych w połączeniu z MEB, rozwiązywano w pracach [98]–[101]. Z kolei w pozycjach [102]–[104] przedstawiono koncepcję rozwiązywania zadań ze stateczności płyt cienkich wraz z przykładami liczbowymi, gdzie zastosowano MEB. Analiza stateczności spawanych dźwigarów stalowych poddanych zginaniu oraz działaniu sił ścinających została przeprowadzona w pracy [105] w ujęciu MES oraz MEB. W niniejszej rozprawie zagadnienie stateczności w odniesieniu do płyt cienkich zostało rozważone zgodnie z metodologią MRS oraz zaprezentowane w [106].

Podsumowując omówiony powyżej stan wiedzy związanej z tematem niniejszej dysertacji, można wymienić kilka istotnych elementów, które wymagają uzupełnienia. Są to:

1. wyznaczenie charakterystyk dynamicznych dźwigarów powierzchniowych (płyt) zanurzonych w płynie w ujęciu kilku alternatywnych kombinacji metod numerycznych wraz z analizą porównawczą,
2. szczegółowy opis rozwiązywania równania ruchu płyty o zmiennej sztywności w ujęciu metody różnic skończonych,
3. analiza dynamiczna elementów płytowych (dwuwymiarowych) wyposażonych w lepko-sprężyste tłumiki drgań z uwzględnieniem wpływu temperatury,
4. zastosowanie probabilistycznego aparatu numerycznego w zagadnieniach dynamicznych wymagających rozwiązywania nieliniowych problemów własnych,
5. opracowanie autorskich procedur obliczeniowych umożliwiających przeprowadzenie analizy statycznej, dynamicznej oraz stateczności płyt cienkich.

W kolejnych rozdziałach rozprawy podjęto się wypełnienia wyżej przedstawionych luk:

1. Wyznaczono charakterystyki dynamiczne cienkich płyt prostokątnych oraz ich układów zanurzonych w płynie w ujęciu dwóch kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB. Wykonano ponadto analizę porównawczą uzyskanych wyników (rozdziały 5–6).
2. Przedstawiono szczegółowy opis rozwiązywania równania ruchu płyty o zmiennej sztywności w ujęciu metody różnic skończonych (rozdziały 3–4, rozdział 10, dodatek A).

3. Przeprowadzono analizę dynamiczną elementów płytowych wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań z uwzględnieniem wpływu temperatury oraz optymalnej lokalizacji (rozdziały 7–8).
4. Wykonano analizę dynamiczną płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań, biorąc pod uwagę ujęcie losowe (rozdział 9).
5. W celu przeprowadzenia analiz statyki, dynamiki i stateczności płyt użyto w niniejszej rozprawie autorskich, względnie prostych procedur obliczeniowych przygotowanych w środowisku oprogramowania Octave.



## 2. Problem badawczy i cel pracy

Problematyka niniejszej dysertacji mieści się w obszarze nauk technicznych obejmujących zagadnienia mechaniki konstrukcji w ujęciu deterministycznym i probabilistycznym (losowym) z zastosowaniem metod numerycznych.

Przedmiotem prowadzonych badań są cienkie płyty prostokątne spełniające hipotezę Kirchhoffa-Love'a. Zakłada się, że ich maksymalna grubość nie przekracza 0,1 długości krótszego boku. Ponadto przyjęto, że w obrębie badanej płyty grubość może zmieniać się zgodnie z ustaloną funkcją.

W ramach podejmowanego problemu badawczego można wyróżnić następujące podobszary zagadnień specjalistycznych:

- analiza statyczna płyt prostokątnych o stałej lub zmiennej grubości,
- analiza drgań własnych płyt prostokątnych bądź ich układów o stałej lub zmiennej grubości, umieszczonych w próżni lub zanurzonych w cieczy,
- analiza drgań własnych płyt prostokątnych wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań w ujęciu deterministycznym i losowym,
- analiza stateczności płyt prostokątnych o stałej lub zmiennej grubości.

W celu wykonania powyższych analiz obliczano przemieszczenia pionowe, a także wyznaczano charakterystyki dynamiczne (częstości drgań własnych i/lub bezwymiarowe współczynniki tłumienia) lub obciążenia krytyczne dla określonych dźwigarów płytowych. W większości prowadzonych badań rozwiązywano metodami numerycznymi odpowiednie liniowe i nieliniowe zagadnienia własne.

Głównym celem rozprawy jest rozwiązanie niżej opisanego problemu badawczego oraz udowodnienie poprawności hipotez badawczych przedstawionych w dalszej części niniejszego rozdziału.

Problem badawczy pracy można sformułować w postaci kilku pytań:

1. W jaki sposób umieszczenie dźwigarów płytowych w różnych ośrodkach zewnętrznych, wyposażenie w lepkosprężyste elementy tłumiące drgania lub anizotropowa struktura wpływają na ich charakterystyki dynamiczne?
2. Jak dobór metod numerycznych spośród MES, MRS i MEB wpływa na efektywność procedur obliczeniowych w analizie statycznej i dynamicznej płyt?
3. W jaki sposób temperatura otoczenia wpływa na charakterystyki dynamiczne płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań?

4. Czy istnieje możliwość doboru optymalnej lokalizacji skończonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty i jakie zastosować w tym celu kryterium?
5. Jak przedstawiają się charakterystyki dynamiczne, a także obciążenie krytyczne płyt o liniowo zmiennej grubości w porównaniu z płytami o stałej grubości?
6. Które parametry projektowe płyty, wpływające na jej charakterystyki dynamiczne, są szczególnie wrażliwe na zjawiska losowe?

W celu udzielenia odpowiedzi na powyższe pytania, składające się na problem badawczy, rozwiązywano w niniejszej rozprawie następujące zadania szczegółowe:

1. wyznaczenie częstości drgań własnych dla płyt umieszczonych w próżni, zanurzonych w cieczy, wykonanych z różnych materiałów lub wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań, a następnie sformułowanie odpowiednich wniosków pozwalających ustalić wpływ wymienionych czynników na wartości rozważanych charakterystyk dynamicznych,
2. wykonanie powyższych analiz przy zastosowaniu różnych metod numerycznych spośród MES, MRS i MEB oraz sformułowanie wniosków odnośnie ich efektywności na podstawie analizy zbieżności metod oraz porównania uzyskanych wyników z rozwiązaniami zawartymi w dostępnej literaturze,
3. wyznaczenie w sposób graficzny zależności wybranej częstości drgań własnych od temperatury otoczenia dla płyty wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań,
4. wyznaczenie optymalnej lokalizacji ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty przy zastosowaniu metody optymalizacyjnej roju cząstek, zakładając bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań jako funkcję celu,
5. wyznaczenie częstości drgań własnych/obciążenia krytycznego dla wybranych płyt o stałej oraz zmiennej grubości, a następnie ustalenie odpowiedniej zależności między otrzymanymi wielkościami dla obu przypadków geometrii płyt,
6. wyznaczenie znormalizowanego gradientu wrażliwości odpowiadającego wybranym parametrom projektowym płyty oraz stwierdzenie, dla których parametrów osiąga on największą wartość dodatnią oraz największą wartość ujemną.

W pracy postawiono kilka hipotez badawczych, których słuszności dowodzono w trakcie prowadzonych badań:

1. Charakterystyki dynamiczne płyt lub ich układów zanurzonych w cieczy otrzymane przy użyciu metod numerycznych MRS–MEB są bliższe wynikom anali-

tycznym lub uzyskanym zgodnie z metodologią MEB [9] w porównaniu z opisem MES–MEB.

2. Dla temperatury otoczenia bliskiej referencyjnej jej wpływ na charakterystyki dynamiczne płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań jest znaczący.
3. Istnieje optymalne rozmieszczenie ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty pozwalające uzyskać maksymalny efekt tłumienia wybranej postaci jej drgań własnych.
4. Odpowiedź dynamiczna konstrukcji (płyty) jest szczególnie wrażliwa na geometryczne parametry projektowe.

Ponadto przyjęto następujące kryteria pozwalające uzasadnić poprawność powyższych hipotez:

1. wyznaczenie częstości drgań własnych dla wybranych płyt lub ich układów zanurzonych w cieczy przy użyciu dwóch kombinacji metod numerycznych (MES–MEB i MRS–MEB), a następnie wykazanie, że wartości częstości uzyskane za pomocą kombinacji MRS–MEB są bliższe wynikom analitycznym lub otrzymanym zgodnie z metodologią MEB w porównaniu z opisem MES–MEB,
2. wyznaczenie zależności wybranej częstości drgań własnych od temperatury otoczenia dla płyty wyposażonej w tłumiki lepkosprężyste oraz wykazanie istotnej zmiany badanej częstości (przynajmniej o 10%), w porównaniu z płytą bez tłumików, w przypadku temperatur otoczenia bliskich temperaturze referencyjnej,
3. wykazanie, że zastosowanie metody optymalizacyjnej roju cząstek wraz z kryterium maksymalizacji wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia wybranej postaci drgań pozwalają uzyskać optymalne rozmieszczenie ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty,
4. wyznaczenie znormalizowanego gradientu wrażliwości dla przyjętego zbioru parametrów projektowych analizowanej płyty oraz wykazanie, że osiąga on największą wartość dodatnią oraz największą wartość ujemną dla parametrów geometrycznych.

Istotę nowości poszukiwanego rozwiązania problemu badawczego można przedstawić w kilku niżej opisanych aspektach:

1. Zaproponowano autorskie metody całkowania numerycznego w celu wyznaczenia macierzy sztywności i macierzy bezwładności płyty dla potrzeb wykonania jej analizy dynamicznej.
2. Opracowano autorskie procedury obliczeniowe pozwalające:

- rozwiązać zadanie interakcji z płynem płyty lub układu płyt,
  - rozwiązać nieliniowe zadanie analizy dynamicznej płyty z zamocowanymi do jej powierzchni lepkosprężystymi tłumikami drgań, uwzględniając wpływ temperatury,
  - wyznaczyć optymalną lokalizację ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty,
  - wykonać analizę stateczności płyty o zmiennej grubości.
3. Dokonano połączenia różnych metod numerycznych spośród MES, MRS, MEB w zadaniach np. interakcji płyta–ciecz.
  4. Rozwiązywano nieliniowe problemy własne przy użyciu metody kontynuacji, z zastosowaniem numerycznego aparatu probabilistycznego.

Procedury obliczeniowe służące przeprowadzeniu analizy statycznej, dynamicznej i stateczności płyt opracowano przy wykorzystaniu metodologii MES, MRS i MEB w środowisku oprogramowania Octave. Do analizy probabilistycznej, w zakresie wyznaczania momentów losowych, zastosowano dodatkowo środowisko Maple.

### 3. Analiza statyczna płyt prostokątnych

Niniejszy rozdział dotyczy tematyki wyznaczania ugięć w płytach prostokątnych o różnorodnych warunkach podparcia i obciążenia. Stanowi on w dysertacji rolę wstępną (przygotowawczą) do głównej treści pracy, jaką jest analiza dynamiczna płyt. W ramach analizy statycznej zastosowano dwie metody numeryczne – metodę elementów skończonych (MES) oraz metodę różnic skończonych (MRS). Pierwszą z wymienionych metod uznano w niniejszej pracy za bardziej odpowiednią do prowadzenia analiz dla płyt anizotropowych o stałej grubości, natomiast drugą – do badań płyt izotropowych o zmiennej grubości.

Na początku rozdziału przedstawiono krótkie wprowadzenie teoretyczne do tematu analizy statycznej płyt. Następnie omówiono zastosowane metody numeryczne wraz z przedstawieniem niezbędnych wyprowadzeń pozwalających na opracowanie odpowiednich algorytmów komputerowych. Na zakończenie podano wyniki obliczeń numerycznych, które porównano z wynikami zawartymi w literaturze. W prezentowanych przykładach przyjęto, że płyty wykonane są z materiału izotropowego, a więc wykazującego jednakowe właściwości niezależnie od kierunku obserwacji.

#### 3.1. Wprowadzenie teoretyczne

Do analiz, których wyniki przedstawiono w tym rozdziale, stosowano modele płyt spełniających główne założenie hipotezy Kirchhoffa-Love'a, nazywanych dalej płytami cienkimi. Zgodnie z tym założeniem „odcinek prostopadły do nieodkształconej powierzchni środkowej płyty pozostaje prostoliniowy, niewydłużony i prostopadły do powierzchni odkształconej” [107]. W prowadzonych badaniach wzięto pod uwagę cienkie płyty prostokątne. Przez płytę należy rozumieć „dźwigar powierzchniowy płaski ograniczony dwiema powierzchniami o małej krzywiznie” [107]. Grubości rozpatrywanych płyt nie powinny przekraczać 0,1 długości ich krótszego boku. Ponadto zakłada się małe ugięcia płyt, nie przekraczające 0,2 ich grubości.

Podstawowym elementem analizy statycznej płyt jest określenie ich deformacji (ugięć) pod wpływem działającego obciążenia. W teorii płyt cienkich przyjmuje się jako model obliczeniowy powierzchnię środkową płyty, tzn. płaszczyznę równo oddaloną od jej powierzchni zewnętrznych, odpowiednio dolnej oraz górnej [107]. W takim modelu pomija się pracę płyty po kierunku jej grubości, a deformację można

w przybliżeniu określić na podstawie wartości pionowych przemieszczeń wybranych punktów należących do powierzchni środkowej.

W procedurach obliczeniowych dotyczących płyt o stałej grubości przyjęto, że są one wykonane z materiału anizotropowego, czyli takiego, który posiada różne właściwości zależnie od kierunku obserwacji. Przykładem może być materiał włókno-kompozytowy złożony z warstw zawierających włókna ułożone pod różnymi kątami. Równanie różniczkowe ugięcia płyty anizotropowej przedstawia się następująco [1]:

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + (2D_{12} + 4D_{33}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + 4D_{13} \frac{\partial^4 w}{\partial x^3 \partial y} + 4D_{23} \frac{\partial^4 w}{\partial x \partial y^3} = p, \quad (3.1)$$

gdzie  $w = w(x, y)$  jest funkcją ugięcia płaszczyzny środkowej płyty  $\Omega$  zawartej w  $\mathbb{R}^2$ ,  $p = p(x, y)$  jest funkcją obciążenia, a  $D_{ij}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) są składowymi macierzy kwadratowej  $\mathbf{D}$  o wymiarach  $3 \times 3$  zawierającej sztywności płyty na zginanie i skręcanie. Dla materiałów izotropowych niezerowymi elementami tej macierzy są:

$$\begin{aligned} D_{11} = D_{22} = D &= \frac{E \cdot H^3}{12(1 - \nu^2)}, \\ D_{12} = D_{21} &= D\nu, \\ D_{33} &= 0,5(1 - \nu)D, \end{aligned} \quad (3.2)$$

gdzie  $E$  oraz  $\nu$  są odpowiednio modułem Younga i współczynnikiem Poissona materiału płyty, a  $H$  jest jej grubością. Z kolei dla włókno-kompozytowych materiałów ortotropowych, tzn. składających się z włókien i osnowy oraz wykazujących zmienne właściwości w dwóch prostopadłych kierunkach, niezerowymi elementami macierzy  $\mathbf{D}$  są:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \frac{E_1 H^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{22} = \frac{E_2 H^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \\ D_{12} = D_{21} &= \frac{E_2 \nu_{12} H^3}{12(1 - \nu_{12}\nu_{21})}, \quad D_{33} = \frac{G_w G_0}{m_0 G_w + m_w G_0}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} E_1 &= m_w E_w + m_0 E_0, \quad E_2 = \frac{E_w E_0}{m_0 E_w + m_w E_0}, \\ \nu_{12} &= m_w \nu_w + m_0 \nu_0, \\ G_w &= \frac{E_w}{2(1 + \nu_w)}, \quad G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

W powyższych wzorach przyjęto następujące oznaczenia:

$E_w, E_0$  – moduł Younga odpowiednio włókien i osnowy,

$\nu_w, \nu_0$  – współczynnik Poissona odpowiednio włókien i osnowy,

$m_w, m_0$  – udział objętościowy odpowiednio włókien i osnowy w materiale [1].

W niniejszej pracy przybliżone rozwiązanie równania (3.1) wyznaczono przy zastosowaniu metody elementów skończonych.

W przypadku płyty izotropowej o zmiennej grubości określonej funkcją  $H(x, y)$  odpowiadająca funkcja sztywności na zginanie wyrażona jest wzorem:

$$D(x, y) = \frac{E \cdot H(x, y)^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (3.5)$$

Równanie różniczkowe opisujące zadanie zginania płyty o sztywności według powyższego wzoru przedstawia się następująco [12]:

$$\begin{aligned} D \cdot \nabla^4 w + 2 \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial D}{\partial y} \cdot \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y} + \nabla^2 D \cdot \nabla^2 w + \\ - (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = p(x, y), \end{aligned} \quad (3.6)$$

przy czym zakłada się, że funkcja  $H(x, y)$  występująca we wzorze (3.5) określona jest na obszarze  $\Omega = [0, A] \times [0, B]$ , gdzie  $A$  i  $B$  są odpowiednio długością i szerokością płyty prostokątnej. W niniejszej pracy równanie (3.6) rozwiązano w sposób przybliżony przy użyciu metody różnic skończonych. Występujące w równaniu operatory definiuje się następująco:

$$\nabla^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad (3.7)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2}, \quad (3.8)$$

$$\nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y} = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3}, \quad (3.9)$$

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \cdot \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}. \quad (3.10)$$

## 3.2. Omówienie metod obliczeniowych

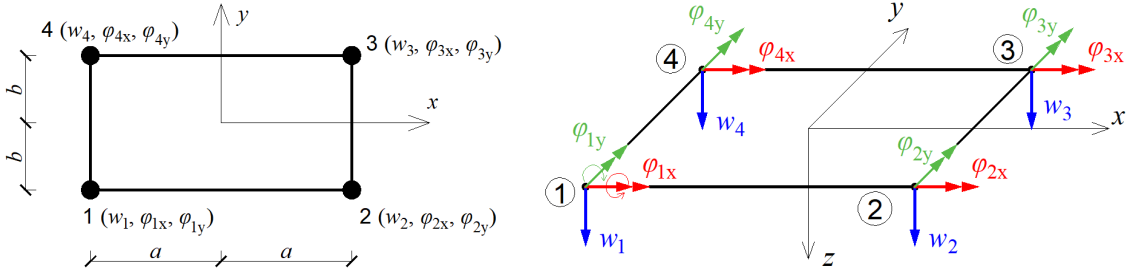
W niniejszym podrozdziale omówiono dwie metody numeryczne – metodę elementów skończonych oraz metodę różnic skończonych jako podstawowe narzędzie użyte w celu przeprowadzenia analizy statycznej prostokątnych płyt cienkich, czyli wyznaczenia ugięć w wybranych punktach ich powierzchni środkowej. Przedstawiono sposób rozwiązywania, wspomnianymi metodami numerycznymi, równań (3.1) oraz (3.6). Ponadto opisano kolejność postępowania prowadzącą do wyznaczenia postaci deformacji wybranych płyt prostokątnych obciążonych na powierzchni i zamocowanych na różne sposoby.

### 3.2.1. Metoda elementów skończonych

W celu opisanie deformacji płyty należy podzielić jej powierzchnię środkową  $\Omega$  na skończoną liczbę elementów  $\Omega_e$  ( $e = 1, 2, 3, \dots, l_{el}$ ) takich, że

$$\Omega = \bigcup_{e=1}^{l_{el}} \Omega_e, \text{ gdzie } \Omega_{e_i} \cap \Omega_{e_j} = \emptyset \text{ dla } i \neq j.$$

W niniejszej dysertacji zastosowano elementy skończone typu plQ4 opisane np. w [1]. Pojedynczy element skończony przedstawiono na rysunku 3.1.



Rysunek 3.1. Element skończony 4-węzłowy typu plQ4: numeracja węzłów (po lewej), stopnie swobody w węzłach (po prawej)

Element skończony typu plQ4 charakteryzuje się czterema węzłami rozmieszczonymi w jego punktach narożnych. W  $i$ -tym węźle ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) określa się trzy stopnie swobody, którymi są przemieszczenie pionowe  $w_i$  oraz dwa kąty obrotu względem osi  $x$  i  $y$  kartezjańskiego układu współrzędnych:  $\varphi_{ix}$ ,  $\varphi_{iy}$ . W węźle o numerze  $i$  można zatem określić 3-elementowy wektor przemieszczenia:

$$\mathbf{w}_i^e = [w_i \ \varphi_{ix} \ \varphi_{iy}]^T, \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (3.11)$$

gdzie

$$\varphi_{ix} = \frac{\partial w}{\partial y} \text{ oraz } \varphi_{iy} = -\frac{\partial w}{\partial x}. \quad (3.12)$$

W celu określenia stopni swobody w dowolnym punkcie elementu skończonego dokonuje się aproksymacji funkcji ugięcia przy pomocy wielomianu dwóch zmiennych czwartego stopnia o następującym wzorze:

$$\begin{aligned} w^e(x, y) = & \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 x^3 + \\ & + \alpha_8 x^2 y + \alpha_9 xy^2 + \alpha_{10} y^3 + \alpha_{11} x^3 y + \alpha_{12} xy^3, \end{aligned} \quad (3.13)$$

gdzie  $\alpha_{11} \neq 0$  lub  $\alpha_{12} \neq 0$ .

Pole przemieszczeń w obrębie pojedynczego elementu można zapisać też w następującej postaci wektorowej:

$$w^e(x, y) = \mathbf{N}^e \mathbf{w}^e, \quad (3.14)$$

gdzie:

$$\mathbf{w}^e = [\mathbf{w}_1^e \mathbf{w}_2^e \mathbf{w}_3^e \mathbf{w}_4^e]^T, \quad (3.15)$$

$$\mathbf{N}^e = [N_1^e(x, y) \ N_2^e(x, y) \ N_3^e(x, y) \ \dots \ N_{12}^e(x, y)]. \quad (3.16)$$

We wzorze (3.16) funkcje  $N_i^e(x, y)$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, 12$ , nazywa się funkcjami kształtu elementu skończonego  $e$ . Zakłada się, że są one postaci (3.13), gdzie nieznane współczynniki wyznacza się przez rozwiązanie odpowiedniego układu równań. Każda  $i$ -ta funkcja kształtu odpowiada jednostkowej wartości  $i$ -tego stopnia swobody elementu skończonego i zerowej wartości pozostałych stopni swobody. Dokładne wzory wszystkich funkcji kształtu zawarte są w pracy [1].

Zgodnie z metodologią MES macierz sztywności pojedynczego elementu skończonego plQ4 o polu powierzchni  $A$  wyznacza się z następującego wzoru [1, 5]:

$$\mathbf{K}^e = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dV = H \int_A \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dA, \quad (3.17)$$

gdzie  $\mathbf{D}$  jest macierzą określającą sztywności płyty na zginanie i skręcanie, a  $\mathbf{B}$  jest macierzą zawierającą pochodne funkcji kształtu, określoną następująco:

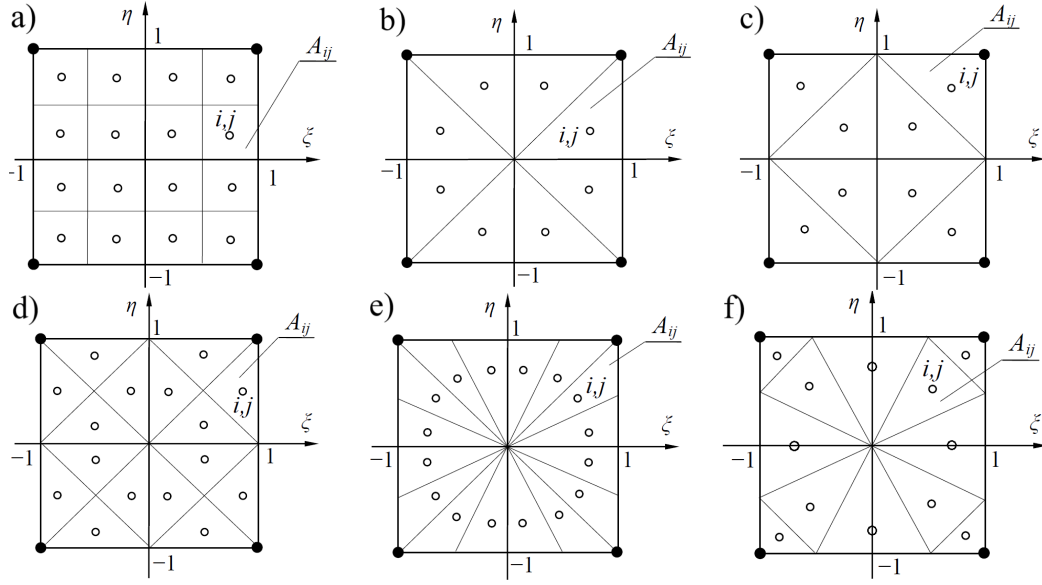
$$\mathbf{B} = [B_{ij}]_{3 \times 12} = \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ \frac{\partial^2}{\partial y^2} \ 2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \right]^T \mathbf{N}^e. \quad (3.18)$$

Całkę (3.17) można obliczyć analitycznie. Wzory na kolejne elementy  $k_{ij}^e$  macierzy  $\mathbf{K}^e$ , gdzie  $i, j = 1, 2, 3, \dots, 12$ , podano w pracy [1]. Całki z wyrażeń macierzowych można też wyznaczać numerycznie, stosując np. całkowanie metodą Gaussa. W niniejszej pracy podjęto próbę zastosowania niestandardowych, autorskich metod całkowania numerycznego będących pewną modyfikacją metody Gaussa [25]. Zgodnie z takim podejściem całka z funkcji  $f(x, y)$  po obszarze  $\Omega$  jest w przybliżeniu równa sumie iloczynów wartości tej funkcji  $f(\xi_i, \eta_j)$  w kolejnych punktach całkowania, przyjętych wag  $w_{ij}$  dla każdego punktu  $(\xi_i, \eta_j)$  oraz jakobianu  $|J(\xi_i, \eta_j)|$  przekształcenia obszaru  $\Omega$  w obszar  $[-1, 1] \times [-1, 1]$ . Można zatem zapisać, że

$$\int_{\Omega} f(x, y) d\Omega \approx \sum_{i,j} w_{ij} f(\xi_i, \eta_j) |J(\xi_i, \eta_j)|. \quad (3.19)$$

Punkty całkowania można rozmieścić na obszarze  $[-1, 1] \times [-1, 1]$  na kilka sposobów, które przedstawiono na rysunku 3.2. Są one środkami geometrycznymi przedstawionych podobszarów. Wówczas wagi  $w_{ij}$  odpowiadające kolejnym punktom całkowania są równe polu powierzchni podobszarów przypadających na te punkty.

W niniejszej pracy przyjęto podział płyty na elementy skończone typu plQ4 w sposób przedstawiony na rysunku 3.3. Globalna numeracja węzłów w elementach



Rysunek 3.2. Lokalizacja punktów całkowania będących środkami geometrycznymi utworzonych podobszarów [25]

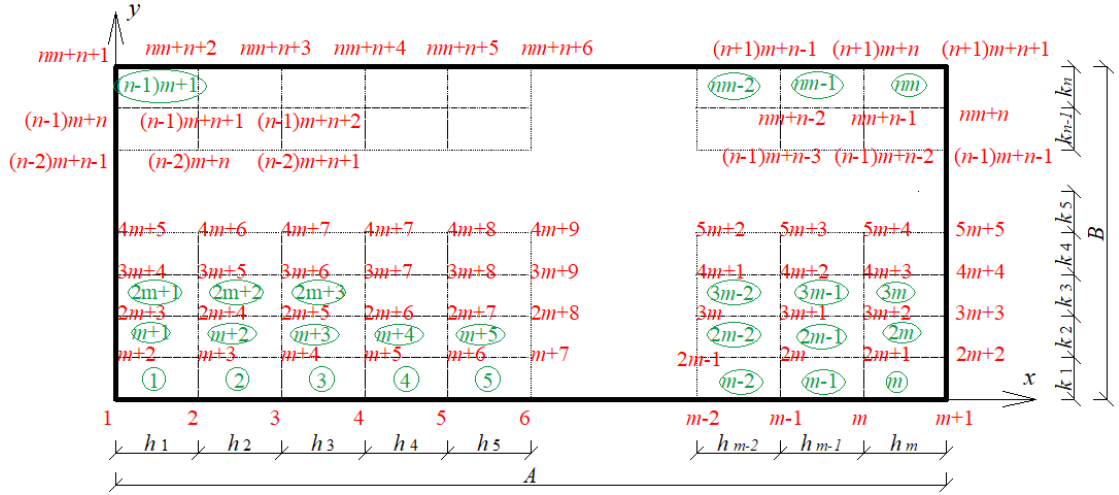
skończonych dyskretyzujących płytę przebiega począwszy od jej dolnej krawędzi w kierunku od strony lewej do prawej. Według tej samej reguły ponumerowano też kolejne elementy skończone. Siatkę elementów skończonych przyjęto w ten sposób, że krawędź poziomą płyty podzielono na  $m$  części o szerokościach:  $h_1, h_2, h_3, \dots, h_m$ , a jej krawędź pionową na  $n$  części o szerokościach:  $k_1, k_2, k_3, \dots, k_n$ . Każdemu  $i$ -temu węzłowi odpowiadają stopnie swobody (kolejno: przemieszczenie translacyjne  $w$ , obrót  $\varphi_x$  względem osi  $x$ , obrót  $\varphi_y$  względem osi  $y$ ) o numerach odpowiednio:  $3i - 2, 3i - 1, 3i$ . Przykładowo węzłowi o numerze 10 odpowiadają stopnie swobody o numerach 28, 29 i 30. Zdyskretyzowana płyta składa się z  $mn$  elementów skończonych, posiada  $(m + 1)(n + 1)$  węzłów oraz  $3(m + 1)(n + 1)$  stopni swobody.

Problem analizy statycznej płyty polega na wyznaczeniu wartości wszystkich węzłowych stopni swobody, a więc niewiadomą jest globalny wektor przemieszczeń węzłowych postaci:

$$\mathbf{w} = [w_1, \varphi_{1x}, \varphi_{1y}, w_2, \varphi_{2x}, \varphi_{2y}, \dots, w_{(m+1)(n+1)}, \varphi_{(m+1)(n+1),x}, \varphi_{(m+1)(n+1),y}]^T. \quad (3.20)$$

Aby wyznaczyć powyższy wektor, należy rozwiązać układ równań algebraicznych, który można macierzowo zapisać następująco:

$$\mathbf{K}\mathbf{w} = \mathbf{f}, \quad (3.21)$$



Rysunek 3.3. Podział płyty prostokątnej na elementy skończone czterowęzłowe typu plQ4

gdzie  $\mathbf{K}$  jest globalną macierzą sztywności płyty otrzymaną przez agregację macierzy sztywności  $\mathbf{K}^e$  kolejnych elementów skończonych ( $e = 1, 2, 3, \dots, mn$ ), co można symbolicznie zapisać w postaci:

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^{mn} \mathbf{K}^e. \quad (3.22)$$

Agregacja macierzy sztywności polega na wstępnym utworzeniu macierzy  $\mathbf{K}$  jako zerowej o wymiarach  $3(m+1)(n+1) \times 3(m+1)(n+1)$  i następnie dodawaniu do niej kolejnych macierzy elementowych  $\mathbf{K}^e$  w taki sposób, że wiersze i kolumny odpowiadających im stopni swobody odpowiadają tym samym stopniom swobody w macierzy globalnej.

Macierz  $\mathbf{K}$  wyznaczona przy pomocy wzorów (3.17) oraz (3.22) jest macierzą osobliwą. Oznacza to, że rozwiązanie układu (3.21) nie można wyznaczyć w sposób jednoznaczny. Aby dla tego układu istniało jednoznaczne rozwiązanie, należy do macierzy  $\mathbf{K}$  wprowadzić warunki brzegowe zależne od sposobu podparcia płyty. Po odpowiedniej modyfikacji ze względu na warunki podparcia macierz  $\mathbf{K}$  staje się macierzą nieosobliwą. Warunki brzegowe dla poszczególnych krawędzi płyty prostokątnej mogą być następujące:

- krawędź utwierdzona – w węzłach krawędzi występują zerowe przemieszczenia i kąty obrotu, tzn.  $(w_i, \varphi_{ix}, \varphi_{iy}) = (0, 0, 0)$  dla węzła  $i$  należącego do krawędzi,
- krawędź swobodnie podparta dolna lub górna – w węzłach krawędzi występują zerowe przemieszczenia i kąty obrotu względem osi  $y$ , tzn.  $(w_i, \varphi_{iy}) = (0, 0)$  dla węzła  $i$  należącego do krawędzi,

- krawędź swobodnie podparta lewa lub prawa – w węzłach krawędzi występują zerowe przemieszczenia i kąty obrotu względem osi  $x$ , tzn.  $(w_i, \varphi_{ix}) = (0, 0)$  dla węzła  $i$  należącego do krawędzi.

W celu uwzględnienia odpowiednich warunków brzegowych w macierzy  $\mathbf{K}$  należy wypełnić zerami jej wiersze i kolumny związane z zerującymi się stopniami swobody oraz wstawić wartość 1 na przekątnej głównej w wyzerowanych wierszach.

W równaniu (3.21) wektor  $\mathbf{f}$  o wymiarze  $3(m+1)(n+1) \times 1$  jest globalnym wektorem obciążeń węzłowych płyty otrzymanym przez agregację wektorów  $\mathbf{f}^e$  sił węzłowych kolejnych elementów skończonych, tzn.

$$\mathbf{f} = \sum_{e=1}^{mn} \mathbf{f}^e = \mathbf{P}_w - \sum_{e=1}^{mn} \mathbf{Q}_0^e, \quad (3.23)$$

gdzie:

$\mathbf{P}_w$  – globalny wektor sił skupionych płyty, przyłożonych bezpośrednio do węzłów siatki MES,

$\mathbf{Q}_0^e$  – wektor sił węzłowych elementu  $e$ , powstały w wyniku działania obciążenia rozłożonego przypadającego w jego obrębie, obliczany przy użyciu poniższego wzoru zależnego od funkcji kształtu:

$$\mathbf{Q}_0^e = - \int_{\Omega_e} (\mathbf{N}^e)^T p \, d\Omega_e. \quad (3.24)$$

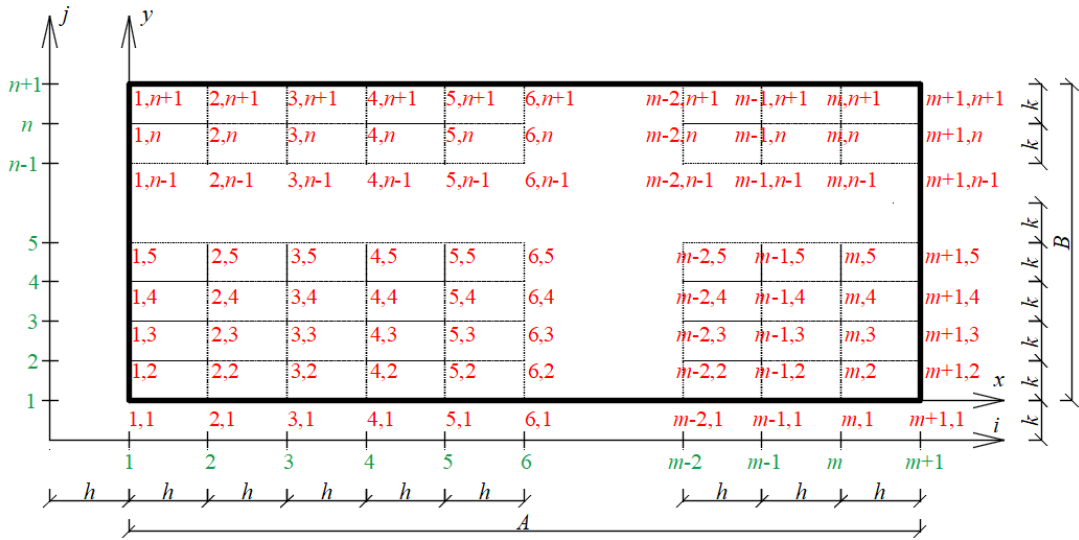
We wzorze (3.24) funkcja  $p = p(x, y)$  określa obciążenie rozłożone na powierzchni rozpatrywanego elementu skończonego [1].

Po wyznaczeniu wektorów  $\mathbf{Q}_0^e$  dla poszczególnych elementów skończonych (w sposób analityczny lub numeryczny) dokonuje się ich agregacji analogicznie jak w przypadku macierzy  $\mathbf{K}$ . Po otrzymaniu wektora  $\mathbf{f}$  ze wzoru (3.23) należy uwzględnić w nim warunki podparcia płyty przez zastąpienie zerami elementów odpowiadających zerującym się stopniom swobody w płycie. Znając macierz sztywności  $\mathbf{K}$  i globalny wektor obciążeń  $\mathbf{f}$ , można rozwiązać układ równań (3.21) oraz wyznaczyć szukany wektor przemieszczeń węzłowych płyty  $\mathbf{w}$ . Przy pomocy tego wektora możliwe jest odczytanie wartości interesującego przemieszczenia w konkretnym punkcie płyty lub graficzne przedstawienie postaci jej deformacji. Układ równań (3.21), z uwagi na znaczną liczbę niewiadomych, rozwiązuje się przeważnie metodami numerycznymi przy pomocy odpowiednich procedur obliczeniowych opracowanych w środowisku dostępnego oprogramowania. W niniejszej pracy posłużono się autorskimi algorytmami utworzonymi w środowisku Octave.

### 3.2.2. Metoda różnic skończonych

W niniejszej pracy metodę różnic skończonych (MRS) użyto w celu wyznaczenia postaci deformacji płyty o zmiennej sztywności opisanej funkcją (3.5). Przy użyciu tej metody numerycznej wyznaczono przybliżone rozwiązanie równania (3.6) w węzłach wcześniej utworzonej siatki pokrywającej powierzchnię płyty.

W celu zastosowania metody różnic skończonych do analizy statycznej płyty prostokątnej jej powierzchnię środkową podzielono na identyczne podobszary prostokątne o bokach równoległych do osi układu współrzędnych. W ten sposób utworzono siatkę MRS złożoną z prostokątnych podobszarów posiadających wymiary  $\Delta x \times \Delta y = h \times k$ . Płytę o wymiarach  $A \times B$  z nałożoną na nią siatką przedstawiono na rysunku 3.4. Przyjęto, że każdy bok płyty podzielono na  $m$  części po kierunku



Rysunek 3.4. Płyta prostokątna z nałożoną siatką MRS

osi  $x$  oraz na  $n$  części po kierunku osi  $y$ . Węzły siatki MRS mają współrzędne  $(x_i, y_j)$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$  oraz  $j = 1, 2, 3, \dots, n+1$ . Wówczas boki siatki posiadają wymiary  $h \times k$ , gdzie:

$$\begin{aligned} h &= \frac{(x_{m+1} - x_1)}{m} = \frac{A}{m}, \\ k &= \frac{(y_{n+1} - y_1)}{n} = \frac{B}{n}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aby przeprowadzić analizę statyczną, na obszarze  $\Omega = [0, A] \times [0, B]$  należy wyznaczyć przybliżone wartości funkcji ugięcia płyty  $w = w(x, y)$  na siatce punk-

tów  $(x_i, y_j)$ . Przyjęto następujące oznaczenia:

$$\begin{aligned} x_{i\pm 1} &= x_i \pm h, \\ y_{j\pm 1} &= y_j \pm k, \\ w_{ij} &\approx w(x_i, y_j), \\ w_{i\pm 1, j\pm 1} &\approx w(x_i \pm h, y_j \pm k). \end{aligned} \tag{3.26}$$

Z powyższych oznaczeń wynika, że  $w_{ij}$  jest przybliżeniem wartości  $w(x_i, y_j)$ .

W celu uzyskania przybliżonego rozwiązania równania (3.6) metodą różnic skończonych należy występujące w równaniu pochodne cząstkowe zastąpić przybliżającymi je ilorazami różnicowymi. Korzystając ze skróconego zapisu, zgodnie ze wzorami (3.26), różnice centralne<sup>1</sup> w punkcie  $(x_i, y_j)$  przedstawiają się następująco [8]:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_{ij} = \frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h}, \tag{3.27}$$

$$\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k}, \tag{3.28}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2}, \tag{3.29}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{k^2}, \tag{3.30}$$

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4hk}, \tag{3.31}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3}\right)_{ij} = \frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2h^3}, \tag{3.32}$$

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3}\right)_{ij} = \frac{w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}}{2k^3}, \tag{3.33}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y}\right)_{ij} &= \frac{2(w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1}}{2h^2k} + \\ &\quad - \frac{w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}}{2h^2k}, \end{aligned} \tag{3.34}$$

<sup>1</sup> Różnicami centralnymi nazywa się ilorazy różnicowe przybliżające pochodną funkcji  $f(x)$  w wybranym punkcie  $x_0$ , w których wykorzystuje się wartości funkcji  $f$  zarówno po prawej, jak i lewej stronie punktu  $x_0$  (źródło: [https://www.if.pw.edu.pl/~agatka/numeryczne/wyklad\\_06.pdf](https://www.if.pw.edu.pl/~agatka/numeryczne/wyklad_06.pdf), dostęp: 30.05.2025).

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{ij} &= \frac{2(w_{i-1,j} - w_{i+1,j}) + w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1}}{2hk^2} + \\ &- \frac{w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{2hk^2}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right)_{ij} = \frac{w_{i+2,j} - 4w_{i+1,j} + 6w_{ij} - 4w_{i-1,j} + w_{i-2,j}}{h^4}, \quad (3.36)$$

$$\left( \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{ij} = \frac{w_{i,j+2} - 4w_{i,j+1} + 6w_{ij} - 4w_{i,j-1} + w_{i,j-2}}{k^4}, \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_{ij} &= \frac{4w_{ij} - 2(w_{i,j+1} + w_{i+1,j} + w_{i,j-1} + w_{i-1,j})}{h^2 k^2} + \\ &+ \frac{w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}}{h^2 k^2}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Po podstawieniu wzorów (3.27)–(3.38) do równania (3.6) otrzymuje się następującą jego postać różnicową dla punktu  $(x_i, y_j)$ :

$$\begin{aligned} &(\alpha_1)_{ij} w_{ij} + (\alpha_2)_{ij} w_{i-1,j} + (\alpha_3)_{ij} w_{i,j-1} + (\alpha_4)_{ij} w_{i+1,j} + (\alpha_5)_{ij} w_{i,j+1} + \\ &+ (\alpha_6)_{ij} w_{i-1,j-1} + (\alpha_7)_{ij} w_{i-1,j+1} + (\alpha_8)_{ij} w_{i+1,j-1} + (\alpha_9)_{ij} w_{i+1,j+1} + \\ &+ (\alpha_{10})_{ij} w_{i-2,j} + (\alpha_{11})_{ij} w_{i,j-2} + (\alpha_{12})_{ij} w_{i,j+2} + (\alpha_{13})_{ij} w_{i+2,j} = p_{ij}. \end{aligned} \quad (3.39)$$

W równaniu różnicowym (3.39) poszczególne współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  wyrażają się następującymi wzorami dla  $l = 1, 2, 3, \dots, 13$ :

$$\begin{aligned} (\alpha_1)_{ij} &= 2D_{ij} \left( \frac{3}{h^4} + \frac{4}{h^2 k^2} + \frac{3}{k^4} \right) + \\ &+ 2(1 - \nu) \left[ \frac{1}{k^2} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \frac{1}{h^2} \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} \right] + \\ &- 2 \left[ \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} \right] \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_2)_{ij} &= -4D_{ij} \left( \frac{1}{h^4} + \frac{1}{h^2 k^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij} \left( \frac{1}{h^3} + \frac{1}{hk^2} \right) + \\ &- \frac{1 - \nu}{h^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} + \frac{1}{h^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} \right], \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\begin{aligned} (\alpha_3)_{ij} &= -4D_{ij} \left( \frac{1}{k^4} + \frac{1}{h^2 k^2} \right) + 2 \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij} \left( \frac{1}{k^3} + \frac{1}{kh^2} \right) + \\ &- \frac{1 - \nu}{k^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \frac{1}{k^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} \right], \end{aligned} \quad (3.42)$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_4)_{ij} = & -4D_{ij} \left( \frac{1}{h^4} + \frac{1}{h^2k^2} \right) - 2 \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij} \left( \frac{1}{h^3} + \frac{1}{hk^2} \right) + \\
& - \frac{1-\nu}{h^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} + \frac{1}{h^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} \right], \quad (3.43)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(\alpha_5)_{ij} = & -4D_{ij} \left( \frac{1}{k^4} + \frac{1}{h^2k^2} \right) - 2 \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij} \left( \frac{1}{k^3} + \frac{1}{kh^2} \right) + \\
& - \frac{1-\nu}{k^2} \cdot \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \frac{1}{k^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \right)_{ij} + \left( \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \right)_{ij} \right], \quad (3.44)
\end{aligned}$$

$$(\alpha_6)_{ij} = \frac{2D_{ij}}{h^2k^2} - \frac{1}{hk^2} \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij} - \frac{1}{kh^2} \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij} - \frac{1-\nu}{2hk} \cdot \left( \frac{\partial D}{\partial x \partial y} \right)_{ij}, \quad (3.45)$$

$$(\alpha_7)_{ij} = \frac{2D_{ij}}{h^2k^2} - \frac{1}{hk^2} \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{kh^2} \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij} + \frac{1-\nu}{2hk} \cdot \left( \frac{\partial D}{\partial x \partial y} \right)_{ij}, \quad (3.46)$$

$$(\alpha_8)_{ij} = \frac{2D_{ij}}{h^2k^2} + \frac{1}{hk^2} \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij} - \frac{1}{kh^2} \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij} + \frac{1-\nu}{2hk} \cdot \left( \frac{\partial D}{\partial x \partial y} \right)_{ij}, \quad (3.47)$$

$$(\alpha_9)_{ij} = \frac{2D_{ij}}{h^2k^2} + \frac{1}{hk^2} \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij} + \frac{1}{kh^2} \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij} - \frac{1-\nu}{2hk} \cdot \left( \frac{\partial D}{\partial x \partial y} \right)_{ij}, \quad (3.48)$$

$$(\alpha_{10})_{ij} = \frac{D_{ij}}{h^4} - \frac{1}{h^3} \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij}, \quad (3.49)$$

$$(\alpha_{11})_{ij} = \frac{D_{ij}}{k^4} - \frac{1}{k^3} \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij}, \quad (3.50)$$

$$(\alpha_{12})_{ij} = \frac{D_{ij}}{k^4} + \frac{1}{k^3} \left( \frac{\partial D}{\partial y} \right)_{ij}, \quad (3.51)$$

$$(\alpha_{13})_{ij} = \frac{D_{ij}}{h^4} + \frac{1}{h^3} \left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij}. \quad (3.52)$$

We wzorach (3.40)–(3.52) przyjęto, że

$$D_{ij} = D(x_i, y_j) = \frac{E \cdot H(x_i, y_j)^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{E \cdot H_{ij}^3}{12(1-\nu^2)}. \quad (3.53)$$

Z kolei pochodne cząstkowe funkcji sztywności płyty  $D(x, y)$ , występujące w powyższych wzorach, można obliczyć przy wykorzystaniu przybliżonych wzorów różnicowych, stosując jeden z dwóch niżej przedstawionych wariantów:

1. wyznaczenie pochodnej funkcji  $H(x, y)$  przy wykorzystaniu wzoru na pochodną funkcji złożonej:

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial D}{\partial x} \right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left( \frac{\partial(H^3)}{\partial x} \right)_{ij} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot 3H_{ij}^2 \cdot \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)_{ij} = \\
&= \frac{EH_{ij}^2}{4(1-\nu^2)} \cdot \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2h}, \quad (3.54)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial(H^3)}{\partial y}\right)_{ij} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot 3H_{ij}^2 \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)_{ij} = \\
&= \frac{EH_{ij}^2}{4(1-\nu^2)} \cdot \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2k}, \tag{3.55}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2(H^3)}{\partial x^2}\right)_{ij} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(3H^2 \cdot \frac{\partial H}{\partial x}\right)\right]_{ij} = \\
&= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left[6H \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2 + 3H^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2}\right]_{ij} = \\
&= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \cdot \left[2H_{ij} \cdot \left(\frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2h}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + H_{ij}^2 \cdot \frac{H_{i+1,j} - 2H_{ij} + H_{i-1,j}}{h^2}\right], \tag{3.56}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2(H^3)}{\partial y^2}\right)_{ij} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(3H^2 \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right)\right]_{ij} = \\
&= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left[6H \cdot \left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2 + 3H^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}\right]_{ij} = \\
&= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \cdot \left[2H_{ij} \cdot \left(\frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2k}\right)^2 + \right. \\
&\quad \left. + H_{ij}^2 \cdot \frac{H_{i,j+1} - 2H_{ij} + H_{i,j-1}}{k^2}\right], \tag{3.57}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2(H^3)}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(3H^2 \cdot \frac{\partial H}{\partial y}\right)\right]_{ij} = \\
&= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left[6H \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} + 3H^2 \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y}\right]_{ij} = \\
&= \frac{E}{4(1-\nu^2)} \cdot \left[2H_{ij} \cdot \frac{H_{i+1,j} - H_{i-1,j}}{2h} \cdot \frac{H_{i,j+1} - H_{i,j-1}}{2k} + \right. \\
&\quad \left. + H_{ij}^2 \cdot \frac{H_{i+1,j+1} - H_{i+1,j-1} - H_{i-1,j+1} + H_{i-1,j-1}}{4hk}\right]. \tag{3.58}
\end{aligned}$$

2. wyznaczenie pochodnej funkcji  $H(x, y)$  bezpośrednio z odpowiednich wzorów różnicowych:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial D}{\partial x}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial(H^3)}{\partial x}\right)_{ij} = \\
&= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{H_{i+1,j}^3 - H_{i-1,j}^3}{2h}, \tag{3.59}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial D}{\partial y}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial(H^3)}{\partial y}\right)_{ij} = \\ &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{H_{i,j+1}^3 - H_{i,j-1}^3}{2k}, \end{aligned} \quad (3.60)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x^2}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2(H^3)}{\partial x^2}\right)_{ij} = \\ &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{H_{i+1,j}^3 - 2H_{ij}^3 + H_{i-1,j}^3}{h^2}, \end{aligned} \quad (3.61)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial y^2}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2(H^3)}{\partial y^2}\right)_{ij} = \\ &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \frac{H_{i,j+1}^3 - 2H_{ij}^3 + H_{i,j-1}^3}{k^2}, \end{aligned} \quad (3.62)$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y}\right)_{ij} &= \frac{E}{12(1-\nu^2)} \cdot \left(\frac{\partial^2(H^3)}{\partial x \partial y}\right)_{ij} = \\ &= \frac{E(H_{i+1,j+1}^3 - H_{i+1,j-1}^3 - H_{i-1,j+1}^3 + H_{i-1,j-1}^3)}{12(1-\nu^2) \cdot 4hk}. \end{aligned} \quad (3.63)$$

W przykładach numerycznych prezentowanych w niniejszej pracy zastosowano pierwszy z omówionych wyżej sposobów obliczania przybliżonych pochodnych cząstkowych funkcji  $D(x, y)$ .

W niniejszym rozdziale analizowano płyty prostokątne o trzech rodzajach warunków podparcia:

1. płyta podparta na całym obwodzie (podparcie swobodne lub utwierdzenie),
2. płyta podparta na dwóch przeciwległych krawędziach (obie krawędzie są podparte swobodnie lub utwierdzone),
3. płyta utwierdzona na jednej krawędzi.

Uwzględnienie warunków brzegowych dla danej krawędzi płyty polega na przyjęciu zerowych przemieszczeń pionowych, momentów zginających, sił poprzecznych lub kątów obrotu na tej krawędzi, zależnie od sposobu jej podparcia. Przy pomocy różnic centralnych (3.27)–(3.35) można zapisać następujące przybliżone wzory na reakcje, siły wewnętrzne i kąty obrotu w płycie w punkcie  $(x_i, y_j)$ :

- momenty zginające:

$$\begin{aligned} (M_x)_{ij} &= \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right]_{ij} \approx -D_{ij} \left( \frac{w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j}}{h^2} + \right. \\ &\quad \left. + \nu \frac{w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1}}{k^2} \right), \end{aligned} \quad (3.64)$$

$$(M_y)_{ij} = \left[ -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]_{ij} \approx -D_{ij} \left( \frac{w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1}}{k^2} + \nu \frac{w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j}}{h^2} \right), \quad (3.65)$$

- siły poprzeczne:

$$(\bar{Q}_x)_{ij} = \left[ -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \right]_{ij} =$$

$$\approx -D_{ij} \left[ \frac{w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j}}{2h^3} + (2 - \nu) \frac{2(w_{i-1,j} - w_{i+1,j})}{2hk^2} \right.$$

$$\left. + (2 - \nu) \frac{w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}}{2hk^2} \right], \quad (3.66)$$

$$(\bar{Q}_y)_{ij} = \left[ -D \left( \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right) \right]_{ij} =$$

$$\approx -D_{ij} \left[ \frac{w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2}}{2k^3} + (2 - \nu) \frac{2(w_{i,j-1} - w_{i,j+1})}{2h^2k} \right.$$

$$\left. + (2 - \nu) \frac{w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}}{2h^2k} \right], \quad (3.67)$$

- kąty obrotu:

$$(\varphi_x)_{ij} = \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)_{ij} \approx \frac{w_{i,j+1} - w_{i,j-1}}{2k}, \quad (3.68)$$

$$(\varphi_y)_{ij} = \left( -\frac{\partial w}{\partial x} \right)_{ij} \approx -\frac{w_{i+1,j} - w_{i-1,j}}{2h}, \quad (3.69)$$

- reakcja naroża płyty:

$$R_{ij} = \left[ -2(1 - \nu)D \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right]_{ij} =$$

$$\approx -2(1 - \nu)D_{ij} \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j-1}}{4hk}. \quad (3.70)$$

Na rysunku 3.5 przedstawiono w sposób graficzny trzy przypadki podparcia płyty. Dla każdego brzegu badanej płyty należy zapisać odpowiednie warunki brzegowe w postaci różnicowej:

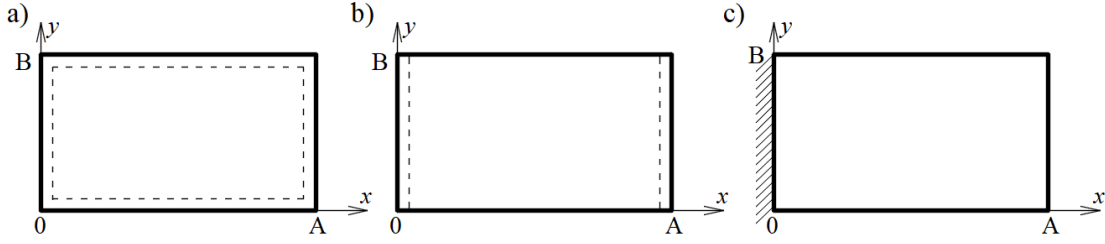
1. warunki brzegowe dla brzegu swobodnie podpartego

- a) lewego/prawego

$$(x_i \in \{0, A\}, y_j \in [0, B] \Rightarrow i \in \{1, m + 1\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n + 1\})$$

- zerowe przemieszczenie pionowe:

$$w_{ij} = 0, \quad (3.71)$$



Rysunek 3.5. Trzy przypadki podparcia płyty: podparta na obwodzie (a), podparta na dwóch przeciwległych krawędziach (b), zamocowana wspornikowo na jednej krawędzi (c)

- zerowy moment zginający względem osi  $x$ :

$$(M_x)_{ij} = 0 \Rightarrow w_{i+1,j} = -w_{i-1,j}, \quad (3.72)$$

- b) dolnego/górnego

$$(x_i \in [0, A], y_j \in \{0, B\} \Rightarrow i \in \{1, 2, 3, \dots, m+1\}, j \in \{1, n+1\})$$

- zerowe przemieszczenie pionowe:

$$w_{ij} = 0, \quad (3.73)$$

- zerowy moment zginający względem osi  $y$ :

$$(M_y)_{ij} = 0 \Rightarrow w_{i,j-1} = -w_{i,j+1}, \quad (3.74)$$

## 2. warunki brzegowe dla brzegu utwierdzonego

- a) lewego/prawego

$$(x_i \in \{0, A\}, y_j \in [0, B] \Rightarrow i \in \{1, m+1\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n+1\})$$

- zerowe przemieszczenie pionowe:

$$w_{ij} = 0, \quad (3.75)$$

- zerowy kąt obrotu względem osi  $y$ :

$$(\varphi_y)_{ij} = 0 \Rightarrow w_{i+1,j} = w_{i-1,j}, \quad (3.76)$$

- b) dolnego/górnego

$$(x_i \in [0, A], y_j \in \{0, B\} \Rightarrow i \in \{1, 2, 3, \dots, m+1\}, j \in \{1, n+1\})$$

- zerowe przemieszczenie pionowe:

$$w_{ij} = 0, \quad (3.77)$$

- zerowy kąt obrotu względem osi  $x$ :

$$(\varphi_x)_{ij} = 0 \Rightarrow w_{i,j-1} = w_{i,j+1}, \quad (3.78)$$

## 3. warunki brzegowe dla brzegu swobodnego

## a) lewego/prawego

$$(x_i \in \{0, A\}, y_j \in [0, B] \Rightarrow i \in \{1, m+1\}, j \in \{1, 2, 3, \dots, n+1\})$$

- zerowy moment zginający względem osi  $x$ :

$$(M_x)_{ij} = 0,$$

$$w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j} = -\nu \frac{h^2}{k^2} (w_{i,j-1} - 2w_{ij} + w_{i,j+1})$$

$\Downarrow$

$$w_{i+1,j} = -w_{i-1,j} + 2 \left( 1 + \nu \frac{h^2}{k^2} \right) w_{ij} - \nu \frac{h^2}{k^2} (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}), \quad (3.79)$$

- zerowa zastępcza siła poprzeczna względem osi  $x$ :

$$(\bar{Q}_x)_{ij} = 0,$$

$$w_{i+2,j} - 2w_{i+1,j} + 2w_{i-1,j} - w_{i-2,j} = -(2-\nu) \frac{h^2}{k^2} [2(w_{i-1,j} - w_{i+1,j}) + w_{i+1,j+1} + w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}]$$

$\Downarrow$  wzór (3.79)

$$\begin{aligned} w_{i+2,j} &= w_{i-2,j} - 4 \left[ 1 + (2-\nu) \frac{h^2}{k^2} \right] w_{i-1,j} + \\ &+ \left[ 6\nu(2-\nu) \frac{h^4}{k^4} + 8 \frac{h^2}{k^2} + 4 \right] w_{ij} + 2(2-\nu) \frac{h^2}{k^2} (w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}) + \\ &- 4 \left[ \frac{h^2}{k^2} + \nu(2-\nu) \frac{h^4}{k^4} \right] (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + \nu(2-\nu) \frac{h^4}{k^4} (w_{i,j-2} + w_{i,j+2}), \end{aligned} \quad (3.80)$$

## b) dolnego/górnego

$$(x_i \in [0, A], y_j \in \{0, B\} \Rightarrow i \in \{1, 2, 3, \dots, m+1\}, j \in \{1, n+1\})$$

- zerowy moment zginający względem osi  $y$ :

$$(M_y)_{ij} = 0,$$

$$w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1} = -\nu \frac{k^2}{h^2} (w_{i-1,j} - 2w_{ij} + w_{i+1,j})$$

$\Downarrow$

$$w_{i,j+1} = -w_{i,j-1} + 2 \left( 1 + \nu \frac{h^2}{k^2} \right) w_{ij} - \nu \frac{k^2}{h^2} (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}), \quad (3.81)$$

- zerowa zastępcza siła poprzeczna względem osi  $y$ :

$$(\bar{Q}_y)_{ij} = 0,$$

$$\begin{aligned} w_{i,j+2} - 2w_{i,j+1} + 2w_{i,j-1} - w_{i,j-2} = -(2-\nu)\frac{k^2}{h^2} [2(w_{i,j-1} - w_{i,j+1}) + \\ + w_{i+1,j+1} + w_{i-1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j-1}] \end{aligned}$$

↓ wzór (3.81)

$$\begin{aligned} w_{i,j+2} = w_{i,j-2} - 4 \left[ 1 + (2-\nu)\frac{k^2}{h^2} \right] w_{i,j-1} + \\ + \left[ 6\nu(2-\nu)\frac{k^4}{h^4} + 8\frac{k^2}{h^2} + 4 \right] w_{ij} + 2(2-\nu)\frac{k^2}{h^2} (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1}) + \\ - 4 \left[ \frac{k^2}{h^2} + \nu(2-\nu)\frac{k^4}{h^4} \right] (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) + \nu(2-\nu)\frac{k^4}{h^4} (w_{i-2,j} + w_{i+2,j}), \end{aligned} \quad (3.82)$$

4. warunki brzegowe dla punktowo podpartego naroża płyty

$$(x_i \in \{0, A\}, y_j \in \{0, B\} \Rightarrow i \in \{1, m+1\}, j \in \{1, n+1\})$$

– zerowe przemieszczenie pionowe:

$$w_{ij} = 0, \quad (3.83)$$

5. warunki brzegowe dla swobodnego naroża płyty

$$(x_i \in \{0, A\}, y_j \in \{0, B\} \Rightarrow i \in \{1, m+1\}, j \in \{1, n+1\})$$

– zerowa reakcja naroża:

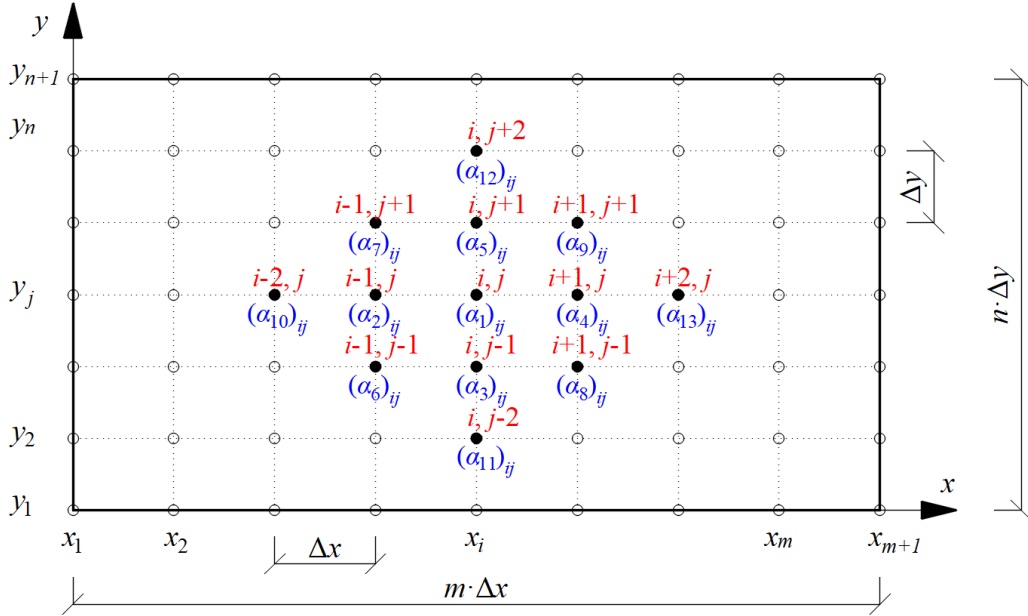
$$R_{ij} = 0,$$

$$w_{i+1,j+1} = w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1}.$$

Wartość  $w_{i-1,j+1}$  można zapisać przy użyciu wzoru (3.81), a wartość  $w_{i+1,j-1}$ , korzystając ze wzoru (3.79). Wówczas:

$$\begin{aligned} w_{i+1,j+1} = -w_{i-1,j-1} + \left[ -w_{i-1,j-1} + 2 \left( 1 + \nu\frac{h^2}{k^2} \right) w_{i,j-1} - \nu\frac{h^2}{k^2} (w_{i,j-2} + w_{ij}) \right] + \\ + \left[ -w_{i-1,j-1} + 2 \left( 1 + \nu\frac{k^2}{h^2} \right) w_{i-1,j} - \nu\frac{k^2}{h^2} (w_{i-2,j} + w_{ij}) \right] = \\ = -3w_{i-1,j-1} + 2 \left( 1 + \nu\frac{k^2}{h^2} \right) w_{i-1,j} + 2 \left( 1 + \nu\frac{h^2}{k^2} \right) w_{i,j-1} + \\ - \nu\frac{k^2}{h^2} w_{i-2,j} - \nu \left( \frac{h^2}{k^2} + \frac{k^2}{h^2} \right) w_{ij} - \nu\frac{h^2}{k^2} w_{i,j-2}. \end{aligned} \quad (3.84)$$

Równanie płyty w postaci różnicowej (3.39) należy zapisać dla wszystkich punktów płyty będących węzłami siatki MRS przedstawionej na rysunku 3.4. Poszczególne równania wyznacza się począwszy od punktu  $(i, j) = (1, 1)$ , kierując się wzdłuż dolnej krawędzi płyty aż do punktu  $(i, j) = (m + 1, 1)$ . Następnie przechodzi się do poziomu  $j = 2$ , pisząc równania od punktu  $(i, j) = (1, 2)$  do punktu  $(i, j) = (m + 1, 2)$ . Postępując dalej w takim porządku, pod koniec zapisu równań układu dochodzi się do punktu  $(i, j) = (m + 1, n + 1)$ . Otrzymuje się w ten sposób układ  $(m+1)(n+1)$  równań z  $(m+1)(n+1)$  niewiadomymi przemieszczeniami węzłów siatki MRS. Przy zapisie pojedynczego równania dla punktu  $(i, j)$  wykorzystuje się przemieszczenia w 13 punktach znajdujących się w jego otoczeniu. Rozmieszczenie tych punktów wraz z odpowiadającymi im współczynnikami  $(\alpha_l)_{ij}$ , potrzebnymi do utworzenia kombinacji liniowej z rozważanymi przemieszczeniami zgodnie ze wzorem (3.39), przedstawiono graficznie na rysunku 3.6.



Rysunek 3.6. Zbiór 13 punktów użytych do zapisu równania ugięcia płyty w postaci różnicowej (3.39) dla wybranego punktu  $(i, j)$  siatki MRS wraz ze wskazaniem odpowiednich współczynników  $(\alpha_l)_{ij}$ , przez które mnożone są przemieszczenia w kolejnych punktach związanych z punktem  $(i, j)$  [25]

Ostatecznie, bez uwzględniania warunków brzegowych, otrzymuje się dla rozpatrywanej płyty układ równań, który można zapisać w następującej postaci macierzowej:

$$\Delta \cdot \mathbf{w} = \mathbf{p}. \quad (3.85)$$

Macierz  $\Delta$  układu równań (3.85), nazywana dalej macierzą operatorów różnicowych, ma strukturę macierzy blokowej 5-przekątniowej:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 & \mathbf{B}_1 & \mathbf{C}_1 & & & & \\ \mathbf{D}_1 & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & & & \\ \mathbf{E}_1 & \mathbf{D}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{C}_3 & & \\ & \mathbf{E}_2 & \mathbf{D}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_4 & \mathbf{C}_4 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbf{E}_{n-3} & \mathbf{D}_{n-2} & \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{C}_{n-1} \\ & & & & \mathbf{E}_{n-2} & \mathbf{D}_{n-1} & \mathbf{A}_n & \mathbf{B}_n \\ & & & & & \mathbf{E}_{n-1} & \mathbf{D}_n & \mathbf{A}_{n+1} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)} \quad (3.86)$$

Poszczególne macierze-bloki składające się na macierz (3.86) są macierzami 1-, 3- lub 5-przekątniowymi, a ich elementy stanowią współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  wyrażone wzorami (3.40)–(3.52) i zapisane dla odpowiednich punktów  $(i, j)$  siatki MRS. Poszczególne macierze-bloki o wymiarze  $(m+1) \times (m+1)$  przedstawiają się następująco:

- macierze  $\mathbf{A}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n+1$ )
  - Są to macierze 5-przekątniowe powstałe w wyniku zapisu równań układu (3.85) dla punktów  $j$ -tego poziomu siatki MRS pokrywającej płytę.
  - W macierzach tych  $i$ -ty wiersz ( $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ ) zawiera współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  przy niewiadomych przemieszczeniach  $w_{i-2,j}$ ,  $w_{i-1,j}$ ,  $w_{ij}$ ,  $w_{i+1,j}$ ,  $w_{i+2,j}$  punktów występujących w obrębie powierzchni płyty.
  - Macierze mają strukturę pokazaną poniżej:

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} (\alpha_1)_{1j} & (\alpha_4)_{1j} & (\alpha_{13})_{1j} & & & & \\ (\alpha_2)_{2j} & (\alpha_1)_{2j} & (\alpha_4)_{2j} & (\alpha_{13})_{2j} & & & \\ (\alpha_{10})_{3j} & (\alpha_2)_{3j} & (\alpha_1)_{3j} & (\alpha_4)_{3j} & (\alpha_{13})_{3j} & & \\ & (\alpha_{10})_{4j} & (\alpha_2)_{4j} & (\alpha_1)_{4j} & (\alpha_4)_{4j} & (\alpha_{13})_{4j} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & (\alpha_{10})_{m-1,j} & (\alpha_2)_{m-1,j} & (\alpha_1)_{m-1,j} & (\alpha_4)_{m-1,j} & (\alpha_{13})_{m-1,j} \\ & & & & (\alpha_{10})_{m,j} & (\alpha_2)_{m,j} & (\alpha_1)_{m,j} & (\alpha_4)_{m,j} \\ & & & & & (\alpha_{10})_{m+1,j} & (\alpha_2)_{m+1,j} & (\alpha_1)_{m+1,j} \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} \quad (3.87)$$

- macierze  $\mathbf{B}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ )
  - Są to macierze 3-przekątniowe powstałe jako efekt zapisu równań układu (3.85) dla punktów  $j$ -tego poziomu siatki MRS pokrywającej płytę.
  - W macierzach tych  $i$ -ty wiersz ( $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ ) zawiera współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  przy niewiadomych przemieszczeniach  $w_{i-1,j+1}$ ,  $w_{i,j+1}$ ,  $w_{i+1,j+1}$  punktów znajdujących się w obszarze płyty.

- Strukturę macierzy pokazano poniżej:

$$\mathbf{B}_j = \begin{bmatrix} (\alpha_5)_{1j} & (\alpha_9)_{1j} & & & & \\ (\alpha_7)_{2j} & (\alpha_5)_{2j} & (\alpha_9)_{2j} & & & \\ & (\alpha_7)_{3j} & (\alpha_5)_{3j} & (\alpha_9)_{3j} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & (\alpha_7)_{mj} & (\alpha_5)_{mj} & (\alpha_9)_{mj} \\ & & & & (\alpha_7)_{m+1,j} & (\alpha_5)_{m+1,j} \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} . \quad (3.88)$$

- macierze  $\mathbf{C}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ )
  - Są to macierze diagonalne utworzone na podstawie równań układu (3.85) zapisanych dla punktów  $j$ -tego poziomu siatki MRS pokrywającej płytę.
  - W macierzach tych  $i$ -ty wiersz ( $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ ) zawiera współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  przy niewiadomych przemieszczeniach  $w_{i,j+2}$  punktów mieszczących się w obszarze płyty.
  - Macierze mają niżej pokazaną postać:

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} (\alpha_{12})_{1j} & & & & & \\ & (\alpha_{12})_{2j} & & & & \\ & & (\alpha_{12})_{3j} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & (\alpha_{12})_{mj} & \\ & & & & & (\alpha_{12})_{m+1,j} \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} . \quad (3.89)$$

- macierze  $\mathbf{D}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ )
  - Są to macierze 3-przekątniowe odnoszące się do równań układu (3.85) zapisanych dla punktów  $j+1$ -szego poziomu siatki MRS pokrywającej płytę.
  - W macierzach tych  $i$ -ty wiersz ( $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ ) zawiera współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  przy niewiadomych przemieszczeniach  $w_{i-1,j-1}$ ,  $w_{i,j-1}$ ,  $w_{i+1,j-1}$  punktów zlokalizowanych w obrębie powierzchni płyty.
  - Strukturę macierzy można zapisać jak poniżej:

$$\mathbf{D}_j = \begin{bmatrix} (\alpha_3)_{1j} & (\alpha_8)_{1j} & & & & \\ (\alpha_6)_{2j} & (\alpha_3)_{2j} & (\alpha_8)_{2j} & & & \\ & (\alpha_6)_{3j} & (\alpha_3)_{3j} & (\alpha_8)_{3j} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & (\alpha_6)_{mj} & (\alpha_3)_{mj} & (\alpha_8)_{mj} \\ & & & & (\alpha_6)_{m+1,j} & (\alpha_3)_{m+1,j} \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)} . \quad (3.90)$$

- macierze  $\mathbf{E}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n - 1$ )
  - Są to macierze diagonalne utworzone na podstawie równań układu (3.85) zapisanych dla punktów poziomu o numerze  $j + 2$  w obrębie siatki MRS pokrywającej płytę.
  - W macierzach tych  $i$ -ty wiersz ( $i = 1, 2, 3, \dots, m + 1$ ) zawiera współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  przy niewiadomych przemieszczeniach  $w_{i,j-2}$  punktów mieszczących się w obszarze płyty.
  - Macierze mają poniższą postać:

$$\mathbf{E}_j = \begin{bmatrix} (\alpha_{11})_{1j} & & & & & \\ & (\alpha_{11})_{2j} & & & & \\ & & (\alpha_{11})_{3j} & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & (\alpha_{11})_{m,j} & \\ & & & & & (\alpha_{11})_{m+1,j} \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}. \quad (3.91)$$

Wektor niewiadomych w układzie równań (3.85) ma następującą postać blokową:

$$\mathbf{w} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{w}_1 \\ \mathbf{w}_2 \\ \mathbf{w}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{n+1} \end{matrix} \right\}_{(n+1) \times 1}, \quad (3.92)$$

gdzie poszczególne bloki są wektorami kolumnowymi zawierającymi przemieszczenia punktów siatki MRS należących do kolejnych poziomów  $j = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ , tzn.

$$\mathbf{w}_j = \left\{ \begin{matrix} w_{1j} \\ w_{2j} \\ w_{3j} \\ \vdots \\ w_{m+1,j} \end{matrix} \right\}_{(m+1) \times 1}. \quad (3.93)$$

Wektor wyrazów wolnych w układzie równań (3.85) ma poniższą postać blokową:

$$\mathbf{p} = \left\{ \begin{matrix} \mathbf{p}_1 \\ \mathbf{p}_2 \\ \mathbf{p}_3 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n+1} \end{matrix} \right\}_{(n+1) \times 1}, \quad (3.94)$$

gdzie poszczególne bloki są wektorami kolumnowymi zawierającymi wartości obciążenia rozłożonego przypadającego na poszczególne punkty siatki MRS w kolejnych poziomach  $j = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ , tzn.

$$\mathbf{p}_j = \left\{ \begin{array}{c} p_{1j} \\ p_{2j} \\ p_{3j} \\ \vdots \\ p_{m+1,j} \end{array} \right\}_{(m+1) \times 1} . \quad (3.95)$$

W układzie równań (3.85) przyjęto, że niewiadomymi są wyłącznie przemieszczenia punktów siatki MRS mieszczących się w obszarze płyty. Jednak poszczególne równania (3.39), zapisane dla kolejnych punktów siatki, mogą zawierać tzw. punkty fikcyjne (ang. *ghost points*) zlokalizowane poza obszarem płyty. Przemieszczenia w tych punktach eliminuje się przez wprowadzenie odpowiednich warunków brzegowych, czego efektem jest wyrażenie ich przy pomocy przemieszczeń punktów w obrębie płyty. Po przyjęciu konkretnych warunków brzegowych dla rozważanego zadania statyki płyt macierz  $\Delta$  układu równań (3.85) oraz wektor wyrazów wolnych (3.94) należy zmodyfikować ze względu na punkty fikcyjne oraz zerowe przemieszczenia w punktach podporowych. Szczegółowy opis tych modyfikacji dla trzech rodzajów warunków podparcia płyt (płyta podparta na obwodzie/podparta na dwóch przeciwległych krawędziach/wspornikowa) przedstawiono w dodatku A do niniejszej dysertacji. W odpowiednich wyprowadzeniach wykorzystywano wzory (3.71)–(3.84).

Dla każdego z rozważanych warunków podparcia modyfikacja wektora wyrazów wolnych  $\mathbf{p}$  w układzie równań (3.85) polega na zastąpieniu zerami elementów tego wektora odpowiadających punktom siatki MRS, w których występują zerowe przemieszczenia płyty.

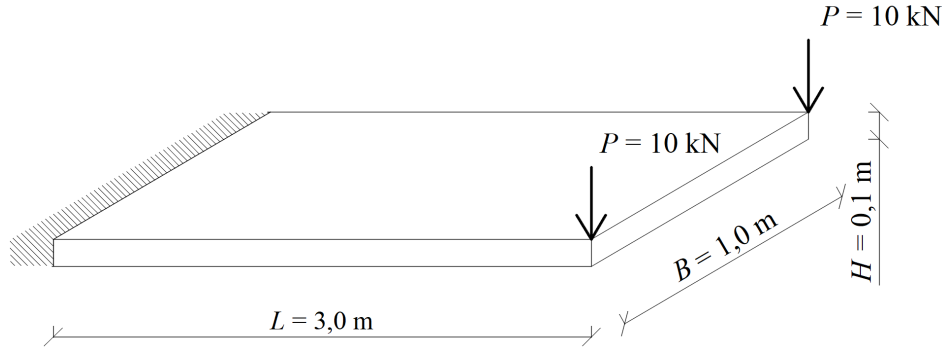
### 3.3. Przykłady analizy statycznej płyt

W niniejszym podrozdziale przedstawiono kilka przykładów wyznaczania ugięć płyt przy zastosowaniu metody elementów skończonych i metody różnic skończonych. Przyjęto różne schematy podparcia i obciążenia badanych płyt.

**Przykład 3.1.** *Płyta wspornikowa o stałej grubości obciążona na wolnym końcu siłami skupionymi*

W przykładzie rozpatrzono tzw. płytę-belkę o wymiarach i obciążeniu jak na rysunku 3.7. Przyjęto, że szerokość płyty  $B = 1,0$  m jest 3 razy mniejsza od jej

długości  $L = 3,0$  m. Płyta obciążona jest dwiema siłami skupionymi  $P$  o wartości 10 kN zlokalizowanymi w pobliżu końców jej wolnej krawędzi. Grubość płyty jest stała i wynosi  $H = 0,1$  m. Macierz sztywności pojedynczego elementu skończonego dyskretyzującego powierzchnię płyty obliczono zgodnie ze wzorem (3.17). Elementy macierzy przyjęto na podstawie całkowania dokładnego zgodnie z [1].



Rysunek 3.7. Schemat płyty wspornikowej rozpatrywanej w przykładzie 3.1

Rozpatrywana płyta wykonana jest z materiału izotropowego o module Younga  $E = 205 \text{ GPa} = 205 \cdot 10^6 \text{ kPa}$  oraz współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$ . Sztywność płyty na zginanie wyznaczona zgodnie ze wzorem (3.5) jest stała i wynosi:

$$D = \frac{EH^3}{12(1-\nu^2)} = \frac{205 \cdot 10^6 \cdot 0,1^3}{12(1-0,3^2)} = 18772,89 \text{ kNm}.$$

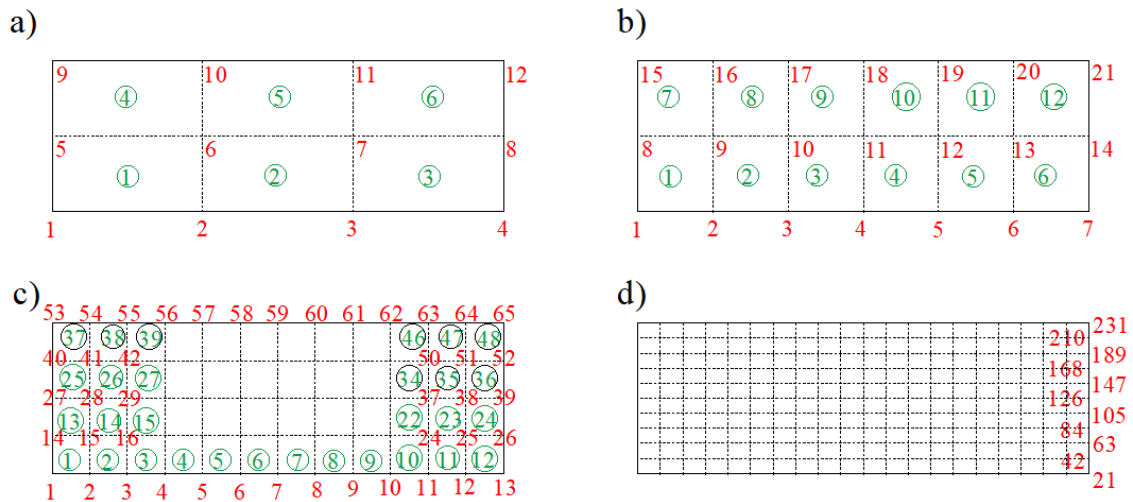
Traktując płytę jak belkę<sup>2</sup>, można wyznaczyć przemieszczenie pionowe jej wolnego końca, korzystając z równania pracy wirtualnej. Wówczas zakłada się, że na całej szerokości płyty przemieszczenie jest jednakowe i wynosi:

$$\delta^{(RPW)} = 0,010537 \text{ m} = 1,0537 \text{ cm}. \quad (3.96)$$

Aby obliczyć numerycznie przemieszczenia punktów płyty przy swobodnej krawędzi, zdyskretyzowano jej powierzchnię przy pomocy różnych siatek przedstawionych na rysunku 3.8. Na siatkach pokazano przyjęty sposób numeracji elementów skończonych oraz ich węzłów.

W tabeli 3.1 przedstawiono wartości ugięć wyznaczone przy pomocy metod numerycznych MES i MRS, opisanych w podrozdziałach 3.2.1 oraz 3.2.2. Przemieszczenia wyznaczono w węzłach siatek z rysunku 3.8 zlokalizowanych przy swobodnej krawędzi płyty.

<sup>2</sup> Płyta pracująca dwukierunkowo, zgodnie z [108], spełnia warunek:  $0,5 \leq L/B \leq 2$ . W analizowanym zadaniu długości krawędzi płyty spełniają zależność:  $L/B = 3$ , a zatem płytę można w przybliżeniu uważać za pracującą jak belka.



Rysunek 3.8. Sposoby dyskretyzacji powierzchni płyty: siatka  $3 \times 2$  (a), siatka  $6 \times 2$  (b), siatka  $12 \times 4$  (c), siatka  $20 \times 10$  (d)

Na podstawie wyników przedstawionych w tabeli 3.1 można stwierdzić, że ugięcia otrzymane przy pomocy MES/MRS są mniejsze w porównaniu z wartością uzyskaną z równania pracy wirtualnej (wzór (3.96)). Wynika to z faktu, że przy obliczaniu przemieszczenia na podstawie równania pracy wirtualnej płytę potraktowano jak belkę, tzn. pominięto jej pracę po kierunku mniejszej rozpiętości. Jest to postępowanie uproszczone i mniej dokładne. Ugięcia otrzymane przy zastosowaniu MES/MRS uwzględniają pracę płyty w dwóch kierunkach. Są więc mniejsze w wyniku przekazania części energii na zginanie w dwóch płaszczyznach i skręcanie. Można zauważyć również, że wraz ze wzrostem liczby elementów skończonych wartości ugięć obliczone zgodnie z MES rosną. Wynika to z faktu, że dyskretyzując powierzchnię środkową płyty przy użyciu większej liczby elementów skończonych, otrzymuje się więcej punktów węzłowych, w których obliczane są wartości ugięć. Układ można zatem uznać za mniej sztywny w porównaniu z płytą zdyskretyzowaną za pomocą siatki MES o mniejszej gęstości.

Porównując wartości przemieszczeń otrzymane zgodnie z metodologiami MES i MRS, można stwierdzić, że metoda różnic skończonych wymaga większej gęstości siatki w celu uzyskania wyników bliższych stanowi rzeczywistości. Stosując metodę elementów skończonych, już przy użyciu siatki  $6 \times 2$  uzyskano zadowalające wyniki. W przypadku metody różnic skończonych zachodzi potrzeba przyjęcia gęstszej siatki, przynajmniej  $20 \times 10$ , aby wyniki zaczęły zbliżać się do wartości otrzymanej zgodnie z zasadami MES.

Posługując się jedynie równaniem pracy wirtualnej przyjmuje się, że wszystkie

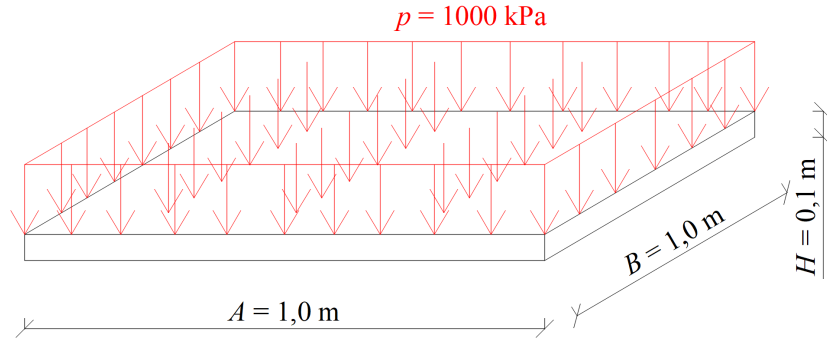
Tabela 3.1. Wartości przemieszczeń wybranych punktów płyty z rysunku 3.7 otrzymane przy zastosowaniu MES oraz MRS dla różnych dyskretyzacji powierzchni płyty

| Gęstość siatki<br>MES/MRS | Nr węzła siatki<br>MES/MRS | Ugięcie wg MES<br>[cm] | Ugięcie wg MRS<br>[cm] |
|---------------------------|----------------------------|------------------------|------------------------|
| $3 \times 2$              | 4                          | 1,0135                 | 0,3599                 |
|                           | 8                          | 1,0124                 | 0,4536                 |
|                           | 12                         | 1,0135                 | 0,3599                 |
| $6 \times 2$              | 7                          | 1,0199                 | 0,009794               |
|                           | 14                         | 1,0187                 | 0,019290               |
|                           | 21                         | 1,0199                 | 0,009794               |
| $12 \times 4$             | 13                         | 1,0210                 | 1,4581                 |
|                           | 26                         | 1,0197                 | 1,4561                 |
|                           | 39                         | 1,0192                 | 1,4553                 |
|                           | 52                         | 1,0197                 | 1,4561                 |
|                           | 65                         | 1,0210                 | 1,4581                 |
| $20 \times 10$            | 21                         | 1,0215                 | 1,0119                 |
|                           | 42                         | 1,0208                 | 1,0112                 |
|                           | 63                         | 1,0202                 | 1,0107                 |
|                           | 84                         | 1,0198                 | 1,0102                 |
|                           | 105                        | 1,0195                 | 1,0100                 |
|                           | 126                        | 1,0195                 | 1,0099                 |
|                           | 147                        | 1,0195                 | 1,0100                 |
|                           | 168                        | 1,0198                 | 1,0102                 |
|                           | 189                        | 1,0202                 | 1,0107                 |
|                           | 210                        | 1,0208                 | 1,0112                 |
|                           | 231                        | 1,0215                 | 1,0119                 |

punkty na swobodnej krawędzi płyty przemieszczają się o jednakową wartość. Natomiast na podstawie obliczeń numerycznych można stwierdzić, że między punktami przyłożenia sił skupionych wartości ugięć są mniejsze w porównaniu z ugięciami w punktach przyłożenia tych sił.

**Przykład 3.2.** *Płyta kwadratowa o stałej grubości obciążona równomiernie, przy różnych schematach podparcia*

W przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową o stałej grubości, obciążoną równomiernie na całej powierzchni, o wymiarach i wartości obciążenia zgodnie z rysunkiem 3.9. Rozpatrzono cztery różne schematy podparcia płyty przedstawione na



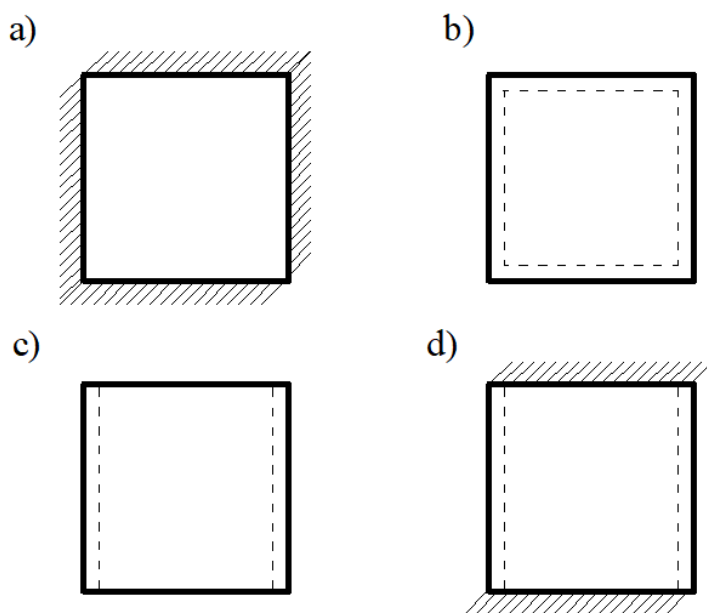
Rysunek 3.9. Wymiary oraz schemat obciążenia płyty kwadratowej rozpatrywanej w przykładzie 3.2

rysunku 3.10. Dla kolejnych schematów a)–d) przemieszczenia w charakterystycznych punktach płyty wyznaczone analitycznie przyjmują następujące wartości [9]:

- a) przemieszczenie pionowe w środku płyty:  $w = 0,00126 pA^4/D$ ,
- b) przemieszczenie pionowe w środku płyty:  $w = 0,00406 pA^4/D$ ,
- c) przemieszczenie pionowe w środku płyty:  $w = 0,01309 pA^4/D$  oraz przemieszczenie pionowe w środku swobodnej krawędzi płyty:  $w = 0,01509 pA^4/D$ ,
- d) przemieszczenie pionowe w środku płyty:  $w = 0,00192 pA^4/D$ .

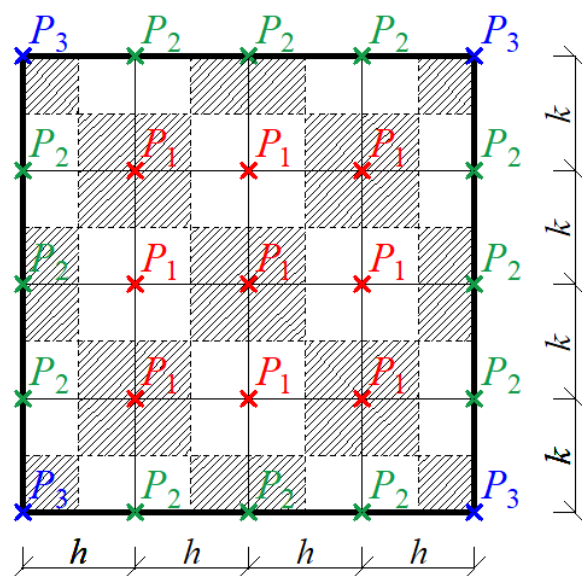
Przyjęto, że płyta wykonana jest z materiału izotropowego o module Younga  $E = 10920$  GPa oraz współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$ . Wówczas sztywność płyty na zginanie wynosi  $D = 1000$  kNm oraz mnożnik przemieszczenia  $pA^4/D = 1,0$  m.

W tabeli 3.2 przedstawiono wartości przemieszczeń pionowych w charakterystycznych punktach badanej płyty kwadratowej, otrzymane dla czterech schematów podparcia według rysunku 3.10. Do obliczeń numerycznych zastosowano metodę elementów skończonych oraz metodę różnic skończonych. W metodzie elementów skończonych wektor wyrazów wolnych  $\mathbf{f}$ , występujący w równaniu (3.21), wyznaczono dwoma sposobami. W pierwszym przypadku sprowadzono obciążenie równomierne rozłożone do węzłów siatki MES zgodnie z rysunkiem 3.11. Wówczas wzór (3.23) upraszcza się do postaci  $\mathbf{f} = \mathbf{P}_w$ . W drugim przypadku skorzystano z funkcji kształtu i zastosowano wzory (3.23) oraz (3.24). W tabeli 3.2 przyjęto kilka sposobów



Rysunek 3.10. Schematy podparcia płyty kwadratowej rozpatrywanej w przykładzie 3.2: płyta utwierdzona na obwodzie (a), płyta swobodnie podparta na obwodzie (b), płyta swobodnie podparta na dwóch przeciwległych krawędziach (c), płyta swobodnie podparta na dwóch przeciwległych krawędziach i utwierdzona na pozostałych krawędziach (d)

dyskretyzacji płyty. Siatki MES/MRS oraz numerację elementów skończonych i ich węzłów przyjęto w sposób analogiczny, jak to zostało wcześniej przedstawione na rysunku 3.8.

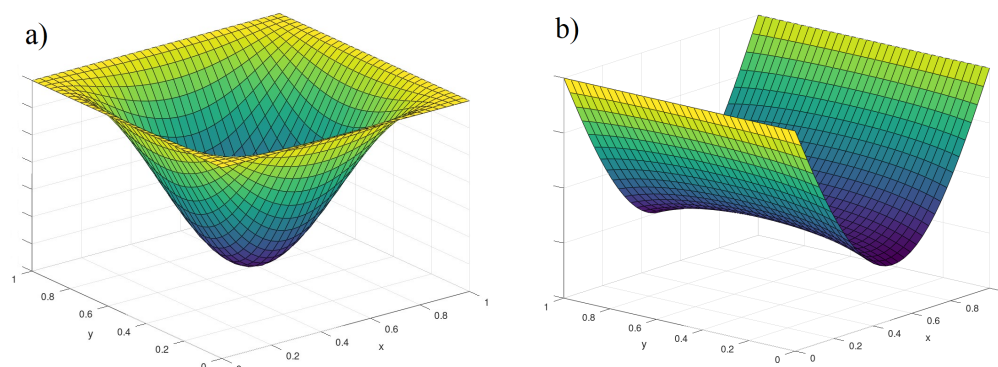


Rysunek 3.11. Sposób sprowadzania obciążenia rozłożonego na powierzchni płyty do węzłów siatki MES

Tabela 3.2. Ugięcia w wybranych punktach płyty z rysunku 3.9 otrzymane za pomocą MRS/MES dla różnych dyskretyzacji powierzchni płyty, stosując dwa warianty obliczania wektora obciążenia  $\mathbf{f}$  zgodnie z zasadami MES – sprowadzając obciążenie rozłożone do węzłów siatki MES (a) lub wyznaczając wektor obciążenia przy użyciu funkcji kształtu (b)

| Siatka<br>MES/MRS | Warunki<br>brzegowe                                 | Punkt<br>płyty                           | Ugięcie wg MES<br>$\times 10^{-3}$ [m] |        | Ugięcie wg MRS<br>$\times 10^{-3}$ [m] |
|-------------------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------|--------|----------------------------------------|
|                   |                                                     |                                          | a)                                     | b)     |                                        |
| $2 \times 2$      | utwierdzona<br>na obwodzie<br>(rys. 3.10a)          | środek<br>płyty                          | 1,4796                                 | 1,4796 | 2,6038                                 |
| $4 \times 4$      |                                                     |                                          | 1,4033                                 | 1,4033 | 1,7992                                 |
| $8 \times 8$      |                                                     |                                          | 1,3039                                 | 1,3039 | 1,4242                                 |
| $16 \times 16$    |                                                     |                                          | 1,2752                                 | 1,2752 | 1,3071                                 |
| $32 \times 32$    |                                                     |                                          | 1,2678                                 | 1,2678 | 1,2758                                 |
| $2 \times 2$      | podparta<br>na obwodzie<br>(rys. 3.10b)             | środek<br>płyty                          | 3,4460                                 | 5,0632 | 3,9057                                 |
| $4 \times 4$      |                                                     |                                          | 3,9392                                 | 4,3282 | 4,0277                                 |
| $8 \times 8$      |                                                     |                                          | 4,0330                                 | 4,1293 | 4,0542                                 |
| $16 \times 16$    |                                                     |                                          | 4,0551                                 | 4,0791 | 4,0599                                 |
| $32 \times 32$    |                                                     |                                          | 4,0605                                 | 4,0665 | 4,0613                                 |
| $2 \times 2$      | podparta<br>na dwóch<br>krawędziach<br>(rys. 3.10c) | środek<br>płyty                          | 10,115                                 | 12,895 | –                                      |
| $4 \times 4$      |                                                     |                                          | 12,329                                 | 12,985 | 13,757                                 |
| $8 \times 8$      |                                                     |                                          | 12,901                                 | 13,062 | 13,258                                 |
| $16 \times 16$    |                                                     |                                          | 13,045                                 | 13,086 | 13,133                                 |
| $32 \times 32$    |                                                     |                                          | 13,082                                 | 13,092 | 13,102                                 |
| $2 \times 2$      | podparta<br>na dwóch<br>krawędziach<br>(rys. 3.10c) | środek<br>swobodnej<br>krawędzi<br>płyty | 11,592                                 | 13,510 | –                                      |
| $4 \times 4$      |                                                     |                                          | 14,121                                 | 14,555 | 15,635                                 |
| $8 \times 8$      |                                                     |                                          | 14,787                                 | 14,892 | 15,164                                 |
| $16 \times 16$    |                                                     |                                          | 14,955                                 | 14,981 | 15,048                                 |
| $32 \times 32$    |                                                     |                                          | 14,997                                 | 15,004 | 15,019                                 |
| $2 \times 2$      | podparta<br>wg rys. 3.10d)                          | środek<br>płyty                          | 2,0703                                 | 2,5561 | 3,1245                                 |
| $4 \times 4$      |                                                     |                                          | 2,0102                                 | 2,1010 | 2,4656                                 |
| $8 \times 8$      |                                                     |                                          | 1,9427                                 | 1,9638 | 2,0873                                 |
| $16 \times 16$    |                                                     |                                          | 1,9236                                 | 1,9288 | 1,9622                                 |
| $32 \times 32$    |                                                     |                                          | 1,9188                                 | 1,9201 | 1,9284                                 |

Na rysunku 3.12 pokazano graficznie deformację powierzchni środkowej płyty w przypadku, gdy płyta jest utwierdzona na obwodzie według rysunku 3.10a) oraz swobodnie podparta na dwóch krawędziach zgodnie z rysunkiem 3.10c).



Rysunek 3.12. Wykresy ugięcia płyty analizowanej w przykładzie 3.2, utwierdzonej na obwodzie (a) oraz swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach (b)

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 3.2, można wyciągnąć wniosek, że zadowalające wartości przemieszczeń punktu środkowego płyty, nie różniące się o więcej niż 1% w odniesieniu do rozwiązania analitycznego, otrzymano w następujących przypadkach:

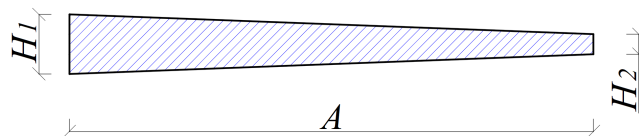
- przy zastosowaniu MES:
  - dla płyty utwierdzonej na obwodzie, przyjmując siatkę  $32 \times 32$ ,
  - dla płyty podpartej swobodnie na obwodzie, stosując siatkę  $8 \times 8$  oraz sposób a) obliczania wektora  $\mathbf{f}$  lub przyjmując siatkę  $16 \times 16$  wraz ze sposobem b) wyznaczania tego wektora,
  - dla płyty podpartej swobodnie na dwóch krawędziach, zakładając gęstość siatki  $8 \times 8$  oraz sposób b) obliczania wektora  $\mathbf{f}$  lub przyjmując siatkę  $16 \times 16$  wraz ze sposobem a) wyznaczania tego wektora,
  - dla płyty podpartej w sposób mieszany według rysunku 3.10d), stosując siatkę o gęstości  $16 \times 16$ ,
- przy zastosowaniu MRS:
  - dla płyty podpartej swobodnie na obwodzie, przyjmując siatkę  $4 \times 4$ ,
  - dla płyty podpartej swobodnie na dwóch krawędziach, stosując siatkę  $16 \times 16$ ,
  - dla płyty podpartej w sposób mieszany według rysunku 3.10d), zakładając siatkę  $32 \times 32$ .

Porównując wyniki otrzymane obiema metodami numerycznymi (MES i MRS), można stwierdzić, że metoda elementów skończonych okazała się być bardziej efektywna dla płyty utwierdzonej na obwodzie, podpartej swobodnie na dwóch krawędziach oraz podpartej w sposób mieszany. Otrzymano wówczas wyniki bliższe analitycznym w porównaniu z metodą różnic skończonych. Z kolei metoda różnic skończonych po-

zwoliła otrzymać korzystniejsze wartości ugięcia dla płyty podpartej swobodnie na obwodzie oraz dla płyty podpartej swobodnie na dwóch krawędziach w przypadku obliczania przemieszczenia środka jej swobodnej krawędzi.

**Przykład 3.3.** *Płyta kwadratowa o liniowo zmiennej grubości obciążona równomiernie, przy różnych schematach podparcia*

W przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową o liniowo zmiennej grubości, obciążoną równomiernie na całej powierzchni obciążeniem o wartości  $p = 1000$  kPa. Przyjęto, że płyta posiada liniowo zmienną grubość w jednym kierunku, a jej przekrój wzdłuż tego kierunku przedstawiono na rysunku 3.13. Przyjęto długość boku płyty  $A = 1,0$  m. Minimalna grubość płyty wynosi  $H_2 = 0,1$  m, a maksymalna grubość przyjmuje wartości ze zbioru  $H_1 \in \{0,2, 0,3, 0,4\}$  m.



Rysunek 3.13. Przekrój płyty o zmiennej grubości, analizowanej w przykładzie 3.3

Rozpatrzono cztery różne schematy podparcia płyty, które przedstawiono w poprzednim przykładzie na rysunku 3.10, przy czym założono, że liniowa zmienność grubości występuje wzdłuż kierunku poziomego. W tabeli 3.3 przedstawiono wartości przemieszczeń pionowych w charakterystycznych punktach płyty dla czterech wariantów podparcia według rysunku 3.10 oraz dla trzech przypadków maksymalnej grubości płyty  $H_1$  zgodnie z rysunkiem 3.13. Użyto metodę różnic skończonych oraz przyjęto kilka gęstości siatki MRS w celu zbadania zbieżności uzyskanych wyników.

Podsumowując wyniki zestawione w tabeli 3.3, można wyciągnąć wniosek, że w większości rozważanych przypadków zamocowania płyty wyraźna zbieżność wyników rozpoczyna się od siatki  $16 \times 16$ . Przyjmując kryterium różnicy procentowej między wynikami dla kolejnych siatek mniejszej od 1%, można stwierdzić, że zadowalające wartości ugięć otrzymano dla siatki  $32 \times 32$  w przypadku płyty swobodnie podpartej na dwóch krawędziach przy  $H_1/H_2 = 2$  oraz w sytuacji swobodnego podparcia płyty na obwodzie przy  $H_1/H_2 \in \{3, 4\}$ . Dla płyty utwierdzonej na obwodzie, podpartej według rysunku 3.10d) lub podpartej swobodnie na dwóch krawędziach przy  $H_1/H_2 \in \{3, 4\}$  należałoby przeprowadzić obliczenia, przyjmując siatkę MRS o większej gęstości. W przypadku płyty podpartej swobodnie na obwodzie i speł-

Tabela 3.3. Wartości przemieszczeń wybranych punktów płyty z przykładu 3.3 otrzymane przy zastosowaniu MRS dla różnych dyskretyzacji powierzchni płyty oraz trzech różnych relacji maksymalnej i minimalnej grubości płyty

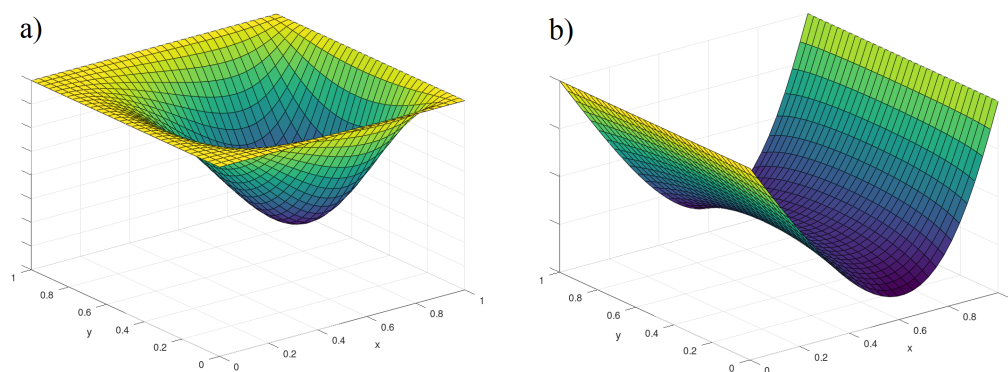
| Siatka<br>MRS  | Warunki<br>brzegowe                                 | Punkt<br>płyty                           | Ugięcie wg MRS dla $H_2 = 0,1$ m<br>$\times 10^{-3}$ [m] |               |               |
|----------------|-----------------------------------------------------|------------------------------------------|----------------------------------------------------------|---------------|---------------|
|                |                                                     |                                          | $H_1 = 0,2$ m                                            | $H_1 = 0,3$ m | $H_1 = 0,4$ m |
| $2 \times 2$   | utwierdzona<br>na obwodzie<br>(rys. 3.10a)          | środek<br>płyty                          | 0,8317                                                   | 0,3887        | 0,2176        |
| $4 \times 4$   |                                                     |                                          | 0,5727                                                   | 0,2682        | 0,1521        |
| $8 \times 8$   |                                                     |                                          | 0,4454                                                   | 0,2034        | 0,1126        |
| $16 \times 16$ |                                                     |                                          | 0,4039                                                   | 0,1808        | 0,0978        |
| $32 \times 32$ |                                                     |                                          | 0,3926                                                   | 0,1745        | 0,0937        |
| $2 \times 2$   | podparta<br>na obwodzie<br>(rys. 3.10b)             | środek<br>płyty                          | 1,2980                                                   | 0,6457        | 0,3852        |
| $4 \times 4$   |                                                     |                                          | 1,2619                                                   | 0,5741        | 0,3141        |
| $8 \times 8$   |                                                     |                                          | 1,2442                                                   | 0,5507        | 0,2941        |
| $16 \times 16$ |                                                     |                                          | 1,2386                                                   | 0,5440        | 0,2886        |
| $32 \times 32$ |                                                     |                                          | 1,2371                                                   | 0,5423        | 0,2873        |
| $4 \times 4$   | podparta<br>na dwóch<br>krawędziach<br>(rys. 3.10c) | środek<br>płyty                          | 5,0502                                                   | 3,0668        | 2,4918        |
| $8 \times 8$   |                                                     |                                          | 4,5740                                                   | 2,4423        | 1,6005        |
| $16 \times 16$ |                                                     |                                          | 4,4559                                                   | 2,3080        | 1,4531        |
| $32 \times 32$ |                                                     |                                          | 4,4264                                                   | 2,2754        | 1,4190        |
| $4 \times 4$   | podparta<br>na dwóch<br>krawędziach<br>(rys. 3.10c) | środek<br>swobodnej<br>krawędzi<br>płyty | 5,7824                                                   | 3,5553        | 2,9299        |
| $8 \times 8$   |                                                     |                                          | 5,2649                                                   | 2,8388        | 1,8794        |
| $16 \times 16$ |                                                     |                                          | 5,1347                                                   | 2,6824        | 1,7032        |
| $32 \times 32$ |                                                     |                                          | 5,1018                                                   | 2,6441        | 1,6622        |
| $2 \times 2$   | podparta<br>wg rys. 3.10d)                          | środek<br>płyty                          | 1,0138                                                   | 0,4853        | 0,2781        |
| $4 \times 4$   |                                                     |                                          | 0,7603                                                   | 0,3377        | 0,1805        |
| $8 \times 8$   |                                                     |                                          | 0,6362                                                   | 0,2788        | 0,1475        |
| $16 \times 16$ |                                                     |                                          | 0,5966                                                   | 0,2606        | 0,1376        |
| $32 \times 32$ |                                                     |                                          | 0,5859                                                   | 0,2558        | 0,1350        |

niającej warunek  $H_1/H_2 = 2$  można uznać za zadowalające wartości przemieszczeń otrzymane dla siatki  $16 \times 16$ .

Porównując ze sobą wyniki z tabel 3.2 oraz 3.3, można stwierdzić ponadto, że dwukrotne zwiększenie grubości płyty  $H_1$  przy jednej krawędzi względem przyjętej stałej grubości  $H_2$  na przeciwległej krawędzi powoduje 2,9–3,3-krotne zmniejszenie wartości przemieszczeń, zakładając siatkę  $32 \times 32$ , w odniesieniu do wartości tych

przemieszczeń dla płyty o stałej grubości  $H = H_2$ . W przypadku kolejnych relacji  $H_1/H_2 \in \{3, 4\}$  zmniejszenie wartości przemieszczeń w porównaniu z sytuacją stałej grubości  $H = H_2$  jest odpowiednio 5,7–7,5-krotne oraz 9,0–14,3-krotne, w zależności od przyjętego schematu podparcia płyty.

Na rysunku 3.14 pokazano graficznie ugięcie powierzchni środkowej, wyznaczone dla płyty utwierdzonej na obwodzie według rysunku 3.10a) oraz dla płyty swobodnie podpartej na dwóch krawędziach zgodnie z rysunkiem 3.10c). Przyjęto, że maksymalna grubość płyty  $H_1$  jest cztery razy większa od grubości minimalnej  $H_2$ . Na rysunku 3.14a) można wyraźnie zauważyć przesunięcie ekstremum przemieszczenia w kierunku obszarów o mniejszej grubości, charakteryzujących się mniejszą sztywnością płyty. Ten niesymetryczny rozkład przemieszczeń występuje także w przypadku pokazanym na rysunku 3.14b), jednak w przedstawionej perspektywie jest on mniej widoczny.



Rysunek 3.14. Wykreśy ugięcia płyty analizowanej w przykładzie 3.3, utwierdzonej na obwodzie (a) oraz swobodnie podpartej na dwóch przeciwległych krawędziach (b)



## 4. Analiza dynamiczna płyt prostokątnych w próżni

W niniejszym rozdziale przedstawiono problem wyznaczania charakterystyk dynamicznych płyt prostokątnych izo- lub ortotropowych umieszczonych w próżni, o różnorodnych warunkach podparcia. W ramach prowadzonych analiz wyznaczano częstości i postacie drgań własnych płyt przy założeniu, że nie są one poddane działaniu dodatkowych sił wymuszających. Podobnie jak w poprzednim rozdziale, wykorzystano do badań dwie metody numeryczne – metodę elementów skończonych oraz metodę różnic skończonych.

Na początku rozdziału przedstawiono wprowadzenie teoretyczne do tematyki analizy dynamicznej płyt, w którym omówiono sposób zastosowania każdej z użytych metod numerycznych. Na zakończenie rozdziału podano najważniejsze wyniki będące efektem obliczeń numerycznych, do których wykorzystano autorskie procedury obliczeniowe przygotowane w języku oprogramowania Octave.

W zagadnieniach dynamicznych stanowiących przedmiot niniejszego rozdziału przyjmuje się, że rozpatrywane układy materialne są w ruchu. W ogólnym przypadku w tego typu problemach uwzględnia się przyczyny ruchu, a oprócz sił ciężkości bierze się pod uwagę również siły masowe i opory ruchu będące zmiennymi czasowymi. W dysertacji badano drgania własne płyt jako konstrukcji o skończonej liczbie stopni swobody, a dyskretyzację MES odniesiono tylko do zmiennych przestrzennych, tzn. nie poddano jej zmiennych czasowych [7].

### 4.1. Równanie ruchu płyty w ujęciu MES

Zgodnie z metodologią MES równanie równowagi konstrukcji w zagadnieniach statycznych wyraża się wzorem:

$$\mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{F}, \quad (4.1)$$

gdzie  $\mathbf{K}$  oznacza globalną macierz sztywności płyty wyznaczoną zgodnie z zasadami opisanymi w podrozdziale 3.2.1 z uwzględnieniem odpowiednich warunków podparcia badanej płyty. Z kolei  $\mathbf{q}$  oznacza globalny wektor przemieszczeń (translacyjnych i obrotowych) węzłów siatki MES, a  $\mathbf{F}$  – globalny wektor obciążeń płyty.

W zagadnieniach dynamicznych równanie (4.1) należy uzupełnić o siły bezwładności i siły tłumienia oraz uzależnić wektor przemieszczeń od zmiennej czasowej  $t$ . Dla płyty mającej  $n_s$  stopni swobody<sup>1</sup> równanie ruchu wyraża się wzorem [7]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{F}(t), \quad (4.2)$$

gdzie:

$\mathbf{M}$  – globalna macierz bezwładności (mas) płyty,

$\mathbf{C}$  – macierz tłumienia konstrukcyjnego płyty,

$\ddot{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{q}}(t)$ ,  $\mathbf{q}(t)$  – zależne od zmiennej czasowej  $t$  wektory odpowiednio: przyspieszenia, prędkości i przemieszczeń uogólnionych węzłów płyty,

$\mathbf{F}(t)$  – zależny od zmiennej czasowej  $t$  wektor obciążeń zewnętrznych płyty.

Aby równanie (4.2) miało jednoznaczne rozwiązanie  $\mathbf{q}(t)$ , należy zadać w nim warunki początkowe, tzn. ustalić wektory przemieszczenia i prędkości w chwili początkowej  $t_0 = 0$ . Warunki te można zapisać w następującej postaci ogólnej:

$$\begin{cases} \mathbf{q}(0) = \mathbf{q}_0, \\ \dot{\mathbf{q}}(0) = \dot{\mathbf{q}}_0. \end{cases} \quad (4.3)$$

W dalszym ciągu wzięto pod uwagę drgania własne płyt, a więc założono, że na płytę nie działają żadne siły wymuszające poza wstępnym wzbudzeniem [7]. Ponadto pominięto wpływ tłumienia konstrukcyjnego płyty, tzn. macierz  $\mathbf{C}$  przyjęto jako zerową. Równanie drgań swobodnych nietłumionych płyty wyraża się wtedy wzorem:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{0}. \quad (4.4)$$

Dla powyższego równania przewidywane rozwiązanie oraz jego pochodna drugiego rzędu mają postacie:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(t) &= \mathbf{q}_a \sin \omega t, \\ \ddot{\mathbf{q}}(t) &= -\omega^2 \mathbf{q}_a \sin \omega t, \end{aligned} \quad (4.5)$$

gdzie:

$\mathbf{q}_a$  – wektor amplitud (postaci drgań),

$\omega$  – częstość drgań własnych [rad/s].

Po podstawieniu (4.5) do (4.4) otrzymuje się uogólniony problem własny postaci:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{q}_a = \mathbf{0}, \quad (4.6)$$

<sup>1</sup>  $n_s = 3w_e$ , gdzie  $w_e$  – liczba węzłów siatki MES dyskretyzującej powierzchnię płyty.

gdzie  $\lambda = \omega^2$ . Równanie (4.6) nazywa się „podstawowym równaniem nietłumionych drgań swobodnych” [7]. Jego rozwiązanie sprowadza się do znalezienia wartości własnych  $\lambda_i$  oraz odpowiadających im wektorów własnych  $\mathbf{q}_{a,i}$  (postaci drgań), gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ . Aby równanie (4.6) miało nietrywialne rozwiązanie, wyznacznik układu musi mieć wartość zerową, tzn.

$$\det(\mathbf{K} - \lambda\mathbf{M}) = 0. \quad (4.7)$$

Z rozwiązania równania (4.7) otrzymuje się szukane wartości własne  $\lambda_i$ , a na ich podstawie – częstości drgań własnych  $\omega_i = \sqrt{\lambda_i}$ . W przypadku drgań własnych nietłumionych wszystkie wartości własne  $\lambda_i$  są liczbami rzeczywistymi dodatnimi. Dla każdej wartości własnej  $\lambda_i$  wyznacza się ze wzoru (4.6) wektor własny  $\mathbf{q}_{a,i}$  określający  $i$ -tą postać drgań badanej płyty. Wektory własne nie są określone jednoznacznie. Mogą przyjmować dowolne wartości, ale w stałych proporcjach. Aby wektory te określić jednoznacznie, można je unormować, np. wg reguły [7]:

$$\mathbf{q}_{a,i}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{a,i} = 1. \quad (4.8)$$

Wektory własne są ortogonalne, tzn.  $\mathbf{q}_{a,i}^T \mathbf{M} \mathbf{q}_{a,j} = 0$  dla  $i \neq j$ . Znajomość wartości częstości drgań własnych jest ważna przy projektowaniu konstrukcji obciążonej dodatkowymi zewnętrznymi siłami wymuszającymi. Jeśli rzeczywista częstość drgań wymuszonych zbliża się do częstości drgań własnych, to amplitudy drgań konstrukcji wzrastają i zachodzi zjawisko rezonansu.

Aby wyznaczyć szukane charakterystyki dynamiczne badanych płyt, należy rozwiązać uogólniony problem własny postaci (4.6). Rozwiązanie tego zagadnienia można otrzymać w środowisku Octave przy pomocy polecenia:

```
[Q,L]=eig(K,M);
```

Argumentem polecenia „eig” są macierze  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$  występujące w uogólnionym problemie własnym (4.6). W wyniku rozwiązania tego problemu program zwraca dwie zmienne:

$\mathbf{Q}$  – macierz o wymiarze  $n_s \times n_s$ , w której kolumnach występują kolejne wektory własne  $\mathbf{q}_{a,i}$ , przy czym  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,

$\mathbf{L}$  – macierz diagonalna o wymiarze  $n_s \times n_s$  zawierająca na głównej przekątnej kolejne wartości własne  $\lambda_i$ , przy czym  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ .

W wielu przypadkach korzystnie jest sprowadzić uogólniony problem własny (4.6) do standardowego problemu własnego postaci:

$$(\mathbf{H} - \bar{\lambda}\mathbf{I}) \bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{0}, \quad (4.9)$$

gdzie:

$\mathbf{H}$  – macierz symetryczna,

$\mathbf{I}$  – macierz jednostkowa,

$\bar{\mathbf{q}}_a$  – wektor własny.

Standardowy problem własny, wyrażony wzorem (4.9), można wówczas otrzymać, stosując jeden z trzech niżej przedstawionych sposobów, zależnie od osobiwości macierzy  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$  [7].

1. Macierze  $\mathbf{M}$  i  $\mathbf{K}$  są nieosobliwe.

a) Możliwe jest wykonanie poniższego przekształcenia uogólnionego problemu własnego (4.6):

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0} / \cdot \mathbf{M}^{-1}, \\ (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

b) Niech  $\mathbf{M} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T$  będzie rozkładem Choleskiego<sup>2</sup> macierzy  $\mathbf{M}$ . Wówczas równanie (4.10) sprowadza się do standardowego problemu własnego w następujący sposób:

$$\begin{aligned} ((\mathbf{L}^T)^{-1} \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0} / \cdot \mathbf{L}^T, \\ (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} - \lambda \mathbf{L}^T) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{L}^{-1})^T - \lambda \mathbf{I}) \mathbf{L}^T \mathbf{q}_a &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{H} - \lambda \mathbf{I}) \bar{\mathbf{q}}_a &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

gdzie  $\mathbf{H} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{K} (\mathbf{L}^{-1})^T$  oraz  $\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{L}^T \mathbf{q}_a$ .

c) Jeśli macierz  $\mathbf{M}$  jest macierzą diagonalną (bez zer na diagonalu), to macierz odwrotną  $\mathbf{M}^{-1}$  można łatwo obliczyć i wówczas występująca we wzorze (4.10) macierz  $\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K}$  zachowuje strukturę macierzy  $\mathbf{K}$  (np. pasmowość, symetrię).

2. Macierz  $\mathbf{M}$  jest osobliwa.

a) Przypadek zachodzi przy założeniu granulacji masy w węzłach siatki MES. Wówczas elementy na przekątnej głównej macierzy  $\mathbf{M}$  odpowiadające obrotowym stopniom swobody są równe zeru. Można dokonać poniższego przekształcenia:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M}) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0} / \cdot \mathbf{K}^{-1}, \\ (\mathbf{I} - \lambda \mathbf{K}^{-1} \mathbf{M}) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

---

<sup>2</sup> Warunkiem istnienia takiego rozkładu dla macierzy  $\mathbf{M}$  jest jej symetria i dodatnia określoność. Macierz  $\mathbf{L}$  występująca w rozkładzie jest macierzą trójkątną dolną.

- b) Niech  $\mathbf{K} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$  będzie rozkładem Choleskiego macierzy  $\mathbf{K}$ . Równanie (4.12) sprowadza się do standardowego problemu własnego następująco:

$$\begin{aligned} (\mathbf{I} - \lambda(\mathbf{L}^T)^{-1}\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0} / \cdot \mathbf{L}^T, \\ (\mathbf{L}^T - \lambda\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}) \mathbf{q}_a &= \mathbf{0}, \\ (\mathbf{I} - \lambda\mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{L}^T)^{-1}) \mathbf{L}^T \mathbf{q}_a &= \mathbf{0} / \cdot \left(-\frac{1}{\lambda}\right), \\ (\mathbf{H} - \bar{\lambda}\mathbf{I}) \bar{\mathbf{q}}_a &= \mathbf{0}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

gdzie:  $\mathbf{H} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{M}(\mathbf{L}^{-1})^T$ ,  $\bar{\mathbf{q}}_a = \mathbf{L}^T \mathbf{q}_a$  oraz  $\bar{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$ .

3. Macierz  $\mathbf{K}$  jest osobliwa.

- a) Przypadek zachodzi w analizie konstrukcji bez uwzględniania warunków brzegowych. We wzorze (4.6) należy wtedy podstawić  $\lambda = \lambda_0 + a$ , gdzie  $a$  jest pewną liczbą ujemną, której wartość można przyjąć np. jako

$$a = 0,01 \frac{\text{tr } \mathbf{K}}{\text{tr } \mathbf{M}},$$

gdzie  $\text{tr } \mathbf{K}$  oznacza ślad macierzy<sup>3</sup>  $\mathbf{K}$ .

- b) Problem (4.6) sprowadza się do postaci:

$$[(\mathbf{K} - a\mathbf{M}) - \lambda_0\mathbf{M}] \mathbf{q}_a = \mathbf{0}. \quad (4.14)$$

- c) Macierz  $(\mathbf{K} - a\mathbf{M})$  jest dodatnio określona<sup>4</sup> i dalej procedurę sprowadzania problemu (4.14) do postaci standardowej wykonuje się według jednego z dwóch wcześniej omówionych przypadków.

W programie Octave problem (4.11) można rozwiązać przy pomocy następującego ciągu poleceń:

```
L=chol(M,'lower'); % rozkład Choleskiego macierzy M
H=inv(L)*K*inv(L'); % macierz symetryczna H
[Q,Lambda]=eig(H); % wyznaczenie macierzy wektorów własnych Q
                    % oraz macierzy wartości własnych Lambda
```

W wyniku rozwiązania problemu (4.11) otrzymuje się wartości własne  $\lambda_i$  oraz wektory własne  $\bar{\mathbf{q}}_{a,i}$ . Aby otrzymać wektory własne  $\mathbf{q}_{a,i}$  dla wejściowego problemu (4.6), należy dokonać poniższego przekształcenia:

$$\mathbf{q}_{a,i} = (\mathbf{L}^T)^{-1} \bar{\mathbf{q}}_{a,i}.$$

<sup>3</sup> Śladem macierzy kwadratowej nazywa się sumę jej elementów na głównej przekątnej.

<sup>4</sup> Zgodnie z tzw. kryterium Sylwestera macierz jest dodatnio określona, jeżeli wyznaczniki wszystkich jej minorów głównych są dodatnie (źródło:

[https://ii.uni.wroc.pl/~kosciels/algebra/pliki/macierze\\_dodatnio.pdf](https://ii.uni.wroc.pl/~kosciels/algebra/pliki/macierze_dodatnio.pdf), dostęp: 23.10.2024).

Aby przeprowadzić analizę dynamiczną płyty poddanej jedynie drganiom swobodnym, należy wykonać poniższe kroki:

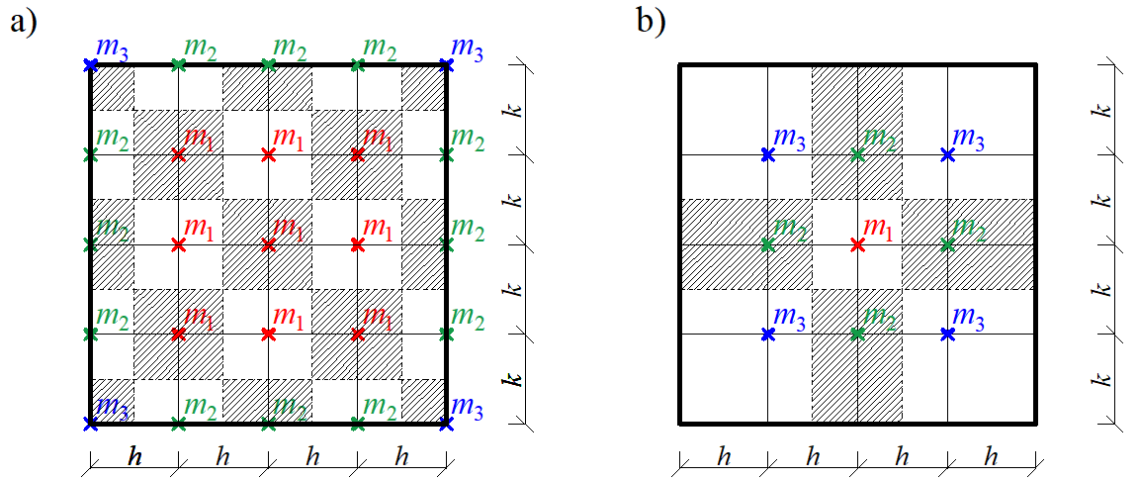
1. wyznaczenie globalnej macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  płyty z uwzględnieniem warunków brzegowych, zgodnie z zasadami statyki,
2. wyznaczenie macierzy bezwładności  $\mathbf{M}$  płyty z uwzględnieniem warunków brzegowych,
3. rozwiązanie uogólnionego problemu własnego (4.6) lub sprowadzenie uogólnionego problemu własnego do standardowego problemu własnego: (4.10), (4.11), (4.13) lub (4.14), w zależności od zachodzącego przypadku odnośnie osobliwości macierzy  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$ ,
4. wyznaczenie szukanych częstości drgań własnych  $\omega_i$  i wektorów postaci drgań własnych  $\mathbf{a}_{a,i}$  oraz graficzne przedstawienie postaci drgań własnych płyty.

W analizie dynamicznej konstrukcji, z inżynierskiego punktu widzenia, przeważnie wystarczające jest wyznaczenie kilku jej pierwszych częstości drgań własnych.

Postać macierzy bezwładności  $\mathbf{M}$  płyty można określić na jeden z dwóch niżej opisanych sposobów:

1. przyjęcie granulacji masy w węzłach siatki MES
  - a) W podejściu tym zakłada się, że masa płyty jest skupiona w węzłach elementów skończonych dyskretyzujących powierzchnię płyty.
  - b) Macierz mas jest macierzą diagonalną, a jej wymiar  $n_s \times n_s$  jest równy wymiarowi macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  płyty.
  - c) Wartości mas skupionych występują w elementach diagonalii odpowiadających translacyjnym stopniom swobody. Pozostałe elementy głównej przekątnej są wypełnione zerami. Zatem macierz bezwładności jest osobliwa.
  - d) Masę płyty można skupiać w węzłach siatki MES na różne sposoby. Poniżej omówiono trzy z nich, przy czym w badaniach numerycznych prowadzonych w niniejszej pracy zastosowano sposób pierwszy.
    - Masa płyty skupiona jest we wszystkich węzłach siatki MES, a więc w węzłach wewnętrznych i brzegowych. Wówczas każdemu węzłowi odpowiada masa przypadającego na niego fragmentu płyty zgodnie z rysunkiem 4.1a). Masę skupioną przypadającą na  $i$ -ty węzeł siatki MES, przyjmując kolejno  $i = 1, 2, 3, \dots, (m+1)(n+1)$ , można wyznaczyć ze wzoru:

$$m_i = \rho \cdot A_i \cdot H, \quad (4.15)$$



Rysunek 4.1. Graficzne przedstawienie fragmentów płyty przypadających na poszczególne masy skupione: we wszystkich węzłach siatki MES (a), w wewnętrznych węzłach siatki MES przy nierównym rozdziale mas na poszczególne węzły (b)

gdzie:

$\rho$  – gęstość materiału płyty [ $\text{kg}/\text{m}^3$ ],

$A_i$  – pole powierzchni płyty przypadające na  $i$ -ty węzeł siatki MES [ $\text{m}^2$ ],

$H$  – grubość płyty [ $\text{m}$ ].

Przy podziale płyty na jednakowe elementy skończone otrzymuje się trzy różne wartości mas skupionych:

$$m_1 = \rho \cdot h \cdot k \cdot H \text{ dla węzłów wewnętrznych,}$$

$$m_2 = \rho \cdot \frac{1}{2} \cdot h \cdot k \cdot H \text{ dla węzłów wewnętrznych na krawędziach,}$$

$$m_3 = \rho \cdot \frac{1}{4} \cdot h \cdot k \cdot H \text{ dla węzłów narożnych.}$$

- Masa płyty skupiona jest tylko w węzłach wewnętrznych siatki MES i zakłada się, że wszystkie masy skupione mają równe wartości, które wyznacza się ze wzoru:

$$m_i = \frac{\rho \cdot A \cdot B \cdot H}{n_e}, \quad (4.16)$$

gdzie:

$A, B$  – wymiary płyty [ $\text{m}$ ]

$n_e = m \cdot n$  – łączna liczba elementów skończonych.

- Masa płyty skupiona jest tylko w węzłach wewnętrznych siatki MES, a węzłom wewnętrznym przy krawędziach i przy narożach odpowiadają więk-

sze wartości masy. Obszary przypadające na poszczególne masy skupione przedstawiono na rysunku 4.1b). Otrzymuje się trzy różne wartości mas:

$$\begin{aligned} m_1 &= \rho \cdot h \cdot k \cdot H \text{ dla węzłów wewnętrznych,} \\ m_2 &= \rho \cdot \frac{3}{2} \cdot h \cdot k \cdot H \text{ dla węzłów wewnętrznych na krawędziach,} \\ m_3 &= \rho \cdot \frac{9}{4} \cdot h \cdot k \cdot H \text{ dla węzłów narożnych.} \end{aligned}$$

2. utworzenie macierzy bezwładności przy założeniu ciągłego rozkładu masy, tzn. wykorzystując funkcje kształtu

a) Zgodnie z pracą [7] macierz bezwładności dla pojedynczego elementu skończonego dyskretyzującego powierzchnię płyty można wyznaczyć z poniższego wzoru:

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_m^T \bar{\rho} \mathbf{N}_m d\Omega_e, \quad (4.17)$$

gdzie

$$\mathbf{N}_m = \left\{ \begin{array}{c} 1 \\ \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{array} \right\} \cdot \mathbf{N}^e = \left[ \begin{array}{ccccc} N_1^e & N_2^e & N_3^e & \dots & N_{12}^e \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial x} & \frac{\partial N_2^e}{\partial x} & \frac{\partial N_3^e}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{12}^e}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^e}{\partial y} & \frac{\partial N_2^e}{\partial y} & \frac{\partial N_3^e}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{12}^e}{\partial y} \end{array} \right] \quad (4.18)$$

jest macierzą zawierającą pochodne cząstkowe pierwszego rzędu z funkcji kształtu charakteryzujących element skończony. Natomiast macierz  $\bar{\rho}$  zależy od gęstości materiału płyty i określa ją wzór:

$$\bar{\rho} = \left[ \begin{array}{ccc} \rho H & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\rho H^3}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\rho H^3}{12} \end{array} \right]. \quad (4.19)$$

- b) Macierz bezwładności elementu skończonego wyznaczona ze wzoru (4.17) nazywa się macierzą konsystentną i jest ona pełna oraz symetryczna. Ponieważ otrzymuje się ją z tych samych funkcji kształtu, przy użyciu których uzyskuje się macierz sztywności  $\mathbf{K}_e$ , określa się ją też jako macierz konsekwentną. Jej elementy oblicza się przy pomocy metod całkowania numerycznego. Można wykonać całkowanie np. metodą Gaussa lub wykorzystać podejście autorskie, które opisano w podrozdziale 3.2.1 (wzór (3.19) i rysunek 3.2).
- c) Globalną macierz bezwładności  $\mathbf{M}$  dla całej płyty otrzymuje się przy zastosowaniu algorytmu agregacji macierzy bezwładności  $\mathbf{M}_e$  kolejnych elementów skończonych  $e = 1, 2, 3, \dots, mn$ . Agregację macierzy bezwładności wykonu-

je się w sposób analogiczny jak w przypadku macierzy sztywności. Można symbolicznie zapisać:

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{mn} \mathbf{M}_e. \quad (4.20)$$

Uwzględnienie warunków brzegowych w macierzy  $\mathbf{M}$  polega na wypełnieniu zerami wierszy i kolumn odpowiadających zerującym się stopniom swobody, zgodnie z zadanymi warunkami podparcia na krawędziach.

## 4.2. Równanie ruchu płyty w ujęciu MRS

Aby otrzymać częstości i postacie drgań własnych płyty o zmiennej sztywności przy zastosowaniu metody różnic skończonych, należy skorzystać z układu równań pozwalającego wyznaczyć ugięcia  $w_{ij}$  w węzłach siatki MRS dla przypadku obciążenia statycznego. Ten układ równań został wyprowadzony w podrozdziale 3.2.2 i wyraża się wzorem (3.85). W macierzy  $\Delta$  układu wprowadza się odpowiednie warunki brzegowe płyty, zgodnie z zasadami opisanymi w podrozdziale 3.2.2.

W przypadku analizy drgań własnych płyty należy założyć, że jest ona obciążona tylko siłami bezwładności, a więc intensywność obciążenia w punkcie jej powierzchni o współrzędnych  $(x, y)$  wyraża się wzorem:

$$p(x, y) = B(x, y) = -m \cdot \frac{\partial^2 w(x, y, t)}{\partial t^2}, \quad (4.21)$$

gdzie:

$m$  – masa płyty na jednostkę powierzchni wyrażona w  $\text{kg/m}^2$ ,

$w(x, y, t)$  – przemieszczenie pionowe punktu płyty o współrzędnych  $(x, y)$  w chwili  $t$ .

Przy pomocy wzoru (4.21) można wyznaczyć elementy wektora wyrazów wolnych (3.94) w układzie równań (3.85). Należy wówczas zbiór punktów powierzchni płyty określonych przez współrzędne  $(x, y)$  zastąpić dyskretnym zbiorem punktów  $(i, j)$  stanowiących węzły siatki MRS. Otrzymuje się wtedy wzór na elementy wektora  $\mathbf{p}$ :

$$p_{ij} = B_{ij} = -\frac{m_{ij}}{A_{ij}} \cdot \frac{d^2 w_{ij}(t)}{dt^2}, \quad (4.22)$$

gdzie:

$m_{ij}$  – masa części płyty przypadającej na węzeł  $(i, j)$  siatki MRS,

$A_{ij}$  – pole powierzchni części płyty przypadającej na węzeł  $(i, j)$  siatki MRS,

$w_{ij}(t)$  – przemieszczenie pionowe punktu  $(i, j)$  płyty w chwili  $t$ .

Ze wzoru (4.22) wynika, że intensywność obciążenia  $p$  działającego na płytę jest stała na powierzchni  $A_{ij}$ . Przemieszczenie pionowe punktu  $(i, j)$  płyty w chwili  $t$  można wyrazić wzorem:

$$w_{ij}(t) = W_{ij} \sin(\omega t), \quad (4.23)$$

gdzie:

$W_{ij}$  – amplituda drgań punktu  $(i, j)$  płyty,

$\omega$  – częstość drgań własnych płyty.

Po podstawieniu (4.23) do (4.22) otrzymuje się:

$$p_{ij} = -\frac{m_{ij}}{A_{ij}} \cdot (-W_{ij}\omega^2 \sin(\omega t)) = \tilde{m}_{ij} \cdot W_{ij}\omega^2 \sin(\omega t), \quad (4.24)$$

gdzie przyjęto oznaczenie  $\tilde{m}_{ij} = m_{ij}/A_{ij}$ . Wzory (4.24) oraz (4.23) należy podstawić do równania (3.39). Po podzieleniu powstałego równania stronami przez  $\sin(\omega t)$  i zestawieniu równań dla wszystkich węzłów siatki MRS otrzymuje się układ równań postaci:

$$\Delta \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{n+1} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{m}}_1 \omega^2 \mathbf{W}_1 \\ \tilde{\mathbf{m}}_2 \omega^2 \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{m}}_{n+1} \omega^2 \mathbf{W}_{n+1} \end{Bmatrix},$$

który można też zapisać równoważnie jak poniżej:

$$\Delta \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{n+1} \end{Bmatrix} = \omega^2 \cdot \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{m}}_1 & & & \\ & \tilde{\mathbf{m}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{m}}_{n+1} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{n+1} \end{Bmatrix}, \quad (4.25)$$

gdzie

$$\tilde{\mathbf{m}}_j = \begin{bmatrix} \tilde{m}_{1,j} & & & \\ & \tilde{m}_{2,j} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{m}_{m+1,j} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{W}_j = \begin{Bmatrix} W_{1,j} \\ W_{2,j} \\ \vdots \\ W_{m+1,j} \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

dla  $j = 1, 2, 3, \dots, n+1$ . Wzór (4.25) stanowi uogólniony problem własny następującej postaci:

$$(\Delta - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (4.27)$$

gdzie

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{m}}_1 & & & \\ & \tilde{\mathbf{m}}_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \tilde{\mathbf{m}}_{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{oraz} \quad \mathbf{W} = \begin{Bmatrix} \mathbf{W}_1 \\ \mathbf{W}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{W}_{n+1} \end{Bmatrix}. \quad (4.28)$$

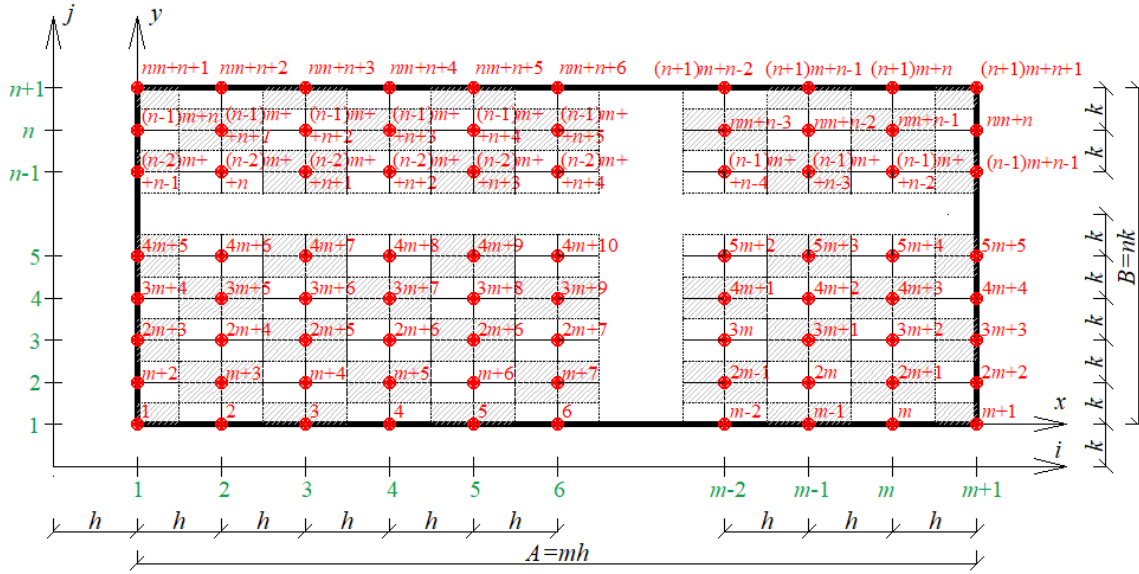
Rozwiązaniem problemu własnego (4.27) są wartości własne  $\lambda = \omega^2$  oraz wektory własne  $\mathbf{W}$ . Problem własny (4.27) różni się od zagadnienia własnego (4.6) wyznaczonego przy pomocy MES tym, że w przypadku MRS macierz sztywności  $\mathbf{K}$  zastąpiono macierzą operatorów różnicowych  $\Delta$ . Ponadto macierz mas  $\mathbf{M}$  w metodzie różnic skończonych wyznacza się jedynie jako diagonalną z przyjęciem założenia granulacji masy w węzłach siatki MRS. Wartości mas w tej macierzy są wyrażone w kg na jednostkę powierzchni płyty (przeważnie na  $1 \text{ m}^2$ ). Zagadnienie własne wyrażone wzorem (4.27) charakteryzuje się mniejszym wymiarem w porównaniu z problemem własnym (4.6), ponieważ niewiadomymi są w nim jedynie przemieszczenia translacyjne. W metodzie elementów skończonych wyznacza się wartości zarówno translacyjnych, jak i obrotowych stopni swobody.

W przypadku płyty, na powierzchni której zdefiniowano siatkę MRS o wymiarze  $m \times n$  podobszarów, odpowiednio wzdłuż krawędzi poziomej i pionowej, każdemu punktowi o współrzędnych  $(x_i, y_j)$  można przypisać masę posiadającą numer  $k = (j - 1)m + j + i - 1$ . Numerację mas skupionych w węzłach siatki MRS przedstawiono na rysunku 4.2. Zaznaczono na nim również fragmenty powierzchni płyty przypadające na poszczególne masy.

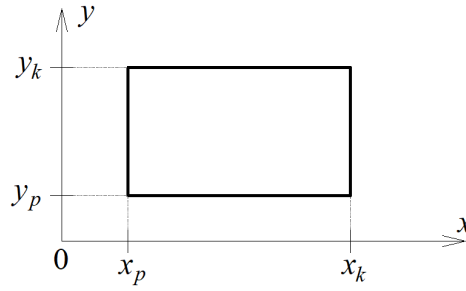
Aby wyznaczyć macierz  $\mathbf{M}$  w programie Octave, należy w pierwszej kolejności utworzyć macierz pomocniczą o wymiarze  $4 \times (m + 1)(n + 1)$  zawierającą w kolumnach współrzędne  $(x_p, x_k, y_p, y_k)$  obszarów przypadających na kolejne masy skupione. Współrzędne charakteryzujące dany obszar przedstawiono na rysunku 4.3. Na podstawie rysunków 4.2 oraz 4.3 można stwierdzić, że macierz pomocnicza ze współrzędnymi podobszarów płyty posiada następującą strukturę:

$$\begin{bmatrix} 0 & \frac{h}{2} & \frac{3h}{2} & \dots & \frac{(2m-1)h}{2} & 0 & \frac{h}{2} & \frac{3h}{2} & \dots & \frac{(2m-1)h}{2} & \dots & 0 & \frac{h}{2} & \dots & \frac{(2m-1)h}{2} \\ \frac{h}{2} & \frac{3h}{2} & \frac{5h}{2} & \dots & mh & \frac{h}{2} & \frac{3h}{2} & \frac{5h}{2} & \dots & mh & \dots & \frac{h}{2} & \frac{3h}{2} & \dots & mh \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & \dots & \frac{k}{2} & \dots & \frac{(2n-1)k}{2} & \frac{(2n-1)k}{2} & \dots & \frac{(2n-1)k}{2} \\ \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & \frac{k}{2} & \dots & \frac{k}{2} & \frac{3k}{2} & \frac{3k}{2} & \frac{3k}{2} & \dots & \frac{3k}{2} & \dots & nk & nk & \dots & nk \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Dla każdej masy punktowej należy wyznaczyć objętość obszaru, który na nią przypada jako całkę podwójną z funkcji grubości płyty  $H(x, y)$ . Dla  $l$ -tej masy



Rysunek 4.2. Numeracja mas skupionych w węzłach siatki MRS dla płyty o zmiennej sztywności



Rysunek 4.3. Oznaczenie współrzędnych określających położenie obszarów płyty przypadających na masy skupione w węzłach siatki MRS

punktowej objętość ta wyrażona jest wzorem:

$$V_l = \int_{x_p}^{x_k} \int_{y_p}^{y_k} H(x, y) dy dx. \quad (4.30)$$

Całkę (4.30) można obliczyć, korzystając z opracowanej w środowisku Octave procedury całkowania po obszarze prostokątnym przy użyciu metody Gaussa lub metody autorskiej opisanej w podrozdziale 3.2.1. Po wyznaczeniu objętości wszystkich podobszarów określa się ich masę na podstawie znanej wartości gęstości materiału płyty. Następnie otrzymane wartości mas dzieli się przez powierzchnię przypadającego na nie obszaru. Tak obliczone masy, wyrażone w  $\text{kg/m}^2$ , są wpisywane jako elementy przekątnej głównej macierzy mas płyty  $\mathbf{M}$ .

### 4.3. Przykłady analizy dynamicznej płyt w próżni

W niniejszym podrozdziale przedstawiono kilka przykładów wyznaczania częstości i postaci drgań własnych płyt przy zastosowaniu metody elementów skończonych i metody różnic skończonych. Przyjęto różne schematy podparcia badanych płyt. Badania przeprowadzono dla płyt o stałej i zmiennej grubości.

**Przykład 4.1.** [25] *Drgania własne płyty o stałej grubości, podpartej swobodnie na obwodzie*

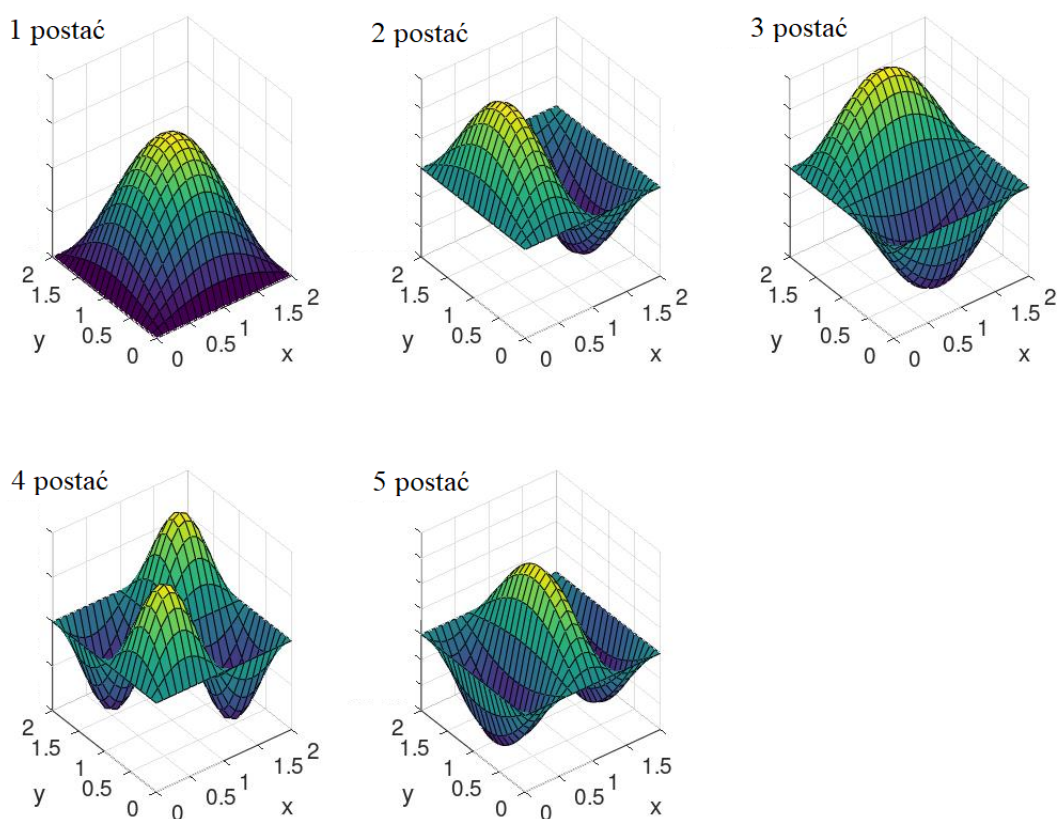
W przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową o schemacie podparcia przedstawionym na rysunku 3.10b). Długość boku badanej płyty wynosi 2,0 m, a grubość przyjęto stałą na całej powierzchni i równą 0,01 m. Płytę wykonano z materiału izotropowego o module Younga  $E = 205$  GPa, współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$  i gęstości  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. W tabeli 4.1 przedstawiono wartości częstości drgań własnych płyty otrzymane przy zastosowaniu metody elementów skończonych oraz metody różnic skończonych dla siatki o wymiarze  $20 \times 20$ . Aby wyznaczyć częstości drgań własnych przy użyciu metody elementów skończonych, przyjęto konsystentną macierz bezwładności płyty. W celu otrzymania macierzy mas i sztywności płyty zastosowano autorskie metody całkowania, gdzie punkty całkowania rozmieszczono zgodnie z rysunkiem 3.2a), d), e). Otrzymane wyniki porównano z wartościami otrzymanymi analitycznie [11] oraz przy zastosowaniu metody elementów brzegowych [9]. Na rysunku 4.4 przedstawiono wygenerowane w środowisku Octave postacie drgań własnych odpowiadające wyznaczonym częstościom. Wykresy postaci drgań uzyskano przy wykorzystaniu metody różnic skończonych.

Tabela 4.1. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 4.1

| Nr   | Częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |            |                   |                   |                   |         |
|------|-------------------------------------------|------------|-------------------|-------------------|-------------------|---------|
|      | anal.<br>[11]                             | MEB<br>[9] | MES,<br>rys 3.2a) | MES,<br>rys 3.2d) | MES,<br>rys 3.2e) | MRS     |
| 1    | 76,313                                    | 76,318     | 76,204            | 76,202            | 76,197            | 76,195  |
| 2, 3 | 190,783                                   | 190,710    | 190,322           | 190,305           | 190,269           | 189,549 |
| 4    | 305,253                                   | 304,918    | 303,526           | 303,492           | 303,420           | 302,902 |
| 5    | 381,567                                   | 380,805    | 380,417           | 380,338           | 380,168           | 375,368 |

Na podstawie danych zawartych w tabeli 4.1 można stwierdzić, że wartości częstości drgań własnych płyty otrzymane przy pomocy MES i różnych sposobów całkowania numerycznego oraz w ujęciu MRS są do siebie bardzo zbliżone. Nie odbiegają one znacząco od wyników zawartych w znanych pozycjach literaturowych [9, 11].

Najbliższe wynikom analitycznym są wartości częstości drgań własnych wyznaczone przy użyciu MES oraz całkowania numerycznego z rozmieszczeniem punktów całkowania według rysunku 3.2a). Różnica procentowa między wynikami numerycznymi i analitycznymi nie przekracza w tym przypadku 1%. Najbardziej odbiegają od wartości analitycznych częstości drgań własnych otrzymane przy użyciu MRS. Jednak i w tym przypadku wyniki do czwartej częstości drgań własnych można uznać za zadowalające z uwagi na różnicę procentową nie przekraczającą 1% w odniesieniu do wartości wyznaczonych analitycznie. Jedynie w przypadku dalszej, piątej częstości drgań różnica ta przekracza 1%.



Rysunek 4.4. Pięć pierwszych postaci drgań własnych płyty kwadratowej swobodnie podpartej z przykładu 4.1

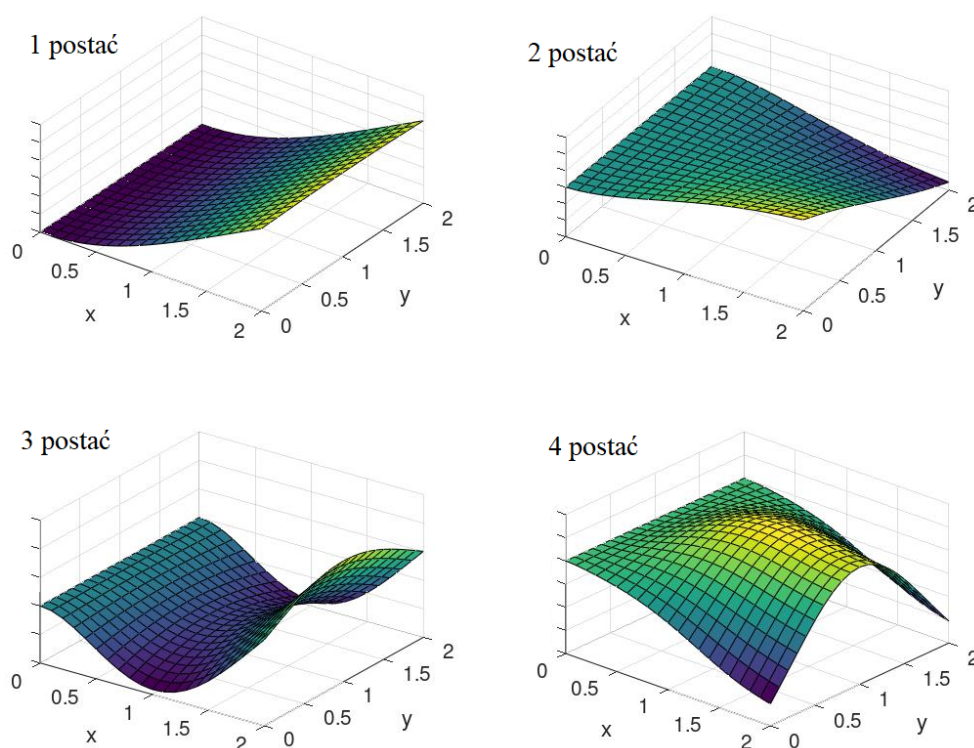
**Przykład 4.2.** [25] *Drgania własne płyty o stałej grubości, utwierdzonej na jednej krawędzi*

W przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową utwierdzoną na jednej krawędzi. Długość boku badanej płyty wynosi 2,0 m, a grubość przyjęto stałą na całej powierzchni i równą 0,05 m. Materiał płyty oraz geometrię siatek MES i MRS przyjęto jak w przykładzie 4.1. Otrzymane wartości pierwszych czterech częstości drgań

własnych w ujęciu metod numerycznych MES oraz MRS pokazano w tabeli 4.2. Wyniki porównano z wartościami otrzymanymi przy użyciu MEB, zawartymi w pozycji literaturowej [9]. Odpowiadające postacie drgań własnych przedstawiono na rysunku 4.5.

Tabela 4.2. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 4.2

| Nr | Częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |                    |                    |                    |         |
|----|-------------------------------------------|--------------------|--------------------|--------------------|---------|
|    | MEB<br>[9]                                | MES,<br>rys. 3.2a) | MES,<br>rys. 3.2d) | MES,<br>rys. 3.2e) | MRS     |
| 1  | 66,924                                    | 67,087             | 67,086             | 67,085             | 68,018  |
| 2  | 164,302                                   | 164,372            | 164,369            | 164,356            | 183,713 |
| 3  | 415,787                                   | 411,253            | 411,240            | 411,207            | 406,904 |
| 4  | 533,809                                   | 524,961            | 524,974            | 524,974            | 546,831 |



Rysunek 4.5. Cztery pierwsze postacie drgań własnych płyty kwadratowej wspornikowej z przykładu 4.2

Analizując wyniki zestawione w tabeli 4.2, można stwierdzić, że najbliższe wynikom zawartym w literaturze są częstości drgań własnych uzyskane przy użyciu MES oraz całkowania numerycznego z punktami całkowania rozmieszczonymi według ry-

sunku 3.2e). W tym przypadku różnice procentowe nie przekraczają 1% dla pierwszej i drugiej częstości drgań własnych. Wyniki obliczeń numerycznych otrzymane przy zastosowaniu MRS bardziej odbiegają od wartości z literatury. Już w przypadku pierwszej częstości drgań różnica między wynikami przekracza 1%. Można sformułować wniosek, że w metodzie różnic skończonych należy zastosować większą gęstość siatki w porównaniu z dyskretyzacją według metodologii MES.

**Przykład 4.3.** [25] *Drgania własne płyty o zmiennej grubości, utwierdzonej na jednej krawędzi*

W przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową utwierdzoną na jednej krawędzi. Długość boku badanej płyty wynosi  $A = 2,0$  m. Przyjęto, że płyta ma liniowo zmienną grubość w jednym kierunku. Przekrój płyty przyjęto jak w przykładzie 3.3 i przedstawiono na rysunku 3.13. Minimalna grubość płyty występuje przy swobodnej krawędzi i wynosi ona  $H_2 = 0,05$  m. Maksymalna grubość płyty zlokalizowana jest wzdłuż krawędzi utwierdzonej i przyjmuje ona wartości ze zbioru  $H_1 = \{0,1, 0,15, 0,2\}$  m. Materiał płyty przyjęto identyczny jak w dwóch poprzednich przykładach. Wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych otrzymane przy wykorzystaniu metody różnic skończonych przedstawiono w tabeli 4.3 dla trzech różnych grubości  $H_1$  płyty oraz siatki MRS  $20 \times 20$ . Ponadto dla grubości  $H_1 = 0,2$  m wyznaczono częstości drgań przy użyciu czterech różnych gęstości siatki MRS w celu sprawdzenia zbieżności otrzymywanych wyników.

Tabela 4.3. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 4.3 wyznaczone dla różnych wartości grubości maksymalnej  $H_1$  płyty, przy użyciu czterech gęstości siatek MRS

| Nr | Rozw. MRS – częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |                |                                              |                |                |                |
|----|-------------------------------------------------------|----------------|----------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|    | Rozw. dla siatki $20 \times 20$                       |                | Rozw. dla $H_1 = 0,2$ m i różnych siatek MRS |                |                |                |
|    | $H_1 = 0,1$ m                                         | $H_1 = 0,15$ m | $14 \times 14$                               | $20 \times 20$ | $30 \times 30$ | $40 \times 40$ |
| 1  | 144,138                                               | 227,247        | 311,880                                      | 315,428        | 316,993        | 317,363        |
| 2  | 252,741                                               | 320,410        | 418,410                                      | 391,302        | 374,641        | 366,782        |
| 3  | 611,177                                               | 758,965        | 892,306                                      | 886,417        | 878,680        | 873,270        |
| 4  | 767,513                                               | 1004,124       | 1267,733                                     | 1244,375       | 1239,151       | 1237,176       |

Postacie drgań własnych dla rozpatrywanych przypadków płyty o zmiennej grubości są bardzo podobne do tych przedstawionych na rysunku 4.5. Różnica polega jedynie na tym, że ekstremalne wartości na wykresach, w miarę wzrostu różnicy grubości płyty na swobodnej krawędzi w porównaniu z krawędzią utwierdzoną, ulegają przesunięciu w kierunku obszarów płyty o mniejszej sztywności.

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 4.3, można wyciągnąć wniosek, że wartości częstości drgań własnych otrzymane dla płyty o zmiennej liniowo sztywności rosną wraz ze wzrostem grubości płyty przy jej utwierdzonej krawędzi. W przypadku pierwszej częstości drgań własnych dwukrotne zwiększenie grubości  $H_1$  płyty przy utwierdzonej krawędzi w odniesieniu do grubości  $H_2$  przy krawędzi swobodnej powoduje około 2,15-krotny wzrost wartości tej częstości w porównaniu z płytą o stałej grubości  $H = H_2$ . W przypadku 3- i 4-krotnego zwiększenia grubości płyty przy utwierdzonej krawędzi wzrost pierwszej częstości drgań jest odpowiednio 3,4- oraz 4,7-krotny.

Z przeprowadzonego testu zbieżności wyników dla różnych siatek MRS można wywnioskować, że częstości drgań, poza drugą, zmieniają się nieznacznie począwszy od siatki o gęstości  $30 \times 30$ , ze względu na różnicę w odniesieniu do siatki  $20 \times 20$  nie przekraczającą 1%. Dla drugiej częstości drgań zaleca się wykonanie obliczeń dla siatki gęstszej niż  $40 \times 40$  i sprawdzenie ponownie zbieżności uzyskanych wyników według przyjętego kryterium różnicy procentowej dla dwóch sąsiednich siatek nie większej od 1%.

**Przykład 4.4.** [25] *Drgania własne swobodnie podpartej płyty ortotropowej o stałej grubości*

W niniejszym przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową o schemacie podparcia i wymiarach identycznych jak w przykładzie 4.1. Różnica polega jedynie na przyjętym materiale, z którego płyta jest wykonana. Przyjęto materiał ortotropowy, a więc wykazujący różne właściwości w dwóch ortogonalnych kierunkach, składający się z boru i żywicy epoksydowej. Stałe materiałowe przyjmują następujące wartości [109]:

- podłużny moduł Younga:  $E_1 = 211$  GPa,
- poprzeczny moduł Younga:  $E_2 = 24,1$  GPa,
- moduł ścinania:  $G_{12} = 6,9$  GPa,
- większy współczynnik Poissona:  $\nu_{12} = 0,36$ ,
- mniejszy współczynnik Poissona:  $\nu_{21} = \nu_{12} \cdot \frac{E_2}{E_1} = 0,041$ ,
- gęstość materiału:  $\rho = 1967$  kg/m<sup>3</sup>.

Elementy macierzy **D** zawierającej sztywności płyty na zginanie i skręcanie wyznaczono na podstawie wzorów (3.3) oraz (3.4). W tabeli 4.4 zestawiono wartości częstości drgań własnych badanej płyty, które otrzymano przy użyciu metody elementów skończonych, stosując dwie różne dyskretyzacje powierzchni płyty oraz

trzy metody całkowania niestandardowego z przyjęciem punktów całkowania zgodnie z rysunkiem 3.2a), d), e).

Tabela 4.4. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 4.4 wyznaczone przy użyciu różnych metod numerycznego całkowania oraz dwóch sposobów dyskretyzacji powierzchni płyty zgodnie z MES

| Nr | Rozw. MES – częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |            |            |                                 |            |            |
|----|-------------------------------------------------------|------------|------------|---------------------------------|------------|------------|
|    | Rozw. dla siatki $10 \times 10$                       |            |            | Rozw. dla siatki $20 \times 20$ |            |            |
|    | rys. 3.2a)                                            | rys. 3.2d) | rys. 3.2e) | rys. 3.2a)                      | rys. 3.2d) | rys. 3.2e) |
| 1  | 84,896                                                | 84,882     | 84,853     | 85,393                          | 85,390     | 85,382     |
| 2  | 140,227                                               | 140,173    | 140,055    | 141,849                         | 141,835    | 141,805    |
| 3  | 255,029                                               | 254,821    | 254,351    | 257,968                         | 257,913    | 257,795    |
| 4  | 303,225                                               | 303,086    | 302,781    | 305,323                         | 305,287    | 305,212    |

Podsumowując wyniki z tabeli 4.4, można zauważyć, że różnice między wartościami częstości drgań otrzymanymi przy użyciu siatek MES  $10 \times 10$  oraz  $20 \times 20$  są najmniejsze dla rozmieszczenia punktów całkowania zgodnie z rysunkiem 3.2a). Wynoszą one: dla pierwszej częstości drgań własnych 0,6%, dla drugiej i trzeciej około 1,15% oraz dla czwartej częstości 0,7%. Można więc przyjąć, że zadowalające wyniki uzyskano przy zastosowaniu siatki  $20 \times 20$ , przyjmując jako kryterium różnicę wartości w odniesieniu do siatki  $10 \times 10$  wynoszącą około 1% (dopuszczono niewielkie przekroczenie tego progu).

W badanej płycie ortotropowej wartość pierwszej częstości drgań własnych uległa zwiększeniu o około 12% w porównaniu z płytą izotropową rozpatrywaną w przykładzie 4.1, o tych samych wymiarach i podparciu. Druga i trzecia częstość drgań zmniejszyły się odpowiednio o około 25% i 35%, a czwarta pozostała praktycznie niezmieniona w porównaniu z płytą izotropową.

## 5. Analiza dynamiczna płyt prostokątnych zanurzonych w płynie

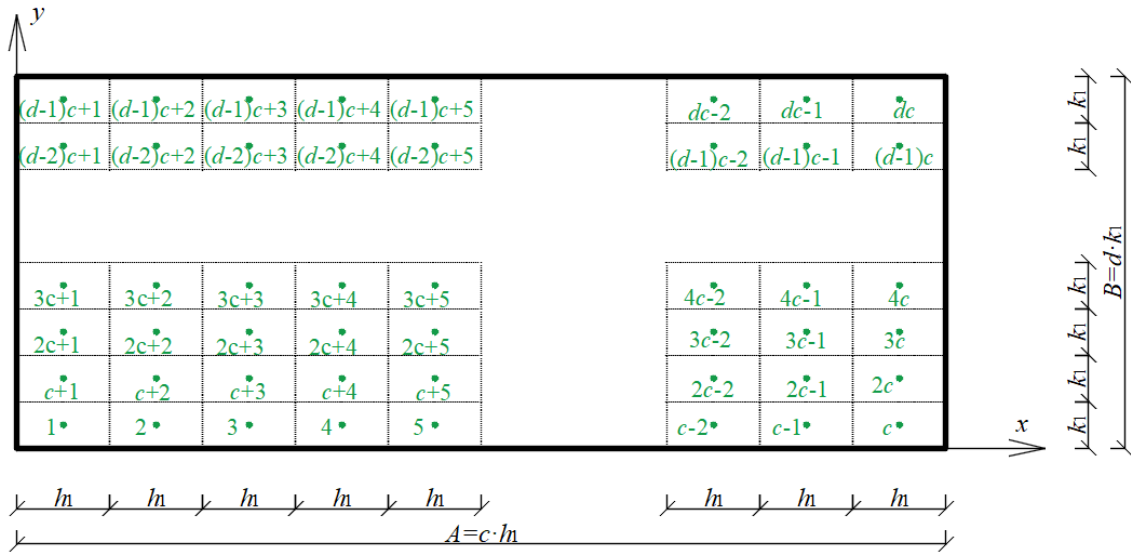
Tematyka niniejszego rozdziału dotyczy wyznaczania charakterystyk dynamicznych płyt prostokątnych umieszczonych w ośrodku zewnętrznym innym niż próżnia. Przyjęto, że płyta otoczona jest całkowicie lub częściowo cieczą o gęstości  $\rho_c$ . W przeprowadzanych badaniach założono, że płyn otaczający płytę jest nieściśliwy, nielepki i przylega ściśle do powierzchni płyty. Pominęto też dodatkowy przepływ płynu wynikający z drgań płyty. Ponadto przyjęto, że drgania płynu odbywają się z pomijalnie małymi amplitudami [25].

Ciecz, w której umieszczona jest badana płyta, stanowi źródło „dodatkowych sił bezwładności związanych z jej masą oraz sił tłumienia związanych ze zjawiskiem wypromieniowywania energii” [9]. W obliczeniach przeprowadzonych w niniejszej pracy obecność płynu uwzględniono przy zastosowaniu metody elementów brzegowych (MEB), zgodnie z zasadami przedstawionymi w [9]. Za pomocą odpowiedniego algorytmu opracowanego w środowisku Octave wyznaczono macierz bezwładności płynu  $\mathbf{M}_c$ , która jest macierzą pełną. Następnie elementy tej macierzy dodano do odpowiednich elementów macierzy bezwładności płyty  $\mathbf{M}_p$ , odnoszących się do jej translacyjnych stopni swobody. W ten sposób utworzono macierz bezwładności  $\mathbf{M}_{pc}$  układu płyta–ciecz, którą wykorzystano do rozwiązania problemu własnego (4.6) lub (4.27) i w konsekwencji do wyznaczenia częstości i postaci drgań własnych analizowanego układu. Macierz bezwładności płyty wyznaczono zgodnie z zasadami opisanymi w rozdziale 4.

Niniejszy rozdział rozpoczęto od wprowadzenia teoretycznego, w którym opisano w sposób skrócony zasadę wyznaczania macierzy bezwładności cieczy przy zastosowaniu metody elementów brzegowych. W kolejnych dwóch podrozdziałach omówiono metodykę otrzymywania charakterystyk dynamicznych płyty zanurzonej całkowicie lub częściowo w cieczy przy użyciu kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB. Na zakończenie rozdziału przedstawiono kilka przykładów numerycznych, w których wyznaczono częstości drgań własnych zanurzonych w płynie płyt o stałej lub zmiennej sztywności i różnorodnych warunkach podparcia. Podobnie jak w poprzednich rozdziałach, do testów numerycznych wykorzystano autorskie algorytmy opracowane w środowisku Octave.

### 5.1. Wyznaczanie macierzy bezwładności płynu przy zastosowaniu MEB

W niniejszej pracy obecność płynu otaczającego płytę uwzględniono przy użyciu metody elementów brzegowych na podstawie pracy [9]. Na wstępie powierzchnię płyty należy zdyskretyzować, dzieląc ją na  $N$  podobszarów prostokątnych, przy czym powierzchnia  $i$ -tego podobszaru wynosi  $S_i$ . Przyjęte podobszary, dalej nazywane podobszarami cieczy, spełniają rolę elementów brzegowych typu „constans” o jednym punkcie kolokacji. W dalszym ciągu przyjęto podział powierzchni płyty na  $N = c \cdot d$  równych podobszarów prostokątnych o wymiarach  $h_1 \times k_1$ , z których każdy ma powierzchnię  $S = h_1 k_1$ . Dyskretyzację płyty na jednakowe podobszary cieczy wraz z ich numeracją przedstawiono na rysunku 5.1.



Rysunek 5.1. Dyskretyzacja płyty całkowicie zanurzonej w płynie z użyciem jednakowych podobszarów cieczy o kształcie prostokątnym

Zgodnie z [9] potencjał pola prędkości ściśliwego i nielepkiego płynu dla drgań o małych amplitudach  $\varphi(\mathbf{x}, t) = \tilde{\varphi}(\mathbf{x}) \cdot e^{i\omega t}$  spełnia równanie Helmholtza:

$$\nabla^2 \tilde{\varphi} + \kappa^2 \tilde{\varphi} = 0, \quad (5.1)$$

gdzie:

$\mathbf{x} = (x, y, z)$  – wektor położenia dowolnie przyjętego w przestrzeni punktu  $P$ ,

$\kappa = \omega/a_0$  – współczynnik ściśliwości cieczy przyjmujący wartość zero w przypadku cieczy nieściśliwej,

$a_0$  – prędkość dźwięku w cieczy,

$\omega = \omega_{Re} + i\omega_{Im}$  – częstość kołowa drgań własnych, przy czym dla cieczy nieściśliwej część urojona  $\omega_{Im} = 0$ .

Rozwiązanie równania (5.1) można przedstawić jako „potencjał warstwy podwójnej w postaci brzegowego równania całkowego” [9]. Dla tego równania przyjęto warunki brzegowe typu Neumanna, tzn.

$$\frac{\partial \varphi(\mathbf{x}, t)}{\partial z} = \frac{\partial w(\mathbf{x}, t)}{\partial t}, \quad (5.2)$$

gdzie  $w(\mathbf{x}, t) = \tilde{w}(\mathbf{x})e^{i\omega t}$  oznacza przemieszczenie normalne powierzchni środkowej płyty. Po odpowiednich przekształceniach przedstawionych szczegółowo w pracy [9] otrzymuje się brzegowe równanie całkowe łączące amplitudy przemieszczeń z amplitudami ciśnienia hydrodynamicznego:

$$\omega^2 \cdot \tilde{w}(x_m, y_m) = -\frac{1}{4\pi\rho_c} \sum_{n=1}^N \Delta p_n \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n, \quad (5.3)$$

gdzie:

$\tilde{w}(x_m, y_m)$  – amplituda przemieszczenia punktu płyty o współrzędnych  $(x_m, y_m)$  pozwalająca zapisać przemieszczenie normalne powierzchni środkowej płyty przy pomocy wzoru:  $w(x_m, y_m, t) = \tilde{w}(x_m, y_m)e^{i\omega t}$ ,

$\Delta p_n$  – amplituda wypadkowego wektora ciśnienia hydrodynamicznego w punkcie  $(x_n, y_n)$  na powierzchni  $S_n$  płyty,

$\rho_c$  – gęstość cieczy otaczającej płytę.

Równanie (5.3) można zapisać w poniższej postaci macierzowej:

$$-4\pi\rho_c\omega^2\tilde{\mathbf{w}} = \mathbf{H}\tilde{\mathbf{p}}, \quad (5.4)$$

gdzie  $\mathbf{H}$  jest macierzą kwadratową zespoloną o wymiarze  $N \times N$  ( $N$  – liczba podobszarów cieczy na powierzchni płyty), której elementy wyrażone są wzorem:

$$H_{mn} = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n. \quad (5.5)$$

Siły hydrodynamiczne działające na powierzchnię płyty można macierzowo zapisać w postaci:

$$\mathbf{P} = -\mathbf{M}_c\omega^2\tilde{\mathbf{w}}, \quad (5.6)$$

gdzie  $\mathbf{M}_c$  jest macierzą bezwładności (mas) cieczy wyrażoną wzorem:

$$\mathbf{M}_c = 4\pi\rho_c\mathbf{S}\mathbf{H}^{-1}. \quad (5.7)$$

Z kolei macierz  $\mathbf{S}$  jest macierzą diagonalną, w której na głównej przekątnej występują pola powierzchni kolejnych podobszarów cieczy  $S_n$ , tzn.

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} S_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & S_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & S_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & S_N \end{bmatrix}, \quad (5.8)$$

przy czym dla równych podobszarów:  $S_1 = S_2 = S_3 = \cdots = S_N = S = h_1 k_1$ .

Aby obliczyć całkę (5.5) metodą przybliżoną, należy zapisać w postaci algebraicznej liczbę zespoloną  $e^{-i\kappa r}$  występującą w wyrażeniu podcałkowym. Powstałe w ten sposób funkcje sinus i cosinus rozwija się następnie w szereg potęgowy (dwa pierwsze człony szeregu). Otrzymuje się wtedy następujące wyrażenie:

$$\frac{e^{-i\kappa r}}{r} = \frac{\cos \kappa r - i \sin \kappa r}{r} \approx \frac{1}{r} \left[ 1 - \frac{\kappa^2 r^2}{2} - i \left( \kappa r - \frac{\kappa^3 r^3}{6} \right) \right]. \quad (5.9)$$

Ponieważ  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ , więc można zapisać poniższe wzory na pochodne:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r} \right) &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{2r} \cdot 2z = -\frac{1}{r^3} z, \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{1}{r} \right) \right]_{z \rightarrow 0} = -\frac{1}{r^3}, \\ \frac{\partial}{\partial z} (r) &= \frac{1}{2r} \cdot 2z = \frac{z}{r}, \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (r) \right]_{z \rightarrow 0} = \frac{1}{r}, \\ \frac{\partial}{\partial z} (r^2) &= 2r \cdot \frac{1}{2r} \cdot 2z = 2z, \quad \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} (r^2) \right]_{z \rightarrow 0} = 2. \end{aligned}$$

Ostatecznie wyrażenie pod całką we wzorze (5.5) przyjmuje postać przybliżoną:

$$\left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{e^{-i\kappa r}}{r} \right) \right]_{z \rightarrow 0} \approx -\frac{1}{r^3} - \frac{\kappa^2}{2r} + i \frac{\kappa^3}{3} = f_1 + \frac{\kappa^2}{2} f_2 + i \frac{\kappa^3}{3}, \quad (5.10)$$

gdzie:

$$f_1 = -\frac{1}{r^3}, \quad (5.11)$$

$$f_2 = -\frac{1}{r}. \quad (5.12)$$

Zatem elementy macierzy  $\mathbf{H}$  można wyrazić poniższym wzorem przybliżonym:

$$H_{mn} \approx \int_{S_n} \left( f_1 + \frac{\kappa^2}{2} f_2 + i \frac{\kappa^3}{3} \right) dS_n. \quad (5.13)$$

W niniejszej pracy przyjęto do badań przypadek cieczy nieściśliwej, tzn.  $\kappa = 0$ . Wówczas wzór (5.13) upraszcza się do:

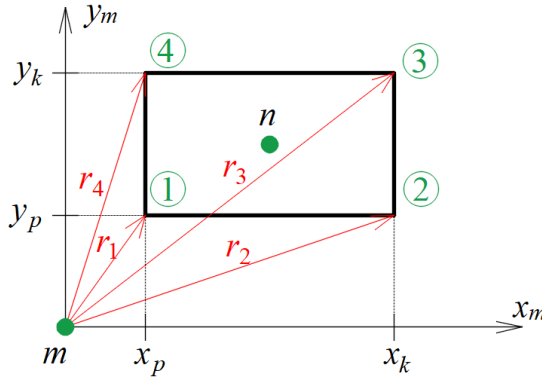
$$H_{mn} \approx - \int_{S_n} \frac{1}{r^3} dS_n. \quad (5.14)$$

Przy wyznaczaniu elementów macierzy  $\mathbf{H}$  według wzoru (5.14) należy pamiętać, że  $m$  oznacza w tym przypadku numer punktu kolokacji, w którym przyjmuje się początek lokalnego układu współrzędnych, a  $n$  oznacza numer kolejnego podobszaru cieczy ( $m, n = 1, 2, 3, \dots, N$ ).

Zgodnie z [9] całka (5.14) po obszarze prostokątnym  $S_n$  może zostać obliczona analitycznie i wynosi:

$$H_{mn} = -\frac{1}{y_p} \left( \frac{x_k}{r_2} - \frac{x_p}{r_1} \right) + \frac{1}{x_k} \left( \frac{y_k}{r_3} - \frac{y_p}{r_2} \right) + \frac{1}{y_k} \left( \frac{x_k}{r_3} - \frac{x_p}{r_4} \right) - \frac{1}{x_p} \left( \frac{y_k}{r_4} - \frac{y_p}{r_1} \right), \quad (5.15)$$

gdzie poszczególne oznaczenia występujące we wzorze wyjaśniono na rysunku 5.2.



Rysunek 5.2. Wyjaśnienie oznaczeń do wzoru (5.15) pozwalającego obliczyć całkę (5.14) po obszarze prostokąta [9]

Aby wyznaczyć macierz  $\mathbf{H}$  zgodnie ze wzorem (5.15) w programie Octave, można przyjąć następujące postępowanie. W pierwszej kolejności należy zbudować macierz pomocniczą  $\mathbf{W}$  zawierającą w kolejnych kolumnach współrzędne punktów narożnych podobszarów cieczy w układzie globalnym przyjętym w lewym dolnym narożu płyty (rysunek 5.1). Macierz ta ma następującą postać:

$$\begin{bmatrix} 0 & h_1 & 2h_1 & \cdots & ch_1 & 0 & h_1 & 2h_1 & \cdots & ch_1 & \cdots & 0 & h_1 & 2h_1 & \cdots & ch_1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & k_1 & k_1 & k_1 & \cdots & k_1 & \cdots & dk_1 & dk_1 & dk_1 & \cdots & dk_1 \end{bmatrix}. \quad (5.16)$$

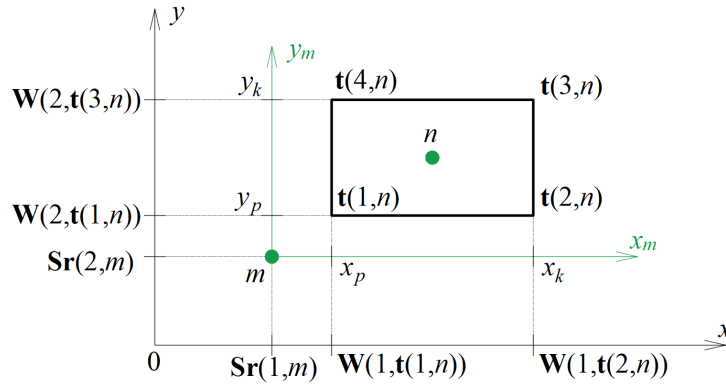
Kolejna macierz pomocnicza  $\mathbf{Sr}$ , którą należy utworzyć, składa się z kolumn zawierających współrzędne punktów kolokacji podobszarów cieczy w układzie globalnym płyty i przyjmuje postać:

$$\begin{bmatrix} \frac{h_1}{2} & \frac{3h_1}{2} & \dots & \frac{(2c-1)h_1}{2} & \frac{h_1}{2} & \frac{3h_1}{2} & \dots & \frac{(2c-1)h_1}{2} & \dots & \frac{h_1}{2} & \dots & \frac{(2c-1)h_1}{2} \\ \frac{k_1}{2} & \frac{k_1}{2} & \dots & \frac{k_1}{2} & \frac{3k_1}{2} & \frac{3k_1}{2} & \dots & \frac{3k_1}{2} & \dots & \frac{(2d-1)k_1}{2} & \dots & \frac{(2d-1)k_1}{2} \end{bmatrix}. \quad (5.17)$$

Macierze pomocnicze (5.16) oraz (5.17) umożliwiają wyznaczenie współrzędnych:  $x_p, x_k, y_p, y_k$  określających położenie podobszaru cieczy o numerze  $n \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$  w lokalnym układzie współrzędnych mającym początek w środku podobszaru cieczy o numerze  $m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots, N$ ). Sposób wyznaczenia tych czterech współrzędnych wchodzących w skład wzoru (5.15) przedstawiono graficznie na rysunku 5.3. Stąd wynika, że:

$$\begin{aligned} x_p &= \mathbf{W}(1, \mathbf{t}(1, n)) - \mathbf{Sr}(1, m), \\ x_k &= \mathbf{W}(1, \mathbf{t}(2, n)) - \mathbf{Sr}(1, m), \\ y_p &= \mathbf{W}(2, \mathbf{t}(1, n)) - \mathbf{Sr}(2, m), \\ y_k &= \mathbf{W}(2, \mathbf{t}(3, n)) - \mathbf{Sr}(2, m), \end{aligned} \quad (5.18)$$

gdzie  $\mathbf{t}$  oznacza tzw. macierz powiązań dla podobszarów cieczy. Jest to macierz o wymiarach  $4 \times N$ , która w kolejnych kolumnach zawiera numery węzłów narożnych podobszarów cieczy. Numerację globalną węzłów podobszarów cieczy przyjęto

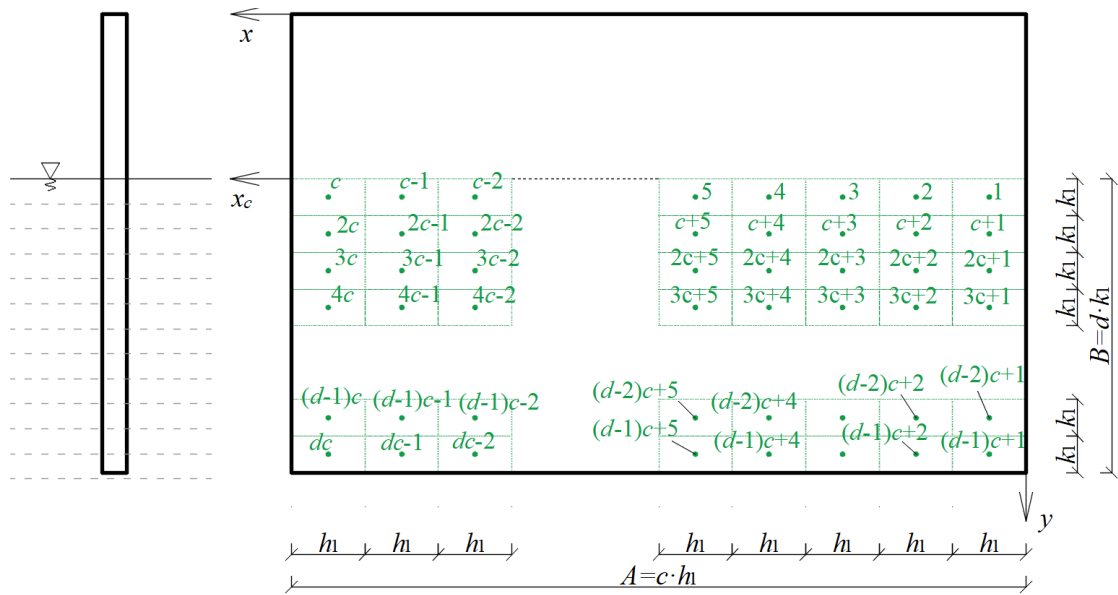


Rysunek 5.3. Rysunek pomocniczy do wzoru (5.18)

identyczną z numeracją przyjętą dla elementów skończonych, pokazaną na rysunku 3.3. Numerację węzłów każdego pojedynczego podobszaru cieczy przyjęto zgodnie z rysunkiem 5.2. Kolumna macierzy powiązań  $\mathbf{t}$  odpowiadająca podobszarowi cieczy o numerze  $q \cdot c + r$ , gdzie  $q = 0, 1, 2, \dots, d-1$  oraz  $r = 1, 2, 3, \dots, c$ , zawiera kolejno numery węzłów:  $qc + q + r$ ,  $qc + q + r + 1$ ,  $(q+1)c + q + r + 2$ ,  $(q+1)c + q + r + 1$ .

W algorytmie tworzącym macierz  $\mathbf{H}$  początek lokalnego układu współrzędnych przyjmuje się w kolejnych punktach kolokacji podobszarów cieczy. Dla pewnego ustalonego położenia lokalnego układu współrzędnych w punkcie kolokacji o numerze  $m$ , gdzie  $m \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ , wyznacza się współrzędne (5.18) odpowiadające kolejnym podobszynom cieczy o numerach  $n = 1, 2, 3, \dots, N$ . W ten sposób powstaje wiersz macierzy  $\mathbf{H}$  o numerze  $m$ . Po wyznaczeniu macierzy  $\mathbf{H}$  oraz macierzy  $\mathbf{S}$ , zgodnie ze wzorem (5.8), macierz bezwładności cieczy można obliczyć ze wzoru (5.7). W celu zbudowania macierzy bezwładności cieczy konieczne jest wykonanie działania odwracania macierzy  $\mathbf{H}$ . Macierz  $\mathbf{H}^{-1}$  obliczano w środowisku Octave przy zastosowaniu wbudowanego algorytmu „ $\text{inv}(\mathbf{H})$ ” pozwalającego otrzymać macierz odwrotną do danej.

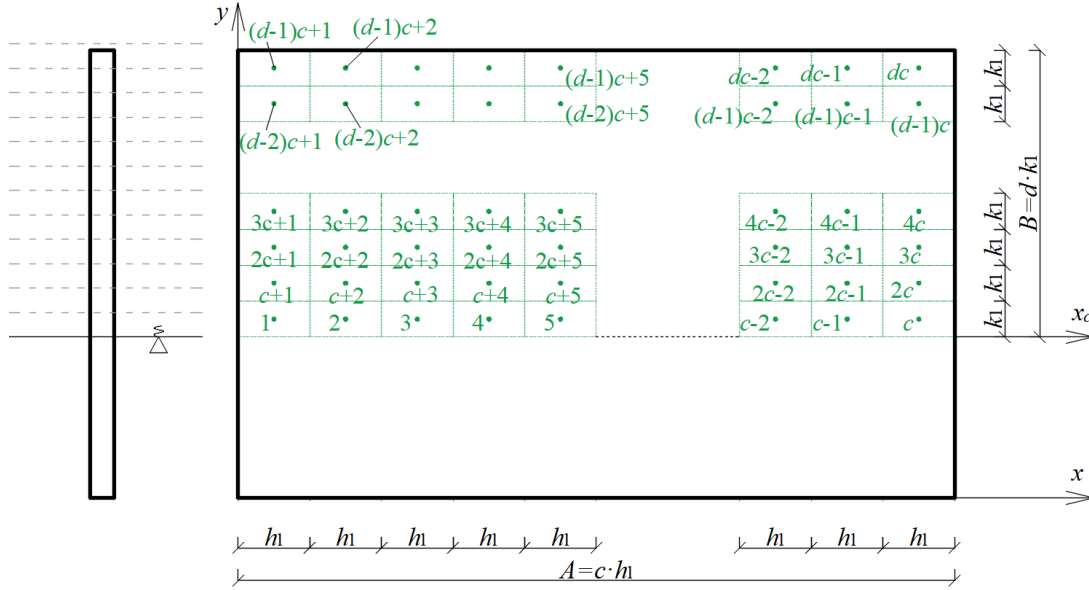
W przypadku płyty całkowicie zanurzonej w płynie podział na podobszary cieczy dotyczy całej powierzchni płyty. Można jednak założyć, że płyta zanurzona jest w płynie częściowo. Wówczas dyskretyzacja płyty na podobszary cieczy obejmuje jedynie część powierzchni płyty, do której przylega ciecz, co pokazano na rysunku 5.4. W dalszych rozważaniach, dla czytelniejszego pokazania numeracji podobszarów cie-



Rysunek 5.4. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem jednakowych podobszarów cieczy o kształcie prostokątnym – rysunek pokazujący prawidłowe rozmieszczenie w przestrzeni ośrodków próżnia–ciecz

czy, przedstawiano płytę wraz ze wskazaniem poziomu cieczy w sposób odwrócony, tak jak to pokazano na rysunku 5.5. Takie odwrócenie rysunku wykonano w celu dostosowania numeracji podobszarów cieczy do reguł ustalonych w podrozdziale 3.2.1

przy numeracji elementów skończonych dyskretyzujących powierzchnię płyty (rysunek 3.3). Przyjętą w ten sposób numerację podobszarów cieczy użyto podczas opracowywania algorytmów komputerowych w środowisku Octave.



Rysunek 5.5. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem jednakowych podobszarów cieczy o kształcie prostokątnym – rysunek odwrócony utworzony pomocniczo w celu opracowania algorytmów komputerowych

Przy obliczaniu macierzy  $\mathbf{H}$  zgodnie ze wzorem (5.5) należy wziąć pod uwagę dodatkowe składniki w poszczególnych jej elementach w przypadku uwzględnienia wpływu granicy woda–powietrze. Takie postępowanie wykonuje się, gdy płyta zanurzona jest w cieczy częściowo lub całkowicie, przy znanym położeniu granicy woda–powietrze względem niej. Zatem zanurzenie płyty w płynie może być w pozycji pionowej lub poziomej. Zgodnie z pracą [24] warunki uwzględniające wpływ powierzchni swobodnej cieczy definiuje się na jeden z dwóch sposobów:

1. Wektor ciśnienia hydrodynamicznego płynu jest równy zero, tzn.  $\mathbf{p}_n = \mathbf{0}$ . Wówczas dla cieczy nieściśliwej wzór (5.5) przyjmuje postać:

$$H_{mn} = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{PQ}} - \frac{1}{r_{PQ'}} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n. \quad (5.19)$$

2. Wektor prędkości płynu działający w kierunku normalnym do powierzchni swobodnej cieczy jest równy zero, tzn.  $\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ . Wówczas dla cieczy nieściśliwej wzór (5.5) można zapisać następująco:

$$H_{mn} = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{PQ}} + \frac{1}{r_{PQ'}} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n. \quad (5.20)$$

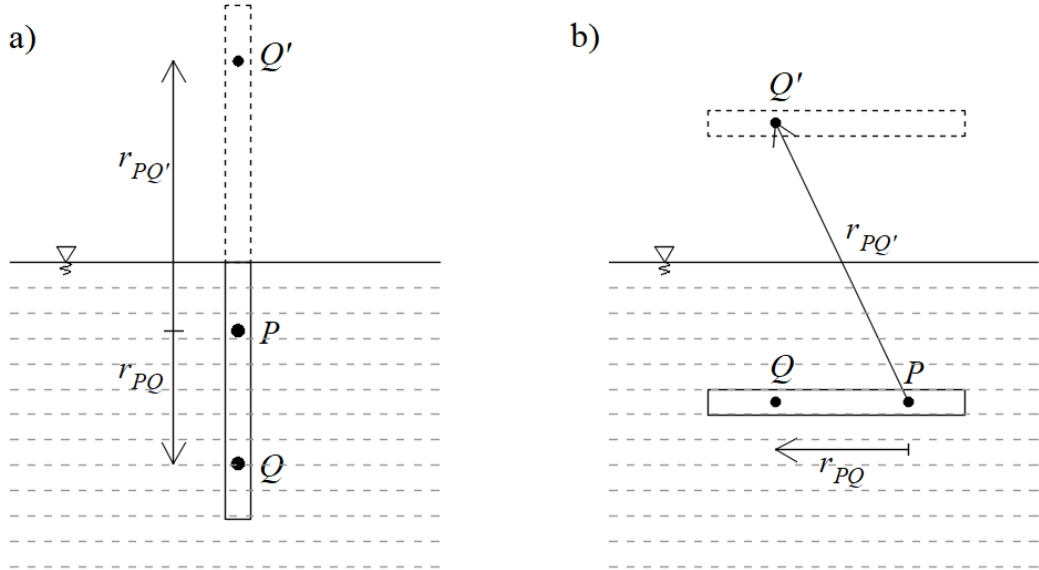
Ponadto możliwe jest wykonanie postępowania uproszczonego, gdzie macierz  $\mathbf{H}$  wyznacza się jedynie według wzoru (5.5), uwzględniając dyskretyzację płyty na podobszary cieczy zgodnie z rysunkiem 5.5. Nie wprowadza się wówczas do macierzy  $\mathbf{H}$  dodatkowych modyfikacji wynikających z wpływu granicy ośrodków płyn–powietrze.

Dwa możliwe przypadki ułożenia płyty w płynie, przy uwzględnieniu powierzchni swobodnej cieczy, pokazano na rysunku 5.6, gdzie przedstawiono również sposób wyznaczania odległości występujących w wyrażeniach podcałkowych we wzorach (5.19) oraz (5.20). Wzory na elementy macierzy  $\mathbf{H}$  można zapisać za pomocą następujących postaci ogólnych:

$$H_{mn} = H_{mn}^{(1)} - H_{mn}^{(2)}, \quad (5.21)$$

$$H_{mn} = H_{mn}^{(1)} + H_{mn}^{(2)}, \quad (5.22)$$

przy czym wzór (5.21) dotyczy założenia o zerowym wektorze ciśnienia hydrodynamicznego płynu, natomiast wzór (5.22) obowiązuje przy przyjęciu zerowego wektora prędkości płynu. Składnik  $H_{mn}^{(1)}$  występujący w obu powyższych wzorach wyznacza się zgodnie ze wzorem analitycznym (5.15).



Rysunek 5.6. Sposób uwzględniania powierzchni swobodnej cieczy dla płyty zanurzonej pionowo (a) lub poziomo (b) [24]

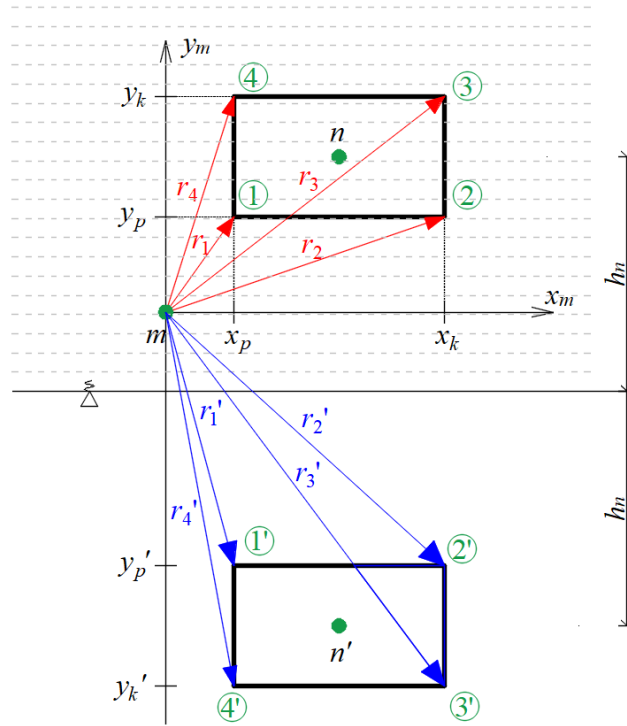
W celu wyznaczenia składnika  $H_{mn}^{(2)}$  dla płyty zanurzonej w cieczy pionowo, zgodnie z rysunkiem 5.6a), należy wziąć pod uwagę tzw. fikcyjny podobszar cieczy będący lustrzanym odbiciem podobszaru rozpatrywanego. Sytuację tę pokazano na rysunku 5.7, z którego wynika, że elementy  $H_{mn}^{(2)}$  oblicza się przy użyciu wzoru (5.15)

z tą różnicą, że rzędne  $y_p$  oraz  $y_k$  zastępuje się rzędnymi  $y'_p$  oraz  $y'_k$  przyjmującymi wartości:

$$y'_p = y_k - 2h_n, \quad (5.23)$$

$$y'_k = y_p - 2h_n, \quad (5.24)$$

gdzie  $h_n$  oznacza głębokość położenia  $n$ -tego podobszaru cieczy poniżej powierzchni swobodnej płynu.



Rysunek 5.7. Rysunek pomocniczy do obliczania całek (5.19) oraz (5.20) dla płyty zanurzonej pionowo w cieczy

Aby wyznaczyć składnik  $H_{mn}^{(2)}$  dla płyty zanurzonej w cieczy poziomo, zgodnie z rysunkiem 5.6b), należy wziąć pod uwagę niezerową współrzędną  $z$  we wzorze na odległość  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Oblicza się wtedy całkę:

$$H_{mn}^{(2)} = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{PQ'}} \right) \right]_{z \rightarrow 2h_n} dS_n. \quad (5.25)$$

Współrzędną  $z$  w powyższym wzorze dąży do dwukrotnej wartości  $h_n$  głębokości zanurzenia płyty poniżej poziomu płynu. Wynika to z faktu, że lustrzane odbicie rozpatrywanej płyty względem powierzchni swobodnej cieczy jest położone w odległości

$2h_n$  powyżej powierzchni środkowej płyty rzeczywistej, co pokazano na rysunku 5.8.

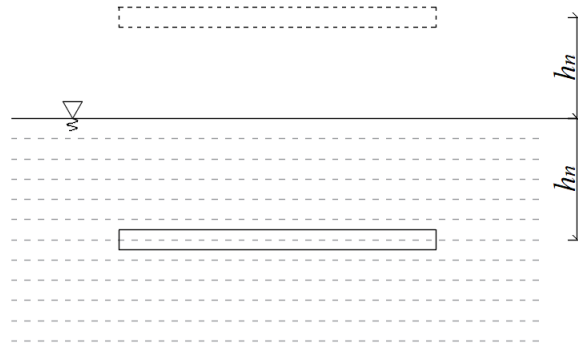
Pochodną pod całką (5.25) oblicza się następująco:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{1}{r_{PQ'}} \right) &= \frac{\partial}{\partial z} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2z = \\ &= -z (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}}, \\ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{PQ'}} \right) &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + z \cdot \frac{3}{2} (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2z = \\ &= -(x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z^2 (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}}.\end{aligned}$$

Ostatecznie całka (5.25) przyjmuje poniższą postać:

$$H_{mn}^{(2)} = \int_{x_p}^{x_k} \int_{y_p}^{y_k} \left[ 12h_n^2 (x^2 + y^2 + 4h_n^2)^{-\frac{5}{2}} - (x^2 + y^2 + 4h_n^2)^{-\frac{3}{2}} \right] dy dx. \quad (5.26)$$

Procedurę całkowania wyrażenia (5.26) można przeprowadzić numerycznie, korzystając np. z metody Gaussa.



Rysunek 5.8. Rysunek pomocniczy do obliczania całek (5.19) oraz (5.20) dla płyty zanurzonej poziomo w cieczy

W celu wyznaczenia macierzy  $\mathbf{H}$  dla płyty zanurzonej całkowicie lub częściowo w cieczy, z uwzględnieniem powierzchni swobodnej płynu, postępowanie początkowe jest analogiczne jak dla wcześniej omówionego przypadku płyty całkowicie otoczonej płynem, z pominięciem wpływu granicy płyn–powietrze. Pomocniczy globalny układ współrzędnych  $x_c O y$  można założyć zgodnie z rysunkiem 5.5, tzn. jego początek znajduje się na lewej krawędzi płyty, na granicy ciecz–powietrze. Posługując się tym układem współrzędnych, podobnie jak wcześniej, należy wyznaczyć pomocnicze macierze –  $\mathbf{W}$  ze współrzędnymi punktów narożnych podobszarów cieczy oraz  $\mathbf{Sr}$  ze współrzędnymi ich punktów kolokacji. Przy pomocy tych dwóch macierzy pomocniczych oraz macierzy powiązań  $\mathbf{t}$  dla podobszarów cieczy można wyznaczyć

współrzędne:  $x_p$ ,  $x_k$ ,  $y_p$ ,  $y_k$ , zgodnie ze wzorem (5.18), i dalej otrzymuje się elementy macierzy  $\mathbf{H}^{(1)}$  bez uwzględniania wpływu powierzchni swobodnej cieczy. W zależności od przyjętego założenia co do sposobu wzięcia pod uwagę wpływu granicy płyn–powietrze, od macierzy  $\mathbf{H}^{(1)}$  odejmuje się macierz  $\mathbf{H}^{(2)}$  albo do macierzy  $\mathbf{H}^{(1)}$  dodaje się macierz  $\mathbf{H}^{(2)}$ , zgodnie ze wzorami odpowiednio (5.21) oraz (5.22).

W przypadku płyty pionowo zanurzonej w cieczy algorytm wyznaczania macierzy  $\mathbf{H}^{(2)}$  różni się od algorytmu tworzenia macierzy  $\mathbf{H}^{(1)}$  tym, że we wzorze (5.18) dwie współrzędne  $y_p$  oraz  $y_k$  określa się przy użyciu następujących formuł:

$$\begin{aligned} y_p &= \mathbf{W}(2, \mathbf{t}(1, n)) - \mathbf{Sr}(2, m) - 2\mathbf{Sr}(2, n), \\ y_k &= \mathbf{W}(2, \mathbf{t}(3, n)) - \mathbf{Sr}(2, m) - 2\mathbf{Sr}(2, n), \end{aligned} \quad (5.27)$$

które wynikają ze wzorów (5.23) oraz (5.24).

W sytuacji gdy płyta jest poziomo zanurzona w cieczy, macierz  $\mathbf{H}^{(2)}$  oblicza się za pomocą wzoru (5.26), korzystając z numerycznych procedur całkowania.

## 5.2. Rozwiązanie zadania interakcji płyty i płynu przy zastosowaniu MES

W niniejszym podrozdziale opisano metodykę wyznaczania charakterystyk dynamicznych układu płyta–ciecz przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES oraz MEB. W celu przeprowadzenia analizy dynamicznej płyty zanurzonej w płynie należy rozwiązać uogólniony problem własny wyrażony wzorem (4.6), tzn. problem postaci:

$$(\mathbf{K} - \lambda \mathbf{M})\mathbf{q}_a = \mathbf{0}, \quad (5.28)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  w rozważanym obecnie przypadku oznacza macierz bezwładności układu płyta–ciecz, którą można zapisać następująco:

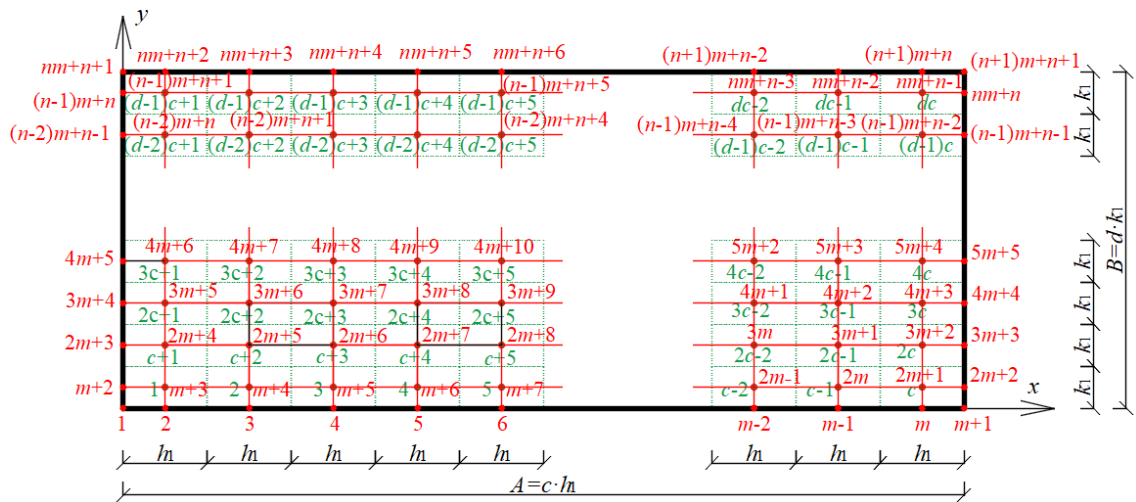
$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_{pc} = \mathbf{M}_p + \mathbf{M}_c. \quad (5.29)$$

We wzorze (5.29) macierz  $\mathbf{M}_p$  jest macierzą bezwładności płyty, którą wyznacza się zgodnie z metodologią MES opisaną w podrozdziale 3.2.1. Z kolei macierz  $\mathbf{M}_c$  jest macierzą bezwładności płynu otaczającego płytę, której postać określa się na podstawie metodologii MEB przedstawionej w podrozdziale 5.1.

Macierze bezwładności płyty oraz otaczającego płynu nie są macierzami tych samych wymiarów, stąd działanie dodawania macierzy pojawiające się we wzorze (5.29) nie oznacza sumowania według matematycznej definicji. Przez to działanie

należy rozumieć dodawanie kolejnych elementów macierzy  $\mathbf{M}_c$  do odpowiednich i ściśle określonych elementów macierzy  $\mathbf{M}_p$ . Aby prawidłowo dodać te dwie macierze, należy dokonać dwójakiej dyskretyzacji powierzchni środkowej płyty. Pierwsza dyskretyzacja dotyczy określenia siatki podobszarów cieczy, natomiast druga wiąże się ze zdefiniowaniem siatki MES.

W przypadku płyty całkowicie zanurzonej w płynie przyjęto regularną dyskretyzację jej powierzchni środkowej na podobszary cieczy zgodnie z rysunkiem 5.1. Następnie dokonano dyskretyzacji płyty na elementy skończone 4-węzłowe typu plQ4 [1] tak, aby ich węzły pokrywały się z punktami kolokacji podobszarów cieczy. Sytuację tę przedstawiono na rysunku 5.9, gdzie kolorem zielonym oznaczono dyskretyzację płyty na podobszary cieczy, natomiast kolorem czerwonym – odpowiadającą dyskretyzację na elementy skończone. Na rysunku tym podano też numerację punktów kolokacji związanych z podobszarami opisującymi obecność cieczy oraz numerację węzłów siatki MES. Można zauważyć, że przy takim postępowaniu siatka MES jest



Rysunek 5.9. Dyskretyzacja płyty całkowicie zanurzonej w płynie z użyciem regularnego podziału na podobszary cieczy i dopasowanej odpowiednio siatki MES

nieregularna, tzn. nie składa się z identycznych elementów skończonych. Jednak wówczas możliwe jest powiązanie numeracji podobszarów cieczy z numeracją węzłów siatki MES i właściwe dodanie do siebie macierzy bezwładności płyty  $\mathbf{M}_p$  oraz cieczy  $\mathbf{M}_c$ . Na podstawie rysunku 5.9 można stwierdzić, że przy dyskretyzacji płyty na  $c \cdot d$  podobszarów cieczy, odpowiadająca dyskretyzacja MES składa się z  $m \cdot n$  elementów skończonych, gdzie zachodzą zależności  $m = c + 1$  oraz  $n = d + 1$ .

Niech  $i$  oznacza dowolnie ustalony numer podobszaru cieczy, natomiast  $x$  niech będzie numerem węzła siatki MES znajdującego się w  $i$ -tym punkcie kolokacji pod-

obszaru cieczy. Na podstawie rysunku 5.9 można stwierdzić zachodzenie następującej zależności:

$$i = qc + r \Rightarrow x = (q + 1)m + r + q + 2, \quad (5.30)$$

gdzie  $r = 1, 2, 3, \dots, c$  oraz  $q = 0, 1, 2, \dots, d - 1$ . Ponieważ poszczególne elementy macierzy mas cieczy  $\mathbf{M}_c$  odpowiadają translacyjnym stopniom swobody w macierzy mas płyty  $\mathbf{M}_p$ , więc element macierzy bezwładności płynu o indeksie  $(i_1, i_2)$  należy dodać do elementu macierzy bezwładności płyty o indeksie  $(3x_1 - 2, 3x_2 - 2)$ , gdzie wartości  $x_1$  oraz  $x_2$  obliczane są na podstawie wartości odpowiednio  $i_1$  oraz  $i_2$  zgodnie ze wzorem (5.30).

Aby wyznaczyć dla płyty globalne macierze – sztywności  $\mathbf{K}$  i bezwładności (konsystentną)  $\mathbf{M}_p$ , występujące we wzorach (5.28) oraz (5.29), należy najpierw utworzyć macierze sztywności  $\mathbf{K}^e$  oraz bezwładności  $\mathbf{M}_p^e$  pojedynczych elementów skończonych zgodnie ze wzorami odpowiednio (3.17) i (4.17). W tym celu można zastosować wzory analityczne z pozycji [1] (dot. macierzy sztywności) lub całkowanie numeryczne. W programie Octave utworzono tzw. zewnętrzne funkcje pozwalające wygenerować te dwa typy macierzy na podstawie wymiarów boków elementów skończonych. W rozpatrywanej siatce MES dostosowanej do regularnej siatki podobszarów cieczy występują cztery rodzaje elementów skończonych<sup>1</sup>:

- narożne o wymiarach  $h_1/2 \times k_1/2$  posiadające numery:  
1,  $m$ ,  $(n - 1)m + 1$ ,  $nm$ ,
- przykrawędziowe dolne/górne o wymiarach  $h_1 \times k_1/2$  o numerach:  
2, 3, 4,  $\dots$ ,  $m - 1$  oraz  $(n - 1)m + 2$ ,  $(n - 1)m + 3$ ,  $(n - 1)m + 4$ ,  $\dots$ ,  $nm - 1$ ,
- przykrawędziowe lewe/prawe o wymiarach  $h_1/2 \times k_1$  posiadające numery:  
 $m + 1$ ,  $2m + 1$ ,  $3m + 1$ ,  $\dots$ ,  $(n - 2)m + 1$  oraz  $2m$ ,  $3m$ ,  $4m$ ,  $\dots$ ,  $(n - 1)m$ ,
- pośrednie o wymiarach  $h_1 \times k_1$  o numerach:  
 $im + 2$ ,  $im + 3$ ,  $im + 4$ ,  $\dots$ ,  $(i + 1)m - 1$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n - 2$ .

Po wyznaczeniu czterech typów macierzy sztywności i macierzy bezwładności dla wyżej opisanych elementów skończonych dokonuje się agregacji globalnych macierzy  $\mathbf{K}$  oraz  $\mathbf{M}_p$ . Aby wykonać tą procedurę, w środowisku Octave zastosowano cztery pętle typu „for”, w których macierze sztywności (lub bezwładności) elementów skończonych, odpowiadających wskazanym w pętli numerom, są dodawane do odpowiednich miejsc w globalnej macierzy sztywności (lub bezwładności) płyty przyjętej wstępnie jako macierz zerowa o wymiarach wynikających z całkowitej liczby stopni

<sup>1</sup> Elementy skończone na rysunku 5.9 ponumerowano zgodnie z rysunkiem 3.3.

swobody płyty. Przykładowo dla elementów skończonych narożnych pętla przyjmuje następującą postać:

```
for i=[1,m,(n-1)*m+1,n*m]
    K([3*t(1,i)-2:3*t(2,i),3*t(4,i)-2:3*t(3,i)], [3*t(1,i)-2:3*t(2,i),
    3*t(4,i)-2:3*t(3,i)])=
    K([3*t(1,i)-2:3*t(2,i),3*t(4,i)-2:3*t(3,i)], [3*t(1,i)-2:3*t(2,i),
    3*t(4,i)-2:3*t(3,i)])+
    K_e1([1:6,10:12,7:9], [1:6,10:12,7:9]);
end
```

W powyższym algorytmie „K\_e1” jest macierzą sztywności elementów skończonych narożnych utworzoną wcześniej przy użyciu zewnętrznej funkcji „mac\_K\_e(a,b)”, gdzie jako argumenty należy przyjąć wymiary boków elementu skończonego (przykładowo dla elementów narożnych  $a = h_1/2$  oraz  $b = k_1/2$ ). Z powyższego algorytmu wynika, że obszary globalnej macierzy sztywności, odpowiadające macierzom sztywności kolejnych elementów skończonych, ustalone są przy użyciu macierzy powiązań „t” zawierającej numery węzłów wszystkich elementów skończonych dyskretyzujących powierzchnię płyty.

Po wyznaczeniu wszystkich niezbędnych macierzy ( $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{M}_p$ ,  $\mathbf{M}_c$ ) wchodzących w skład uogólnionego problemu własnego (5.28) należy przy pomocy odpowiedniego algorytmu dodać do siebie macierze  $\mathbf{M}_p$  oraz  $\mathbf{M}_c$ . W algorytmie tym wykorzystuje się zależność (5.30) i może on przyjąć następującą postać:

```
for i=1:c*d
    r1=mod(i,c);
    if r1==0
        r1=c;
    end
    q1=(i-r1)/c;
    x=(q1+1)*m+r1+q1+2;
    for j=1:c*d
        r2=mod(j,c);
        if r2==0
            r2=c;
        end
        q2=(j-r2)/c;
        y=(q2+1)*m+r2+q2+2;
```

```

M_p(3*x-2,3*y-2)=M_p(3*x-2,3*y-2)+M_c(i,j);
end
end

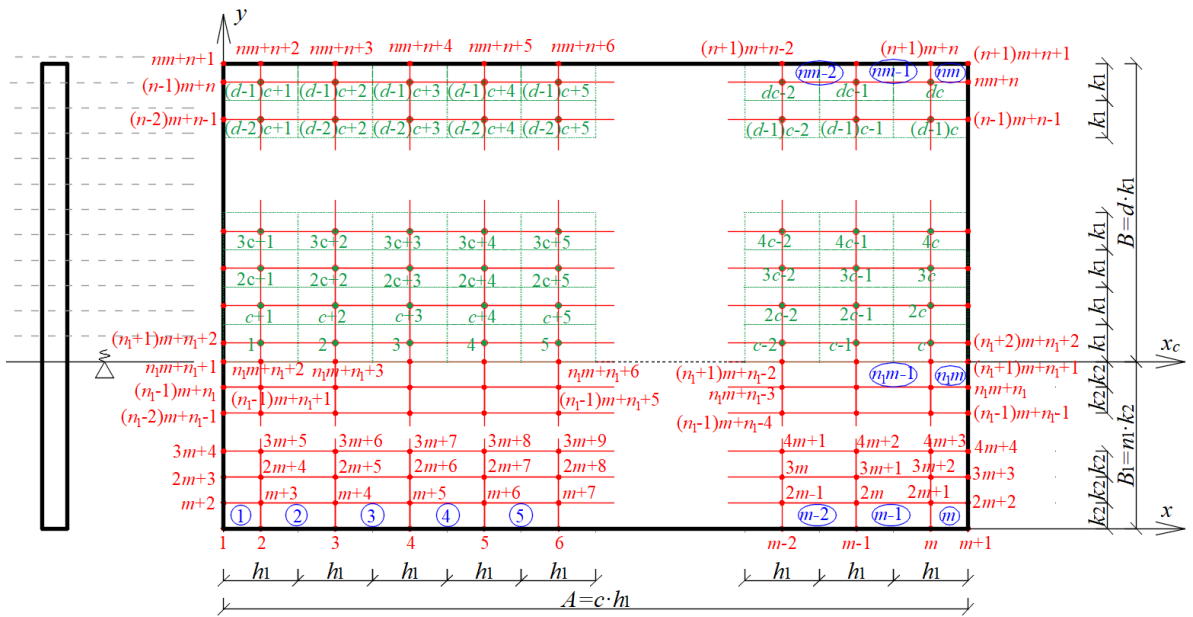
```

W powyższej procedurze polecenie „ $\text{mod}(i, c)$ ” oznacza działanie *modulo*, tj. resztę z dzielenia  $i$  przez  $c$ . Jeśli ta reszta wynosi 0, to przyjmuje się ją jako  $c$ , co wynika z dodatkowych pętli warunkowych napisanych w algorytmie. Po wyznaczeniu indeksów  $x$  oraz  $y$  w macierzy bezwładności płyty  $\mathbf{M}_p$  odpowiadających indeksom  $i$  oraz  $j$  w macierzy bezwładności cieczy  $\mathbf{M}_c$  wykonuje się dodawanie kolejnych elementów macierzy bezwładności cieczy do odpowiednich elementów macierzy bezwładności płyty. Ostatecznie uzyskuje się macierz bezwładności  $\mathbf{M}_{pc}$  układu płyta–ciecz. Po zmodyfikowaniu macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  oraz macierzy bezwładności  $\mathbf{M}_{pc}$  ze względu na warunki podparcia badanej płyty, macierze te wchodzi bezpośrednio w skład rozwiązywanego uogólnionego problemu własnego (5.28). Po rozwiązaniu tego problemu można wyznaczyć szukane częstości i postacie drgań własnych płyty całkowicie otoczonej cieczą.

W przypadku gdy płyta zanurzona jest w płynie częściowo, jej dyskretyzację na regularne podobszary cieczy należy wykonać zgodnie z rysunkiem 5.5. Następnie dokonuje się odpowiedniej dyskretyzacji płyty na elementy skończone w sposób pokazany na rysunku 5.10. W rozważanym przypadku w części płyty zanurzonej w płynie siatkę MES (kolor czerwony) dopasowuje się do siatki podobszarów cieczy (kolor zielony) w sposób analogiczny jak dla płyty całkowicie otoczonej cieczą. Z kolei dla części płyty znajdującej się w próżni jedynie poziome wymiary elementów skończonych dostosowuje się do siatki podobszarów cieczy, a wymiary pionowe można przyjąć dowolnie. Założono, że dyskretyzacja pionowa części płyty poza cieczą jest regularna i tworzą ją elementy skończone o pionowym wymiarze równym  $k_2$ . W dalszych rozważaniach przyjęto dyskretyzację powierzchni płyty zanurzonej w płynie na  $c \cdot d$  jednakowych podobszarów cieczy. Wówczas dyskretyzacja MES składa się z  $m \cdot n$  elementów skończonych, gdzie  $m = c + 1$ ,  $n = n_1 + d + 1$  oraz  $n_1$  oznacza liczbę elementów skończonych w kierunku pionowym w części płyty poza cieczą. W przyjętej siatce MES występuje sześć rodzajów elementów skończonych:

- narożne w płynie o wymiarach  $h_1/2 \times k_1/2$ , posiadające numery:  
 $n_1m + 1, n_1m + m, (n - 1)m + 1, nm$ ,
- przykrawędziowe dolne/górne w płynie o wymiarach  $h_1 \times k_1/2$ , mające numery:  
 $n_1m + 2, n_1m + 3, n_1m + 4, \dots, (n_1 + 1)m - 1$  oraz  
 $(n - 1)m + 2, (n - 1)m + 3, (n - 1)m + 4, \dots, nm - 1$ ,

- przykrawędziowe lewe/prawe w płynie o wymiarach  $h_1/2 \times k_1$  i numerach:  
 $(n_1 + 1)m + 1, (n_1 + 2)m + 1, (n_1 + 3)m + 1, \dots, (n - 2)m + 1$  oraz  
 $(n_1 + 2)m, (n_1 + 3)m, (n_1 + 4)m, \dots, (n - 1)m,$
- pośrednie w płynie o wymiarach  $h_1 \times k_1$ , posiadające numery:  
 $(n_1 + i)m + 2, (n_1 + i)m + 3, (n_1 + i)m + 4, \dots, (n_1 + i + 1)m - 1$ , gdzie  
 $i = 1, 2, 3, \dots, n - n_1 - 2,$
- przykrawędziowe lewe/prawe w próżni o wymiarach  $h_1/2 \times k_2$  i numerach:  
 $1, m + 1, 2m + 1, \dots, (n_1 - 1)m + 1$  oraz  $m, 2m, 3m, \dots, n_1m,$
- pozostałe w próżni o wymiarach  $h_1 \times k_2$ , posiadające numery:  
 $im + 2, im + 3, im + 4, \dots, (i + 1)m - 1$ , gdzie  $i = 0, 1, 2, \dots, n_1 - 1.$



Rysunek 5.10. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem regularnego podziału na podobszary cieczy i dopasowanej odpowiednio siatki MES

W przypadku płyty częściowo zanurzonej w płynie należy przyjąć jako znane następujące wielkości:

- wymiary płyty:  $A \times (B + B_1) \times H$ ,
- wysokość płyty zanurzonej w płynie:  $B$ ,
- liczba podobszarów cieczy w kierunku poziomym/pionowym:  $c \times d$ ,
- liczba elementów skończonych w kierunku pionowym, w części płyty w próżni:  $n_1$ .

Na podstawie wyżej wymienionych wielkości wyznacza się:

- liczbę elementów skończonych w kierunku poziomym:  $m = c + 1$ ,

- liczbę elementów skończonych w kierunku pionowym:  $n = n_1 + d + 1$ ,
- wymiary elementów skończonych:  $h_1 = A/(m - 1)$ ,  $k_1 = B/d$ ,  $k_2 = B_1/n_1$ .

Niech  $i$  oznacza dowolnie ustalony numer podobszaru cieczy, natomiast  $x$  niech będzie numerem węzła siatki MES znajdującego się w  $i$ -tym punkcie kolokacji podobszaru cieczy. Na podstawie rysunku 5.10 można stwierdzić zachodzenie poniższej zależności:

$$i = qc + r \Rightarrow x = (n_1 + q + 1)m + n_1 + q + r + 2, \quad (5.31)$$

gdzie  $r = 1, 2, 3, \dots, c$  oraz  $q = 0, 1, 2, \dots, d - 1$ . Przykładowo punktowi kolokacji o numerze  $i = 2c + 3$  (tzn.  $q = 2$ ,  $r = 3$ ) odpowiada węzeł siatki MES posiadający numer  $x = (n_1 + 3)m + n_1 + 7$ . Procedurę dodawania macierzy bezwładności płynu do macierzy bezwładności płyty wykonuje się analogicznie jak w przypadku płyty całkowicie otoczonej cieczą, przy czym w sytuacji częściowego zanurzenia w płynie należy wziąć pod uwagę zależność (5.31).

Szukane częstości i postacie drgań własnych płyty częściowo zanurzonej w cieczy wyznacza się przy użyciu tego samego uogólnionego problemu własnego, który stosuje się dla płyty całkowicie otoczonej płynem. Różnica w obu zadaniach dotyczy postaci i wymiaru macierzy bezwładności płynu oraz algorytmu wykonującego dodawanie macierzy bezwładności płynu do macierzy bezwładności płyty, z uwagi na różne zależności między numeracją węzłów siatek MES w odniesieniu do numeracji podobszarów cieczy.

### 5.3. Rozwiązanie zadania interakcji płyty i płynu przy zastosowaniu MRS

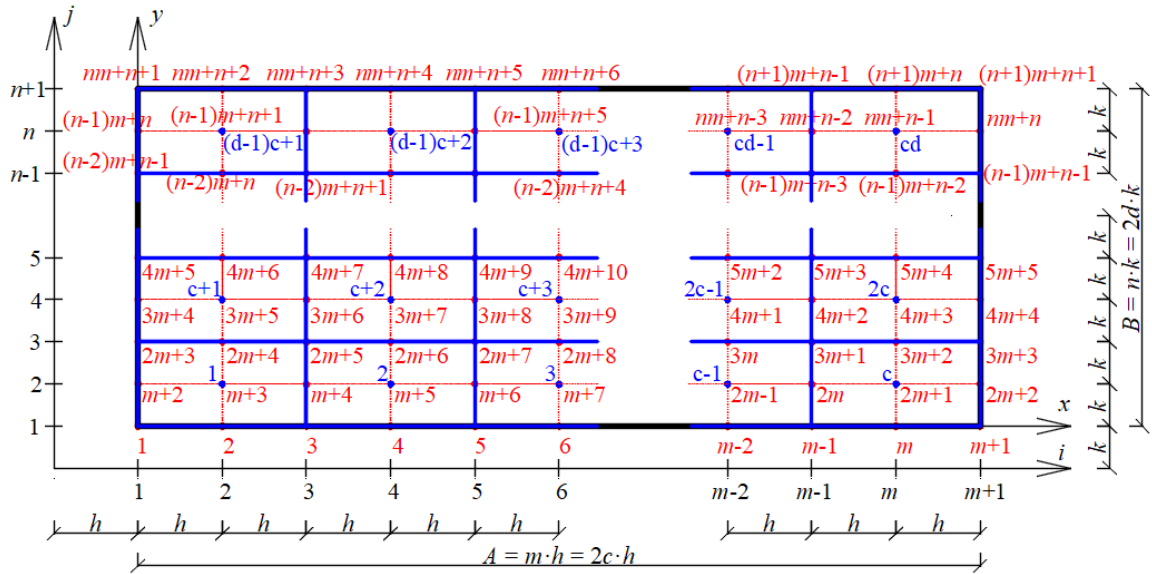
W niniejszym podrozdziale opisano metodykę wyznaczania charakterystyk dynamicznych układu płyta–ciecz przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MRS oraz MEB. W celu przeprowadzenia analizy dynamicznej płyty zanurzonej w płynie należy rozwiązać uogólniony problem własny wyrażony wzorem (4.27), tzn. problem postaci:

$$(\Delta - \omega^2 \mathbf{M}) \mathbf{W} = \mathbf{0}, \quad (5.32)$$

gdzie  $\mathbf{M}$  oznacza macierz bezwładności układu płyta–ciecz, którą można zapisać zgodnie ze wzorem (5.29), przy czym w rozważanym obecnie przypadku macierz  $\mathbf{M}_p$  jest macierzą bezwładności płyty, którą wyznacza się zgodnie z metodologią MRS opisaną w podrozdziale 3.2.2. Z kolei strukturę macierzy bezwładności  $\mathbf{M}_c$

płynu otaczającego płytę ustala się przy zastosowaniu metodologii MEB przedstawionej w podrozdziale 5.1. Obie macierze  $\Delta$  oraz  $\mathbf{M}$  wchodzące w skład uogólnionego problemu własnego (5.32) powinny uwzględniać zadane warunki podparcia badanej płyty. Działanie sumowania macierzy bezwładności płyty i cieczy należy rozumieć w sposób analogiczny do opisanego w podrozdziale 5.2. W przypadku MRS dyskretyzacji płyty dokonano jednak w inny sposób niż przy zastosowaniu MES ze względu na założenie, aby siatka MRS była regularna. W poprzednim podrozdziale dokonano w pierwszej kolejności dyskretyzacji powierzchni płyty na podobszary cieczy i następnie dostosowano do niej dyskretyzację MES. Obecnie przyjęto postępowanie odwrotne. Najpierw zdefiniowano siatkę MRS i do niej dopasowano siatkę podobszarów cieczy.

W przypadku płyty całkowicie zanurzonej w płynie przyjęto regularną siatkę MRS pokrywającą jej powierzchnię środkową zgodnie z rysunkiem 3.4. Następnie określono siatkę podobszarów cieczy w taki sposób, że na cztery podobszary siatki MRS przypada jeden podobszar cieczy zgodnie z rysunkiem 5.11. Na rysunku



Rysunek 5.11. Dyskretyzacja płyty całkowicie zanurzonej w płynie z użyciem regularnej siatki MRS i dopasowanej odpowiednio siatki podobszarów cieczy

tym podobszary cieczy zaznaczono niebieską pogrubioną linią, a dyskretyzację MRS wyróżniono linią czerwoną. Ponadto pokazano numerację punktów kolokacji podobszarów cieczy oraz numerację węzłów siatki MRS. Jeśli liczba podobszarów cieczy pokrywających płytę w kierunku poziomym i pionowym wynosi odpowiednio  $c$  i  $d$ , to liczba podprzedziałów MRS dzielących płytę w tych dwóch kierunkach wynosi

odpowiednio  $m = 2c$  oraz  $n = 2d$ . Macierz bezwładności płynu  $\mathbf{M}_c$  dla tak przyjętej dyskretyzacji wyznacza się według algorytmu przedstawionego w podrozdziale 5.1, przy czym obecnie należy założyć, że pojedynczy podobszar cieczy jest prostokątem o wymiarach  $2h \times 2k$  i jego pole powierzchni wynosi  $S = 4hk$ .

Po wyznaczeniu macierzy bezwładności płyty i cieczy należy zastosować odpowiednią procedurę dodawania tych macierzy. Macierz bezwładności płyty jest macierzą kwadratową o wymiarach  $(m+1)(n+1) \times (m+1)(n+1)$ , a macierz bezwładności płynu posiada wymiary  $cd \times cd = \frac{mn}{4} \times \frac{mn}{4}$ . Na podstawie numeracji węzłów siatki MRS i punktów kolokacji podobszarów cieczy, zgodnie z rysunkiem 5.11, można wyznaczyć zależność funkcyjną między  $i$ -tym punktem kolokacji podobszaru cieczy a węzłem siatki MRS o numerze  $x$ . Zależność ta jest następująca:

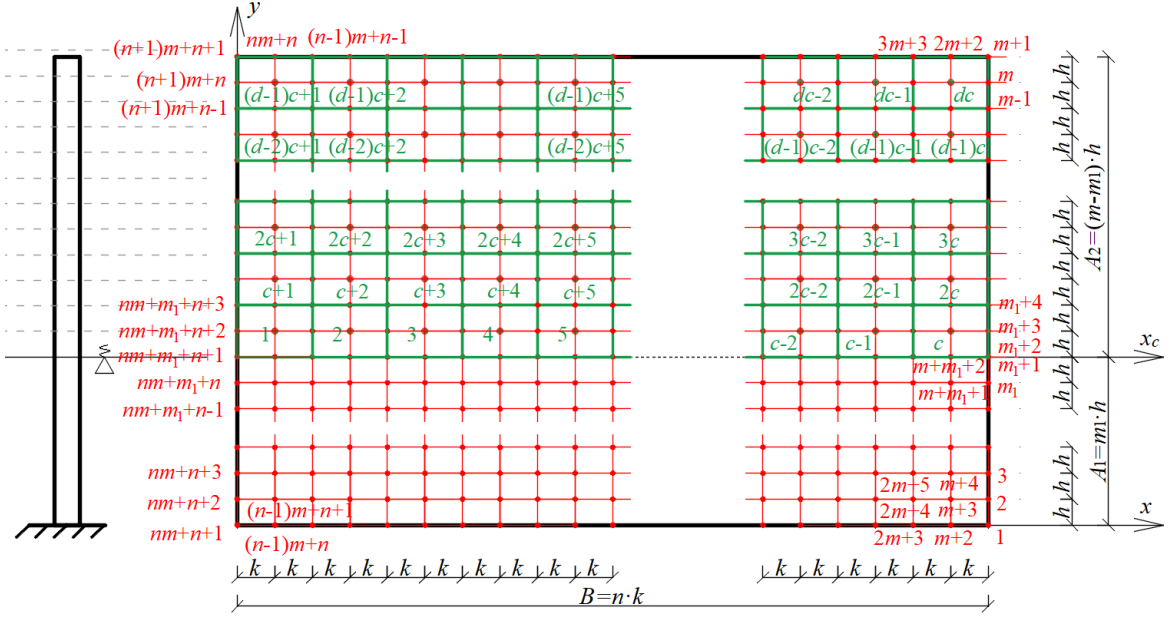
$$i = qc + r \Rightarrow x = (2q + 1)m + 2q + 2r + 1, \quad (5.33)$$

gdzie  $r = 1, 2, 3, \dots, c$  oraz  $q = 0, 1, 2, \dots, d - 1$ . Algorytm tworzenia łącznej macierzy bezwładności płyty i cieczy  $\mathbf{M}_{pc}$  jest analogiczny do przedstawionego w podrozdziale 5.2. W przypadku MRS należy jednak dodatkowo każdy element macierzy bezwładności płynu  $\mathbf{M}_c(i, j)$  podzielić przez pole powierzchni podobszaru MRS, tzn. przez  $hk$ , w celu uzyskania poprawnych wyników końcowych.

W przypadku płyty zanurzonej częściowo w płynie siatkę MRS wraz z dyskretyzacją na podobszary cieczy przyjęto zgodnie z rysunkiem 5.12, gdzie linie siatki MRS wyróżniono kolorem czerwonym. Dyskretyzację związaną z obecnością płynu oznaczono na rysunku zieloną, pogrubioną linią i dotyczy ona tylko części powierzchni płyty, do której przylega ciecz. Wymiar macierzy bezwładności płynu wynosi  $cd \times cd = \frac{n(m-m_1)}{4} \times \frac{n(m-m_1)}{4}$ , gdzie  $m_1$  oznacza liczbę przedziałów MRS w kierunku pionowym w części płyty znajdującej się w próżni.

W rozważanym zagadnieniu przyjęto, że płyta ma wymiary  $A \times B \times H$ , a wysokość jej części zanurzonej w cieczy wynosi  $A_2$ . Ponadto założono liczbę podobszarów MRS w kierunku pionowym i poziomym wynoszącą odpowiednio  $m$  oraz  $n$ . Na podstawie wstępnie założonych wielkości można wyznaczyć: wymiary podobszarów MRS wynoszące  $h \times k = \frac{A}{m} \times \frac{B}{n}$ , liczbę podprzedziałów MRS w kierunku pionowym w próżni  $m_1 = m - \frac{A_2}{h} \in \mathbb{N}$  oraz liczbę podobszarów cieczy w kierunku poziomym i pionowym wynoszącą odpowiednio  $c = \frac{n}{2}$  i  $d = \frac{m-m_1}{2}$ .

Warto zwrócić uwagę na to, że dla siatki MRS przyjęto założenie, aby była ona regularna na całej powierzchni płyty zarówno w części w próżni, jak również w części zanurzonej w cieczy. Żąda się zatem, aby po zaokrągleniu obliczonej wartości  $m_1 = m - \frac{A_2}{h}$  w górę lub w dół do najbliższej liczby całkowitej zachodziła zależność



Rysunek 5.12. Dyskretyzacja płyty częściowo zanurzonej w płynie z użyciem regularnej siatki MRS i dopasowanej odpowiednio siatki podobszarów cieczy

$(m - m_1)h \approx A_2$ . Zatem analizę dynamiczną można przeprowadzić dla płyty, której wymiar  $A$  różni się od wartości założonej. Takie niewielkie odstępstwo nie ma jednak znaczącego wpływu na końcowe charakterystyki dynamiczne płyty.

Dodatkowego wyjaśnienia wymaga jeszcze kwestia numeracji węzłów siatki MRS pokazanej na rysunku 5.12. Węzły ponumerowano rosnąco z dołu do góry oraz od strony prawej do lewej. Taki sposób numeracji przyjęto w celu analizy płyty utwierdzonej na krawędzi poziomej w jej części umieszczonej w próżni. Możliwe jest wówczas sprowadzenie tego przypadku do sytuacji rozpatrywanej w podrozdziale 3.2.2, gdzie wszystkie wzory wyprowadzono dla płyty utwierdzonej na krawędzi lewej.

Niech  $i$  oznacza dowolnie ustalony numer podobszaru cieczy, a  $x$  odpowiadający numer węzła siatki MRS. Między tymi numeracjami zachodzi następująca zależność:

$$i = qc + r \Rightarrow x = (n - 2r + 1)m + m_1 + n - 2(r - q) + 3, \quad (5.34)$$

gdzie  $r = 1, 2, 3, \dots, c$  oraz  $q = 0, 1, 2, \dots, d - 1$ . W algorytmie tworzącym łączną macierz bezwładności płyty i cieczy należy wykorzystać powyższą zależność oraz podzielić elementy macierzy bezwładności płynu przez iloczyn  $hk$ . Przy wyznaczaniu macierzy bezwładności cieczy można skorzystać z wcześniej omówionych algorytmów, przy czym w obecnie rozpatrywanym przypadku wymiar poziomy podobszaru cieczy wynosi  $2k$ , a wymiar pionowy  $2h$ , zgodnie z rysunkiem 5.12.

## 5.4. Przykłady analizy dynamicznej płyt zanurzonych w płynie

W niniejszym podrozdziale przedstawiono przykłady wyznaczania częstości drgań własnych płyt zanurzonych całkowicie lub częściowo w wodzie, której gęstość przyjęto równą  $\rho_c = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Obliczenia wykonano przy zastosowaniu dwóch kombinacji metod numerycznych, MES–MEB oraz MRS–MEB, opisanych w podrozdziałach 5.2 oraz 5.3. Przyjęto różne schematy podparcia badanych płyt. Badania przeprowadzono dla płyt o stałej lub zmiennej grubości. W pierwszych czterech przykładach analizie poddano płyty, które rozpatrywano już wcześniej w podrozdziale 4.3, w przykładach 4.1–4.4. Obecnie przyjęto, że płyty zanurzono w całości w ośrodku wodnym, co pozwoliło na porównanie uzyskanych wartości częstości drgań własnych z uzyskanymi dla płyt w próżni. W kolejnych trzech przykładach analizowano płyty zanurzone częściowo lub całkowicie w wodzie, z uwzględnieniem granicy ośrodków woda–powietrze.

**Przykład 5.1.** [25] *Drgania własne płyty o stałej grubości, podpartej swobodnie na obwodzie i zanurzonej całkowicie w wodzie*

W niniejszym przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową o schemacie podparcia według rysunku 3.10b). Płytę o takim samym schemacie, umieszczoną w próżni, analizowano w przykładzie 4.1. Obecnie założono, że płyta jest całkowicie zanurzona w wodzie. Długość boku badanej płyty wynosi 2,0 m, a grubość przyjęto stałą na całej powierzchni i równą 0,01 m. Płytę wykonano z materiału izotropowego o module Younga  $E = 205 \text{ GPa}$ , współczynniku Poissona  $\nu = 0,3$  i gęstości  $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ .

W tabeli 5.1 przedstawiono wartości częstości drgań własnych płyty otrzymane przy zastosowaniu metody elementów skończonych oraz metody różnic skończonych, z użyciem siatki o wymiarze  $20 \times 20$ . W celu wyznaczenia macierzy bezwładności płynu zgodnie z metodologią MEB przyjęto siatki podobszarów cieczy o wymiarach  $19 \times 19$  i  $10 \times 10$  w kombinacji odpowiednio z MES oraz MRS. Aby określić częstości drgań własnych przy użyciu metody elementów skończonych, przyjęto konsystentną macierz mas płyty. W celu otrzymania macierzy mas i sztywności płyty zastosowano autorskie metody całkowania, gdzie punkty całkowania rozmieszczono zgodnie z rysunkiem 3.2a), d) lub e). Zestawione wyniki porównano z wartościami wyznaczonymi przy zastosowaniu metody elementów brzegowych [9]. Postacie drgań własnych badanej płyty są bardzo podobne do otrzymanych w przykładzie 4.1 i przedstawionych na rysunku 4.4.

Tabela 5.1. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 5.1

| Nr   | Częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |                       |                       |                       |         |
|------|-------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|
|      | MEB<br>[9]                                | MES–MEB,<br>rys 3.2a) | MES–MEB,<br>rys 3.2d) | MES–MEB,<br>rys 3.2e) | MRS–MEB |
| 1    | 19,471                                    | 19,665                | 19,664                | 19,662                | 19,441  |
| 2, 3 | 61,940                                    | 62,663                | 62,657                | 62,644                | 61,522  |
| 4    | 110,670                                   | 111,994               | 111,979               | 111,947               | 109,673 |
| 5    | 143,722                                   | 146,542               | 146,508               | 146,436               | 141,257 |

Na podstawie danych w tabeli 5.1 można stwierdzić, że wartości częstości drgań własnych płyty otrzymane przy pomocy MES i różnych sposobów całkowania numerycznego są do siebie bardzo zbliżone i nie różnią się między sobą o więcej niż 1%. Spośród trzech metod całkowania numerycznego wyniki najbliższe wartościom z pozycji literaturowej [9] otrzymano przy rozmieszczeniu punktów całkowania według rysunku 3.2e).

W rozpatrywanym przykładzie wartości częstości drgań własnych uzyskane według metodologii MRS–MEB są najbliższe wynikom z literatury, wyznaczonym przy użyciu MEB, i poza ostatnią częstością odpowiednie różnice procentowe nie przekraczają 1%. W przypadku użycia kombinacji metod MES–MEB jedynie dla pierwszej częstości drgań uzyskano wynik różniący się od wartości z literatury o mniej niż 1%.

Porównując ze sobą wartości podane w tabelach 4.1 oraz 5.1, otrzymane przy zastosowaniu MRS, można stwierdzić, że umieszczenie płyty swobodnie podpartej w ośrodku wodnym powoduje zmniejszenie pierwszej częstości drgań własnych o około 74,5% w porównaniu z płytą umieszczoną w próżni. Dla kolejnych częstości drgań odpowiednie spadki procentowe wynoszą: 67,5%, 63,8% oraz 62,4%.

**Przykład 5.2.** [25] *Drgania własne płyty o stałej grubości, utwierdzonej na jednej krawędzi i zanurzonej całkowicie w wodzie*

W przykładzie analizie poddano płytę kwadratową utwierdzoną wzdłuż jednej krawędzi. Płyta o identycznym schemacie podparcia, umieszczona w próżni, stanowi przedmiot rozważań w przykładzie 4.2. W obecnym zadaniu przyjęto, że płyta jest całkowicie zanurzona w wodzie. Długość boku badanej płyty wynosi 2,0 m, a grubość przyjęto stałą na całej powierzchni i równą 0,05 m. Materiał płyty oraz geometrię siatek MES i MRS przyjęto jak w przykładzie 5.1.

Wartości pierwszych czterech częstości drgań własnych, otrzymane przy zastosowaniu metod numerycznych jak w przykładzie 5.1, pokazano w tabeli 5.2. Po-

równywano je z wartościami wyznaczonymi analitycznie [21] lub przy zastosowaniu MEB [9]. Odpowiadające postacie drgań własnych są bardzo zbliżone do tych przedstawionych na rysunku 4.5.

Tabela 5.2. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 5.2

| Nr | Częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |            |                       |                       |                       |         |
|----|-------------------------------------------|------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------|
|    | anal.<br>[21]                             | MEB<br>[9] | MES–MEB,<br>rys 3.2a) | MES–MEB,<br>rys 3.2d) | MES–MEB,<br>rys 3.2e) | MRS–MEB |
| 1  | 34,911                                    | 37,581     | 38,716                | 38,715                | 38,713                | 38,146  |
| 2  | 114,185                                   | 105,379    | 108,985               | 108,980               | 108,963               | 117,352 |
| 3  | 212,750                                   | 256,539    | 260,234               | 260,214               | 260,167               | 253,402 |
| 4  | 376,595                                   | 359,983    | 365,034               | 365,027               | 365,000               | 368,981 |

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 5.2 można stwierdzić, że przy zastosowaniu MES oraz różnych metod całkowania numerycznego wartości częstości drgań własnych najbliższe analitycznym otrzymano, rozmieszczając punkty całkowania zgodnie z rysunkiem 3.2e).

Porównując wartości częstości drgań własnych otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB i MRS–MEB, można zauważyć, że bliższe analitycznym są wyniki wyznaczone według metodologii MRS w przypadku pierwszej i trzeciej częstości drgań oraz otrzymane zgodnie z metodologią MES w pozostałych przypadkach. Dla każdej częstości odpowiednie różnice procentowe, w porównaniu z wartościami analitycznymi, przekraczają 1%, a zatem zaleca się, aby obliczenia numeryczne wykonać ponownie z użyciem gęstszych siatek MES i MRS.

Analizując wyniki podane w tabelach 4.2 oraz 5.2 otrzymane przy zastosowaniu MES, dla rozmieszczenia punktów całkowania według rysunku 3.2e), można stwierdzić, że umieszczenie płyty wspornikowej w ośrodku wodnym powoduje zmniejszenie pierwszej częstości drgań własnych o około 42,3% w porównaniu z płytą umieszczoną w próżni. Dla kolejnych częstości drgań odpowiednie spadki procentowe wynoszą: 33,7%, 36,7% oraz 30,5%. Są więc one mniejsze w porównaniu z analizowaną wcześniej płytą swobodnie podpartą na obwodzie.

**Przykład 5.3.** [25] *Drgania własne płyty o zmiennej grubości, utwierdzonej na jednej krawędzi i zanurzonej całkowicie w wodzie*

Przedmiotem analizy w niniejszym przykładzie jest płyta kwadratowa utwierdzona na jednej krawędzi. Identyczną płytę, umieszczoną w próżni, analizowano w przykładzie 4.3. Obecnie przyjęto, że płyta jest całkowicie zanurzona w płynie. Długość

boku badanej płyty wynosi  $A = 2,0$  m. Przyjęto, że płyta ma liniowo zmienną grubość w jednym kierunku. Jej przekrój przyjęto jak w przykładzie 3.3 i przedstawiono na rysunku 3.13. Minimalna grubość płyty występuje przy swobodnej krawędzi i wynosi ona  $H_2 = 0,05$  m. Maksymalna grubość jest zlokalizowana wzdłuż krawędzi utwierdzonej i przyjmuje wartości ze zbioru  $H_1 = \{0,1, 0,15, 0,2\}$  m. Materiał płyty przyjęto identyczny jak w dwóch poprzednich przykładach. Wartości częstości drgań własnych wyznaczano wyłącznie przy wykorzystaniu metody różnic skończonych.

Otrzymane wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych przedstawiono w tabeli 5.3. Wyznaczono je dla trzech różnych grubości  $H_1$  płyty, z użyciem siatki MRS  $20 \times 20$ . Ponadto w przypadku grubości  $H_1 = 0,2$  m analizowane charakterystyki dynamiczne obliczono, przyjmując kolejno cztery różne gęstości siatki MRS w celu sprawdzenia zbieżności otrzymywanych wyników. Postacie drgań własnych dla rozpatrywanych wariantów płyty o zmiennej grubości są bardzo podobne do tych przedstawionych na rysunku 4.5.

Tabela 5.3. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.3 wyznaczone dla trzech przypadków jej grubości maksymalnej  $H_1$ , z użyciem różnych gęstości siatek MRS

| Nr | Rozw. MRS–MEB – częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |                |                                              |                |                |                |
|----|-----------------------------------------------------------|----------------|----------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|    | Rozw. dla siatki $20 \times 20$                           |                | Rozw. dla $H_1 = 0,2$ m i różnych siatek MRS |                |                |                |
|    | $H_1 = 0,1$ m                                             | $H_1 = 0,15$ m | $14 \times 14$                               | $20 \times 20$ | $30 \times 30$ | $40 \times 40$ |
| 1  | 87,006                                                    | 144,669        | 204,582                                      | 209,382        | 213,283        | 215,304        |
| 2  | 173,203                                                   | 229,573        | 305,416                                      | 289,883        | 281,378        | 277,737        |
| 3  | 438,877                                                   | 577,145        | 697,947                                      | 691,678        | 687,291        | 685,110        |
| 4  | 532,623                                                   | 724,431        | 945,428                                      | 934,535        | 937,531        | 940,679        |

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 5.3, można wyciągnąć wniosek, że wartości częstości drgań własnych płyty o zmiennej liniowo sztywności i zanurzonej w płynie, podobnie jak w przypadku ośrodka próżni, rosną wraz ze wzrostem jej grubości przy utwierdzonej krawędzi.

W przypadku pierwszej częstości drgań własnych dwukrotne zwiększenie grubości płyty  $H_1$  przy utwierdzonej krawędzi, w odniesieniu do jej grubości  $H_2$  przy krawędzi swobodnej, powoduje około 2,3-krotny wzrost wartości rozważanej charakterystyki dynamicznej w porównaniu z płytą o stałej grubości wynoszącej  $H_2 = 0,05$  m. Zwiększając 3- i 4-krotnie grubość płyty przy utwierdzonej krawędzi, uzyskuje się odpowiednio 3,8- oraz 5,5-krotny wzrost pierwszej częstości drgań. Można zauważyć, że analizowane zwielokrotnienie wartości tej charakterystyki, wynikające ze stopniowego zwiększania grubości płyty przy utwierdzonej krawędzi względem krawędzi

swobodnej, jest bardziej istotne dla przypadku płyty zanurzonej w wodzie w porównaniu z płytą umieszczoną w próżni (przykład 4.3).

Na podstawie przeprowadzonego testu zbieżności wyników uzyskanych dla różnych siatek MRS można wyciągnąć wniosek, że częstotliwości drgań zmieniają się nieznacznie począwszy od siatki o gęstości  $30 \times 30$ . Różnice między częstotliwościami otrzymanymi z użyciem siatek  $30 \times 30$  oraz  $20 \times 20$  nie przekraczają 1% w przypadku trzeciej oraz czwartej częstotliwości drgań. Dla pierwszej częstotliwości analizowana różnica wynosi około 1,86%, a dla drugiej – około 2,93%. Różnica między częstotliwościami drgań, poza drugą, dla siatek  $40 \times 40$  oraz  $30 \times 30$  nie przekracza 1%, a w przypadku drugiej częstotliwości wynosi około 1,3%. Należałoby więc w przypadku tej charakterystyki wykonać obliczenia z użyciem gęstszej siatki i sprawdzić ponownie zbieżność uzyskanych wyników.

Pierwsza częstotliwość drgań własnych płyty zanurzonej w wodzie uległa zmniejszeniu o około 33,6%–39,6% w odniesieniu do wartości tej częstotliwości dla płyty umieszczonej w próżni. Spadek ten zmniejsza się wraz ze wzrostem grubości płyty przy jej utwardzonej krawędzi.

**Przykład 5.4.** [25] *Drgania własne swobodnie podpartej na obwodzie płyty ortotropowej o stałej grubości, zanurzonej całkowicie w wodzie*

W niniejszym przykładzie analizowano płytę kwadratową o schemacie podparcia i wymiarach identycznych jak w przykładzie 5.1. W odróżnieniu od przykładu 5.1 przyjęto, że płyta wykonana jest z materiału ortotropowego, składającego się z boru i żywicy epoksydowej, wykazującego różne właściwości w dwóch ortogonalnych kierunkach. Płytę charakteryzującą się takim materiałem analizowano wcześniej w przykładzie 4.4, gdzie założono poniższe wartości stałych materiałowych, na podstawie pracy [109]:

- podłużny moduł Younga:  $E_1 = 211$  GPa,
- poprzeczny moduł Younga:  $E_2 = 24,1$  GPa,
- moduł ścinania:  $G_{12} = 6,9$  GPa,
- większy współczynnik Poissona:  $\nu_{12} = 0,36$ ,
- mniejszy współczynnik Poissona:  $\nu_{21} = \nu_{12} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cong 0,041$ ,
- gęstość materiału:  $\rho = 1967$  kg/m<sup>3</sup>.

Elementy macierzy **D** zawierającej sztywności płyty na zginanie i skręcanie wyznaczono na podstawie wzorów (3.3) oraz (3.4).

W tabeli 5.4 zestawiono wartości częstotliwości drgań własnych otrzymane dla badanej płyty. Wyniki wyznaczono przy użyciu metody elementów skończonych, dla

dwóch różnych dyskretyzacji powierzchni płyty i trzech metod całkowania niestandardowego, z rozmieszczeniem punktów całkowania zgodnie z rysunkiem 3.2a), d) oraz e). Przyjęto siatkę podobszarów cieczy o wymiarach  $9 \times 9$  i  $19 \times 19$ , odpowiednio dla siatek MES  $10 \times 10$  oraz  $20 \times 20$ .

Tabela 5.4. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.4 wyznaczone przy pomocy kombinacji metod MES–MEB, z użyciem różnych metod numerycznego całkowania oraz dwóch sposobów dyskretyzacji powierzchni płyty

| Nr | Rozw. MES–MEB – częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |             |             |                                 |             |             |
|----|-----------------------------------------------------------|-------------|-------------|---------------------------------|-------------|-------------|
|    | Rozw. dla siatki $10 \times 10$                           |             |             | Rozw. dla siatki $20 \times 20$ |             |             |
|    | rys. 3.2 a)                                               | rys. 3.2 d) | rys. 3.2 e) | rys. 3.2 a)                     | rys. 3.2 d) | rys. 3.2 e) |
| 1  | 11,061                                                    | 11,059      | 11,055      | 11,311                          | 11,310      | 11,309      |
| 2  | 23,562                                                    | 23,552      | 23,530      | 24,386                          | 24,384      | 24,379      |
| 3  | 50,605                                                    | 50,556      | 50,450      | 52,486                          | 52,480      | 52,466      |
| 4  | 51,002                                                    | 50,977      | 50,923      | 52,953                          | 52,941      | 52,915      |

Podsumowując wyniki z tabeli 5.4, można zauważyć, że zwiększenie gęstości siatki MES z  $10 \times 10$  na  $20 \times 20$  powoduje wzrost pierwszej częstości drgań własnych o około 2,2%. W przypadku drugiej i trzeciej częstości analizowana różnica procentowa wynosi około 3,5%. Obliczenia należałoby więc przeprowadzić np. dla gęstości siatek  $30 \times 30$  oraz  $40 \times 40$ , aby można było wyciągnąć wniosek o zbieżności uzyskiwanych wyników, przy kryterium różnicy procentowej nie przekraczającej 1% dla dwóch sąsiednich siatek MES.

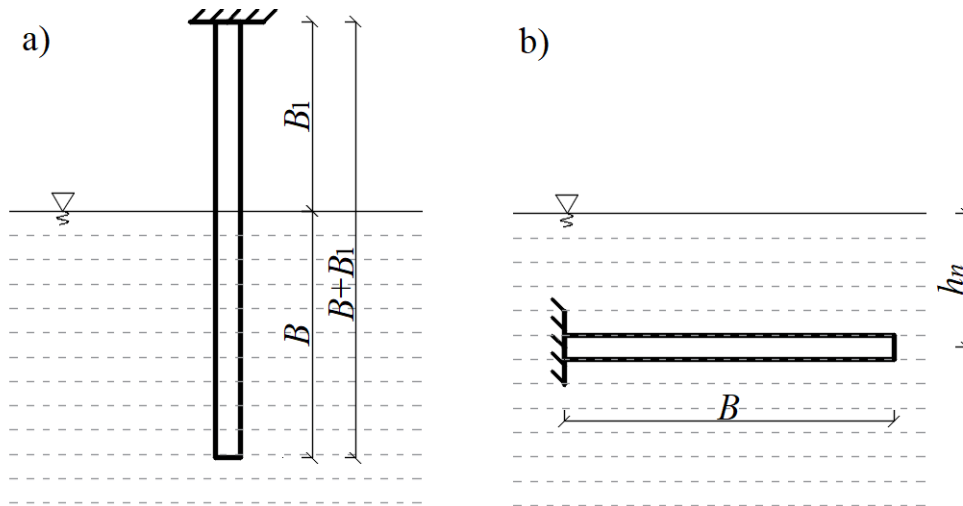
W porównaniu z płytą izotropową zanurzoną w wodzie, rozpatrywaną w przykładzie 5.1, o tych samych wymiarach i podparciu jak płyta obecnie badana, wartość pierwszej częstości drgań własnych uległa zmniejszeniu o około 42%. Analogiczny spadek procentowy drugiej, trzeciej i czwartej częstości wyniósł odpowiednio około: 61%, 55% oraz 64%. Warto zwrócić uwagę na fakt, że w przypadku analizowanej wcześniej płyty ortotropowej umieszczonej w próżni pierwsza częstość drgań własnych uległa zwiększeniu w odniesieniu do płyty izotropowej w próżni.

Porównując wartości częstości drgań własnych uzyskane dla płyty ortotropowej umieszczonej w próżni (przykład 4.4) i w cieczy, można stwierdzić, że obecność ośrodka wodnego spowodowała zmniejszenie pierwszej częstości drgań własnych o około 86,8%. Jest to spadek dużo większy w porównaniu z wcześniej analizowanymi płytami izotropowymi umieszczonymi w próżni i w wodzie. Druga, trzecia i czwarta częstość drgań uległy zmniejszeniu w odniesieniu do płyty w próżni o podobny rząd wielkości, a więc o około 79–83%.

W przykładach 5.5–5.7 określano częstości drgań własnych dla płyt utwardzonych wzdłuż jednej krawędzi oraz zanurzonych pionowo lub poziomo, całkowicie lub częściowo w wodzie. Wpływ powierzchni swobodnej cieczy uwzględniono przy zastosowaniu warunku zerowania się wektora prędkości w kierunku normalnym do tej powierzchni ( $\mathbf{v}_n = 0$ ).

**Przykład 5.5.** [26] *Drgania własne wspornikowej płyty izotropowej zanurzonej częściowo w wodzie w pozycji pionowej*

W przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową zanurzoną częściowo w wodzie. Płytę umieszczono w ośrodku wodnym w pozycji pionowej i przyjęto utwardzenie wzdłuż górnej krawędzi zgodnie z rysunkiem 5.13a). Długość boku badanej płyty przyjęto równą 10,0 m, a grubość założono stałą na całej powierzchni i równą 0,238 m. Płytę wykonano z materiału izotropowego (stal) o stałych materiałowych identycznych jak w przykładzie 5.1.



Rysunek 5.13. Prostokątna płyta wspornikowa zanurzona w wodzie pionowo (a) oraz poziomo (b) [24]

W tabelach 5.5 oraz 5.6 przedstawiono wartości częstości drgań własnych płyty otrzymane dla różnych głębokości jej zanurzenia w cieczy, które mierzone są przy pomocy ilorazu  $B/(B+B_1)$ , gdzie  $B$  oznacza wysokość części płyty otoczonej wodą, a  $B_1$  – wysokość części płyty w próżni. Przyjęto względne głębokości zanurzenia z zakresu  $B/(B+B_1) \in \{0,25, 0,5, 0,75, 1,0\}$ , dla których siatka podobszarów cieczy składa się odpowiednio z: 100, 200, 300 i 400 elementów. Posiada ona zatem wymiar  $20 \times 20 \frac{B}{B+B_1}$ . W tabelach rozpatrzono dwa przypadki – uwzględniono (I) albo pominięto (II) wpływ powierzchni swobodnej cieczy. Ponadto użyto dwie kom-

binacje metod numerycznych, odpowiednio MES–MEB oraz MRS–MEB, w których przyjęto siatkę MES  $21 \times 21$  oraz siatkę MRS  $40 \times 40$ . Różnice w gęstościach obu siatek wynikają z założenia o identycznej dyskretyzacji na podobszary cieczy dla obu kombinacji metod numerycznych. W obliczeniach MES macierze sztywności elementów skończonych wyznaczono przy pomocy wzorów dokładnych zawartych w pracy [1], natomiast macierze bezwładności przyjęto jako konsystentne i obliczono je numerycznie przy zastosowaniu 5-punktowej metody Gaussa.

Tabela 5.5. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB z użyciem siatki MES  $21 \times 21$  [26]

| Rozw. MES–MEB – częstości $\omega$ [rad/s] dla siatki MES $21 \times 21$ |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{B}{B+B_1}$                                                        | 0,25   |        | 0,5    |        | 0,75   |        | 1,0    |        |
| Nr                                                                       | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   |
| 1                                                                        | 9,990  | 9,591  | 8,163  | 7,888  | 7,500  | 7,364  | 7,311  | 7,257  |
| 2                                                                        | 25,800 | 25,180 | 21,988 | 21,644 | 20,698 | 20,584 | 20,464 | 20,446 |
| 3                                                                        | 71,824 | 77,442 | 64,370 | 63,210 | 53,536 | 51,939 | 49,436 | 48,818 |
| 4                                                                        | 85,765 | 84,679 | 75,323 | 74,135 | 69,775 | 69,373 | 68,777 | 68,700 |

Tabela 5.6. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB z użyciem siatki MRS  $40 \times 40$  [26]

| Rozw. MRS–MEB – częstości $\omega$ [rad/s] dla siatki MRS $40 \times 40$ |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{B}{B+B_1}$                                                        | 0,25   |        | 0,5    |        | 0,75   |        | 1,0    |        |
| Nr                                                                       | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   |
| 1                                                                        | 10,069 | 9,664  | 8,218  | 7,940  | 7,547  | 7,410  | 7,356  | 7,301  |
| 2                                                                        | 27,739 | 27,070 | 23,476 | 23,089 | 21,986 | 21,855 | 21,712 | 21,692 |
| 3                                                                        | 71,636 | 71,280 | 64,186 | 63,019 | 53,450 | 51,873 | 49,383 | 48,769 |
| 4                                                                        | 88,912 | 87,758 | 77,555 | 76,294 | 71,324 | 70,852 | 70,132 | 70,037 |

W tabelach 5.7 oraz 5.8 przedstawiono wartości częstości drgań własnych analogiczne do tych z tabeli 5.6, ale uzyskane dla siatek MRS o mniejszej gęstości, odpowiednio  $32 \times 32$  oraz  $24 \times 24$ .

W celu sprawdzenia poprawności wykonanych obliczeń dokonano ich porównania z częstościami drgań własnych uzyskanymi analitycznie [21] oraz przy zastosowaniu

MEB [24], z uwzględnieniem wpływu powierzchni swobodnej wody zgodnie z warunkiem zerowania się wektora prędkości  $\mathbf{v}_n = 0$ . Wartości te przedstawiono w tabeli 5.9.

Tabela 5.7. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB z użyciem siatki MRS  $32 \times 32$  [26]

| Rozw. MRS–MEB – częstości $\omega$ [rad/s] dla siatki MRS $32 \times 32$ |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{B}{B+B_1}$                                                        | 0,25   |        | 0,5    |        | 0,75   |        | 1,0    |        |
| Nr                                                                       | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   |
| 1                                                                        | 10,014 | 9,588  | 8,173  | 7,886  | 7,506  | 7,366  | 7,315  | 7,259  |
| 2                                                                        | 27,955 | 27,244 | 23,604 | 23,192 | 22,078 | 21,938 | 21,796 | 21,775 |
| 3                                                                        | 71,351 | 70,984 | 63,727 | 62,516 | 53,098 | 51,474 | 49,085 | 48,461 |
| 4                                                                        | 89,049 | 87,841 | 77,512 | 76,191 | 71,172 | 70,665 | 69,941 | 69,839 |

Tabela 5.8. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB z użyciem siatki MRS  $24 \times 24$  [26]

| Rozw. MRS–MEB – częstości $\omega$ [rad/s] dla siatki MRS $24 \times 24$ |        |        |        |        |        |        |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|--------|
| $\frac{B}{B+B_1}$                                                        | 0,25   |        | 0,5    |        | 0,75   |        | 1,0    |        |
| Nr                                                                       | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   | (I)    | (II)   |
| 1                                                                        | 9,920  | 9,467  | 8,100  | 7,799  | 7,440  | 7,295  | 7,249  | 7,192  |
| 2                                                                        | 28,303 | 27,535 | 23,812 | 23,360 | 22,229 | 22,073 | 21,932 | 21,909 |
| 3                                                                        | 70,876 | 70,492 | 62,959 | 61,699 | 52,504 | 50,812 | 48,583 | 47,945 |
| 4                                                                        | 89,292 | 88,025 | 77,448 | 76,049 | 70,947 | 70,386 | 69,657 | 69,544 |

Tabela 5.9. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.5 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, na podstawie rozwiązania analitycznego [21] oraz przy użyciu MEB [24]

| Rozw. anal. [21] oraz wg BEM [24] – częstości $\omega$ [rad/s] |       |       |       |       |       |       |       |       |
|----------------------------------------------------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\frac{B}{B+B_1}$                                              | 0,25  |       | 0,5   |       | 0,75  |       | 1,0   |       |
| Nr                                                             | [21]  | [24]  | [21]  | [24]  | [21]  | [24]  | [21]  | [24]  |
| 1                                                              | 10,25 | 9,99  | 8,22  | 8,16  | 7,57  | 7,50  | 7,35  | 7,31  |
| 2                                                              | 26,40 | 25,61 | 21,85 | 21,83 | 20,50 | 20,55 | 20,20 | 20,30 |
| 3                                                              | 73,26 | 71,84 | 64,40 | 64,36 | 54,65 | 53,53 | 50,45 | 49,44 |
| 4                                                              | 87,10 | 85,82 | 76,68 | 75,39 | 71,52 | 69,81 | 70,41 | 68,80 |

Analizując wyniki przedstawione w tabelach 5.5–5.9, można zauważyć, że częstości drgań własnych płyty maleją wraz ze wzrostem jej głębokości zanurzenia w wodzie. Oznacza to, że masa dołączona, uwzględniająca obecność płynu, ma znaczny wpływ na charakterystyki dynamiczne płyty.

Porównując dane zawarte w tabelach 5.5 oraz 5.6 otrzymane przy założeniu wariantu I (uwzględnienie powierzchni swobodnej wody) z wynikami analitycznymi przedstawionymi w tabeli 5.9, można stwierdzić, że wartości pierwszej częstości drgań uzyskane zgodnie z metodologią MRS–MEB są bliższe wynikom analitycznym w porównaniu z analogicznymi wartościami otrzymanymi przy użyciu metod MES–MEB. W przypadku kolejnych częstości ta reguła nie zawsze jest spełniona. Wartości drugiej i trzeciej częstości drgań własnych bliższe analitycznym otrzymano w wyniku użycia kombinacji MES–MEB. Z kolei dla czwartej częstości drgań własnych oraz głębokości zanurzenia płyty z zakresu 0,5–1,0 wyniki okazały się być dokładniejsze przy zastosowaniu metod MRS–MEB, przy czym różnica procentowa w odniesieniu do rozwiązania analitycznego nie przekracza 1% dla względnej głębokości zanurzenia wynoszącej 0,75 oraz 1,0. Dla obu kombinacji metod numerycznych różnica procentowa wartości pierwszej częstości drgań własnych, w nawiązaniu do rozwiązania analitycznego, nie przekracza 1% w przypadku względnej głębokości zanurzenia 0,5–1,0. Gdy głębokość ta wynosi 0,25, rozważana różnica przekracza 1% dla metod MRS–MEB oraz 2% w przypadku kombinacji MES–MEB.

Analizując rozwiązania otrzymane z użyciem siatek MRS o różnych gęstościach (tabele 5.6–5.8), przy zastosowaniu wariantu I, można stwierdzić, że zadowalające wartości pierwszej częstości drgań własnych otrzymano już dla siatki  $32 \times 32$ , gdzie różnica procentowa w odniesieniu do siatki  $24 \times 24$  nie przekracza 1%, co można uznać jako spełnione kryterium zbieżności wyników. W przypadku siatki  $32 \times 32$  oraz względnej głębokości zanurzenia płyty wynoszącej 0,5, 0,75 i 1,0 otrzymane wartości częstości drgań własnych nie różnią się od wartości analitycznych o więcej niż 1%. Gdy głębokość ta wynosi 0,25, zaleca się wykonanie obliczeń numerycznych przy użyciu siatki MRS gęstszej niż  $40 \times 40$  w celu otrzymania dokładniejszych wyników.

Pominięcie wpływu powierzchni swobodnej wody, a więc zastosowanie wariantu II w każdej z tabel 5.5–5.8 powoduje obniżenie wartości częstości drgań w odniesieniu do wariantu I. W pewnych przypadkach w wyniku zastosowania wariantu II otrzymano wartości częstości drgań bliższe analitycznym w porównaniu z wariantem I. Miało to miejsce w sytuacji, gdy jednocześnie w obu wariantach I i II dana częstość drgań miała wartość większą w odniesieniu do rozwiązania analitycznego.

**Przykład 5.6.** [26] *Drgania własne wspornikowej płyty izotropowej zanurzonej całkowicie w wodzie w pozycji poziomej, z uwzględnieniem powierzchni swobodnej wody*

W przykładzie analizowano płytę kwadratową zanurzoną w wodzie w pozycji poziomej i utwierdzoną wzdłuż jednej krawędzi zgodnie z rysunkiem 5.13b). Materiał oraz geometrię płyty przyjęto identyczne jak w przykładzie 5.5.

W tabeli 5.10 przedstawiono wartości częstości drgań własnych otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB, MRS–MEB oraz rozwiązania analitycznego zgodnie z [21]. Założono przy tym podział powierzchni płyty na 400 podobszarów cieczy (siatka  $20 \times 20$ ), któremu odpowiadają gęstości siatek MES i MRS odpowiednio  $21 \times 21$  i  $40 \times 40$ . Ponadto przyjęto trzy różne wartości głębokości zanurzenia płyty poniżej poziomu wody, określone ilorazem  $h_n/B$ .

Tabela 5.10. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.6 wyznaczone dla trzech wariantów głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB i MRS–MEB oraz na podstawie rozwiązania analitycznego [26]

| Nr      | Częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |        |        |         |        |        |            |       |       |
|---------|-------------------------------------------|--------|--------|---------|--------|--------|------------|-------|-------|
|         | MES–MEB                                   |        |        | MRS–MEB |        |        | Anal. [21] |       |       |
| $h_n/B$ | 0,1                                       | 0,3    | 0,5    | 0,1     | 0,3    | 0,5    | 0,1        | 0,3   | 0,5   |
| 1       | 7,961                                     | 7,467  | 7,337  | 8,014   | 7,514  | 7,382  | 8,04       | 7,51  | 7,35  |
| 2       | 21,586                                    | 20,616 | 20,482 | 22,929  | 21,877 | 21,731 | 21,54      | 20,34 | 20,19 |
| 3       | 52,307                                    | 49,564 | 49,053 | 52,239  | 49,508 | 49,001 | 53,23      | 50,83 | 50,11 |
| 4       | 71,411                                    | 68,971 | 68,751 | 72,896  | 70,329 | 70,093 | 72,20      | 70,81 | 69,50 |

W tabeli 5.11 przedstawiono wartości częstości drgań własnych analogiczne do tych z tabeli 5.10, ale otrzymane przy użyciu kombinacji metod MRS–MEB i dwóch różnych gęstości siatki MRS.

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 5.10 można stwierdzić, że w przypadku pierwszej częstości drgań własnych, przy zastosowaniu każdej z kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB, otrzymano wyniki różniące się od analitycznych nie więcej niż o 1%. Dla względnej głębokości płyty pod powierzchnią wody wynoszącej 0,1 i 0,3 zastosowanie kombinacji MRS–MEB okazało się dawać dokładniejsze, bliższe analitycznym, wartości pierwszej częstości drgań. Z kolei przy względnej głębokości równej 0,5 korzystniejsze było użycie kombinacji MES–MEB. W przypadku drugiej i trzeciej częstości drgań wyniki bliższe analitycznym uzyskano przy pomocy metod MES–MEB, jednak w większości wyników różnica w odniesieniu do analitycznych przekroczyła 1%. Zastosowanie kombinacji MRS–MEB pozwoliło

Tabela 5.11. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.6 wyznaczone przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB, z użyciem dwóch różnych gęstości siatki MRS [26]

| Nr      | Rozw. MRS–MEB – częstości $\omega$ [rad/s] |        |        |                           |        |        |
|---------|--------------------------------------------|--------|--------|---------------------------|--------|--------|
|         | siatka MRS $24 \times 24$                  |        |        | siatka MRS $32 \times 32$ |        |        |
| $h_n/B$ | 0,1                                        | 0,3    | 0,5    | 0,1                       | 0,3    | 0,5    |
| 1       | 7,922                                      | 7,411  | 7,276  | 7,978                     | 7,474  | 7,342  |
| 2       | 23,247                                     | 22,112 | 21,952 | 23,049                    | 21,966 | 21,815 |
| 3       | 51,452                                     | 48,688 | 48,179 | 51,944                    | 49,202 | 48,694 |
| 4       | 72,592                                     | 69,857 | 69,603 | 72,769                    | 70,139 | 69,896 |

otrzymać dokładniejsze wartości czwartej częstości drgań, tzn. bliższe analitycznym, przy różnicy nie przekraczającej 1%.

Analizując wyniki przedstawione w tabeli 5.11, można stwierdzić, że zadowalające wartości pierwszej częstości drgań, najbliższe analitycznym, uzyskano przy użyciu siatki MRS  $32 \times 32$ , gdzie odpowiednie różnice nie przekraczają 1%. Ponadto częstości drgań, poza trzecią, obliczone dla siatek  $24 \times 24$  oraz  $32 \times 32$  nie różnią się między sobą o więcej niż 1%, a w przypadku trzeciej częstości ten próg procentowy jest tylko nieznacznie przekroczony. Można więc sformułować wniosek o zbieżności zastosowanej metody numerycznej począwszy od siatki  $32 \times 32$ .

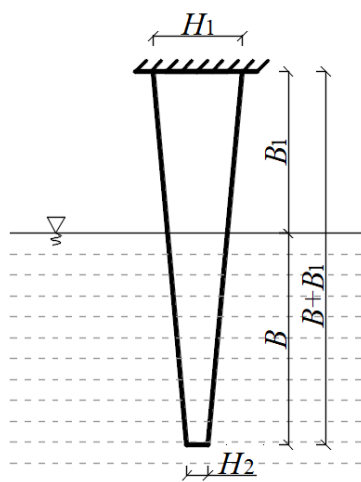
**Przykład 5.7.** [26] *Drgania własne wspornikowej płyty izotropowej o zmiennej grubości zanurzonej częściowo w wodzie w pozycji pionowej*

Przedmiotem analizy w przykładzie jest płyta kwadratowa o liniowo zmiennej grubości. Płytę umieszczono w ośrodku wodnym w pozycji pionowej i utwierdzono wzdłuż górnej krawędzi zgodnie z rysunkiem 5.14. Długość boku powierzchni środkowej badanej płyty przyjęto równą 10,0 m, a jej grubość przy swobodnej krawędzi wynosi  $H_2 = 0,238$  m.

W tabeli 5.12 zestawiono wartości częstości drgań własnych badanej płyty mającej grubość przy krawędzi utwierdzonej  $H_1 = 2H_2$ , przy czym użyto siatkę MRS o gęstości  $40 \times 40$ . Podobnie jak w przykładzie 5.5 założono dwa warianty – z uwzględnieniem (I) albo z pominięciem (II) wpływu powierzchni swobodnej wody.

W tabeli 5.13 zestawiono wartości częstości drgań własnych płyty, przyjmując dwa warianty grubości przy krawędzi utwierdzonej ( $H_1 = 2H_2$ ,  $H_1 = 3H_2$ ), cztery różne gęstości siatki MRS oraz głębokość zanurzenia płyty  $\frac{B}{B+B_1} = 0,75$ . W tabeli tej uwzględniono wpływ powierzchni swobodnej wody.

Porównując wartości częstości drgań własnych zestawione w tabelach 5.6 oraz 5.12,



Rysunek 5.14. Prostokątna płyta wspornikowa o zmiennej grubości zanurzona pionowo w wodzie

Tabela 5.12. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.7 wyznaczone dla czterech różnych głębokości zanurzenia w wodzie, przy zastosowaniu kombinacji metod MRS-MEB [26]

| Rozw. MRS-MEB – częstości $\omega$ [rad/s] dla $H_1 = 2H_2$ oraz siatki MRS $40 \times 40$ |         |         |         |         |         |         |        |        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|--------|--------|
| $\frac{B}{B+B_1}$                                                                          | 0,25    |         | 0,5     |         | 0,75    |         | 1,0    |        |
| Nr                                                                                         | (I)     | (II)    | (I)     | (II)    | (I)     | (II)    | (I)    | (II)   |
| 1                                                                                          | 21,996  | 21,199  | 18,432  | 17,889  | 17,184  | 16,923  | 16,834 | 16,730 |
| 2                                                                                          | 37,856  | 37,022  | 33,115  | 32,705  | 31,765  | 31,650  | 31,554 | 31,537 |
| 3                                                                                          | 101,076 | 99,727  | 92,014  | 91,438  | 87,348  | 86,573  | 85,252 | 84,858 |
| 4                                                                                          | 128,983 | 128,449 | 116,648 | 114,278 | 102,998 | 101,323 | 99,501 | 99,011 |

Tabela 5.13. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 5.7 wyznaczone przy zastosowaniu kombinacji metod MRS-MEB, dla dwóch wariantów grubości płyty przy utwierdzonej krawędzi i czterech różnych siatek MRS [26]

| Nr | Rozw. MRS-MEB – częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] |                |                |                |                                            |                |                |                |
|----|-----------------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|--------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|    | $H_1 = 2H_2$ oraz $\frac{B}{B+B_1} = 0,75$                |                |                |                | $H_1 = 3H_2$ oraz $\frac{B}{B+B_1} = 0,75$ |                |                |                |
|    | $16 \times 16$                                            | $24 \times 24$ | $32 \times 32$ | $40 \times 40$ | $16 \times 16$                             | $24 \times 24$ | $32 \times 32$ | $40 \times 40$ |
| 1  | 16,572                                                    | 16,901         | 17,076         | 17,184         | 27,455                                     | 28,052         | 28,365         | 28,558         |
| 2  | 33,401                                                    | 32,446         | 32,016         | 31,765         | 44,438                                     | 42,853         | 42,183         | 41,804         |
| 3  | 84,386                                                    | 86,062         | 86,874         | 87,348         | 109,643                                    | 109,938        | 110,018        | 110,043        |
| 4  | 104,412                                                   | 103,436        | 103,132        | 102,998        | 142,568                                    | 142,081        | 142,285        | 142,494        |

można wyciągnąć wniosek, że dwukrotne zwiększenie grubości płyty  $H_1$  przy jej utwierdzonej krawędzi, w odniesieniu do grubości  $H_2$  przy swobodnej krawędzi, powoduje około 2,2–2,3-krotny wzrost pierwszej częstości drgań własnych. Analogiczny wzrost drugiej częstości jest około 1,35–1,45-krotny. W przypadku trzeciej częstości jest on 1,40–1,45-krotny przy względnej głębokości zanurzenia płyty 0,25 i 0,5 oraz 1,63–1,74-krotny dla głębokości wynoszącej 0,75 i 1,0. Wzrost czwartej częstości drgań własnych, wynikający ze zwiększenia grubości płyty, jest około 1,4–1,5-krotny.

Na podstawie danych zawartych w tabeli 5.13 można wyciągnąć wniosek o zbieżności otrzymanych wartości częstości drgań własnych począwszy od siatki MRS  $40 \times 40$ , przyjmując kryterium zbieżności jako różnicę procentową mniejszą niż 1% w odniesieniu do odpowiedniej częstości otrzymanej w wyniku zastosowania poprzedzającej, rzadszej siatki MRS. Różnica ta nieznacznie przekracza 1% przy porównaniu pierwszej częstości drgań dla siatek  $24 \times 24$  i  $32 \times 32$ , stąd można też uznać jako wystarczające wartości tej charakterystyki wyznaczonej z użyciem siatki  $32 \times 32$ .

Trzykrotne zwiększenie grubości płyty  $H_1$  przy utwierdzonej krawędzi, w odniesieniu do grubości  $H_2$  przy swobodnej krawędzi, powoduje około 3,8-krotny wzrost pierwszej częstości drgań własnych w porównaniu z danymi w tabeli 5.6. W przypadku kolejnych częstości drgań własnych analogiczny wzrost jest odpowiednio: 1,9-, 2,1-, oraz 2-krotny.



## 6. Analiza dynamiczna układu płyt prostokątnych zanurzonych całkowicie w płynie

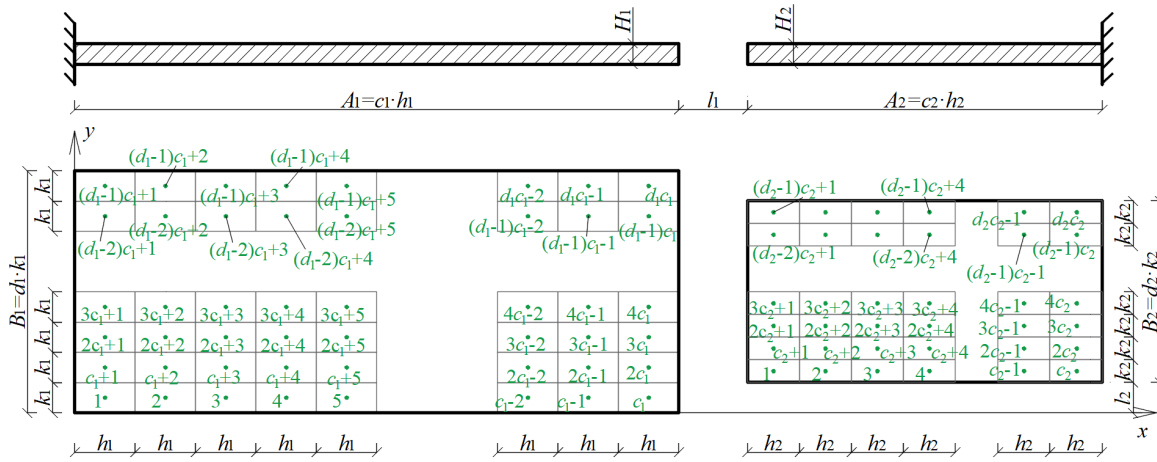
Tematem niniejszego rozdziału jest analiza drgań własnych układu dwóch płyt prostokątnych zanurzonych całkowicie w ośrodku zewnętrznym innym niż próżnia. Przyjęto, że każda z płyt tworzących układ jest otoczona cieczą o gęstości  $\rho_c$ . Płyn otaczający płyty spełnia założenia podane we wstępie do rozdziału 5, przy czym pominięto wpływ granicy ośrodków płyn–powietrze.

Obecność płynu uwzględniono przy zastosowaniu metody elementów brzegowych według zasad przedstawionych w [9]. Aby określić częstotliwości i postacie drgań własnych, dla każdej z płyt układu należy wyznaczyć macierze bezwładności ( $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ ). Macierze te scala się następnie w jedną macierz bezwładności  $\mathbf{M}_{u,p}$  dla układu płyt. W kolejnym kroku wyznacza się macierz bezwładności płynu  $\mathbf{M}_{u,c}$ , którą następnie w odpowiedni sposób dodaje się do macierzy bezwładności układu płyt. W efekcie uzyskuje się macierz bezwładności  $\mathbf{M}_u$  układu dwie płyty–ciecz. Taką macierz wykorzystuje się do rozwiązywania problemu własnego pozwalającego otrzymać szukane charakterystyki dynamiczne.

W pierwszym podrozdziale przedstawiono sposób wyznaczania macierzy bezwładności płynu  $\mathbf{M}_{u,c}$  dla układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w cieczy przy zastosowaniu metody elementów brzegowych. Założono przy tym, że powierzchnie środkowe obu płyt układu zawierają się w jednej wspólnej płaszczyźnie albo w dwóch różnych płaszczyznach do siebie równoległych. W kolejnych dwóch podrozdziałach omówiono metodykę określania charakterystyk dynamicznych dla tak przyjętego układu dwóch płyt przy użyciu kombinacji metod MES–MEB oraz MRS–MEB. Na zakończenie niniejszego rozdziału przedstawiono kilka przykładów numerycznych, w których wyznaczano częstotliwości drgań własnych zanurzonego w wodzie układu płyt o stałej lub zmiennej grubości i różnorodnych warunkach podparcia. Do testów numerycznych wykorzystano autorskie algorytmy opracowane w środowisku Octave.

### 6.1. Wyznaczanie macierzy bezwładności płynu dla układu płyt w ujęciu MEB

W celu uwzględnienia masy dołączonej, powstałej w wyniku zanurzenia układu płyt w płynie, zastosowano metodę elementów brzegowych zgodnie z zasadami opisanymi w pracy [9]. Przyjęto jako przedmiot badań układ dwóch płyt zanurzonych całkowicie w cieczy o gęstości  $\rho_c$ . Założono, że powierzchnie środkowe płyt stanowiących układ leżą w jednej wspólnej płaszczyźnie albo w dwóch różnych płaszczyznach do siebie równoległych. Dla każdej z płyt takiego układu przyjęto dyskretyzację na podobszary cieczy w postaci siatek o wymiarach odpowiednio  $c_1 \times d_1$  oraz  $c_2 \times d_2$ . Na rysunkach 6.1 oraz 6.2 pokazano tę dyskretyzację, biorąc pod uwagę dwa warianty położenia względem siebie płyt tworzących układ otoczony płynem.

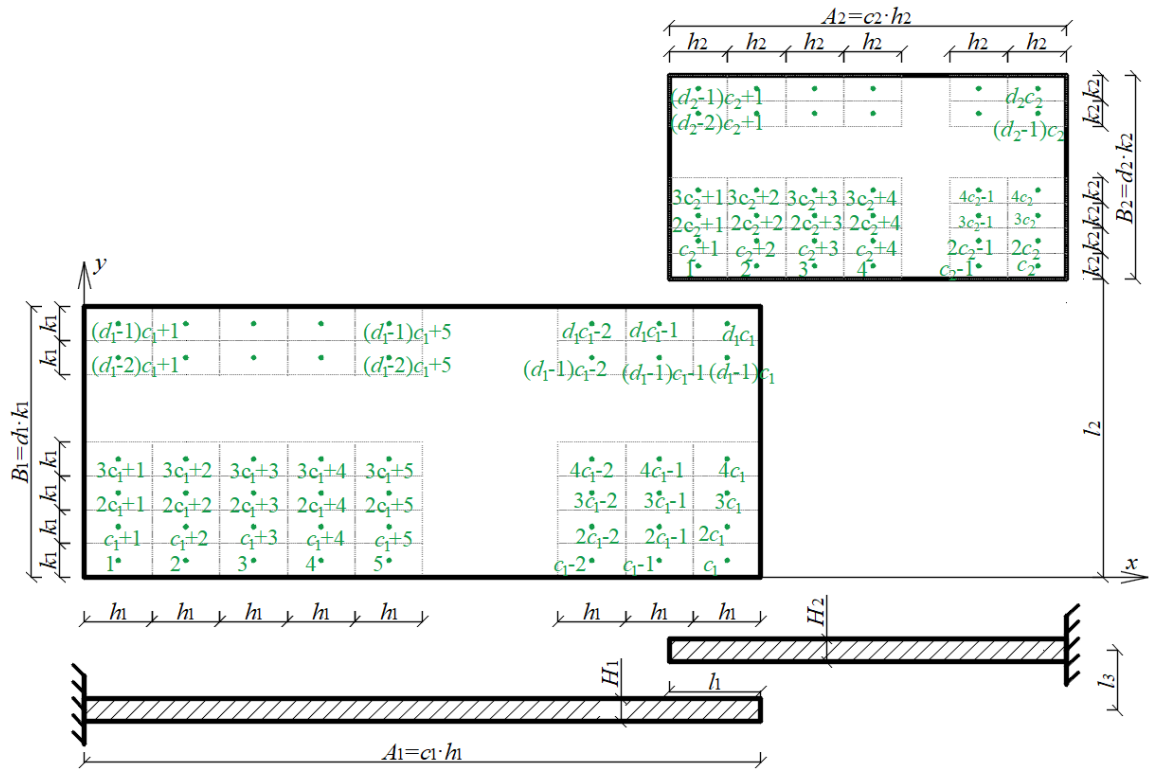


Rysunek 6.1. Układ dwóch płyt o powierzchniach środkowych leżących w jednej płaszczyźnie wraz z dyskretyzacją na podobszary cieczy

W analizowanych układach dwóch płyt przyjęto następujące oznaczenia:

- $A_1 \times B_1 \times H_1$ ,  $A_2 \times B_2 \times H_2$  – wymiary geometryczne odpowiednio pierwszej i drugiej płyty układu (długość, szerokość i grubość),
- $h_1 \times k_1$ ,  $h_2 \times k_2$  – wymiary podobszarów cieczy dyskretyzujących odpowiednio pierwszą i drugą płytę układu,
- $l_1$  – odległość między płytami układu (dla płyt, których rzuty nachodzą na siebie przyjęto  $l_1 < 0$ ),
- $l_2$  – przesunięcie dolnej krawędzi płyty prawej względem dolnej krawędzi płyty lewej,

- $l_3$  – odległość między płaszczyznami pokrywającymi się z powierzchniami środkowymi każdej z płyt układu ( $l_3 = 0$ , jeśli płyty leżą w jednej płaszczyźnie).



Rysunek 6.2. Układ dwóch płyt o powierzchniach środkowych leżących w dwóch płaszczyznach równoległych wraz z dyskretyzacją na podobszary cieczy

Macierz bezwładności cieczy otaczającej układ dwóch płyt określona jest następującym wzorem, analogicznym do wcześniej stosowanego wzoru (5.7):

$$\mathbf{M}_{u,c} = 4\pi\rho_c \mathbf{S}_u \mathbf{H}_u^{-1}, \quad (6.1)$$

gdzie:

$\mathbf{S}_u$  – macierz diagonalna z polami powierzchni podobszarów cieczy dla kolejnych płyt układu, określona wzorem:

$$\mathbf{S}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{S}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{S}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.2)$$

w którym  $\mathbf{S}_1$  oraz  $\mathbf{S}_2$  oznaczają macierze pól powierzchni podobszarów cieczy odpowiednio dla pierwszej i drugiej płyty układu,

$\mathbf{H}_u$  – macierz o następującej strukturze:

$$\mathbf{H}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_{11} & \mathbf{H}_{12} \\ \mathbf{H}_{21} & \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix}, \quad (6.3)$$

w której poszczególne podmacierze wyznacza się zgodnie z poniższymi wzorami:

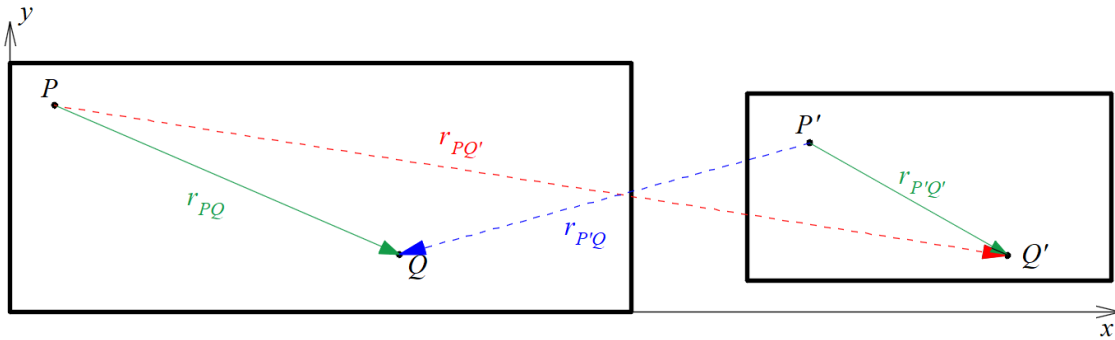
$$\mathbf{H}_{11} = [H_{mn}] = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{PQ}} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n, \quad (6.4)$$

$$\mathbf{H}_{12} = [H_{mn'}] = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{PQ'}} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n, \quad (6.5)$$

$$\mathbf{H}_{21} = [H_{m'n}] = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{P'Q}} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n, \quad (6.6)$$

$$\mathbf{H}_{22} = [H_{m'n'}] = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{P'Q'}} \right) \right]_{z \rightarrow 0} dS_n. \quad (6.7)$$

W przypadku płyt znajdujących się na jednej płaszczyźnie (rysunek 6.1) całki (6.4)–(6.7) można obliczyć według wzoru analitycznego (5.15). Na rysunku 6.3 oznaczono w układzie płyt odległości niezbędne do zastosowania tego wzoru. Wynika



Rysunek 6.3. Oznaczenie odległości w układzie płyt w celu obliczenia całek (6.4)–(6.7)

z niego, że poszczególne elementy macierzy  $\mathbf{H}_{11}$  oraz  $\mathbf{H}_{22}$  wyznacza się zgodnie z zasadami obliczania macierzy  $\mathbf{H}$ , opisanymi w podrozdziale 5.1, przy czym macierz  $\mathbf{H}_{11}$  dotyczy pierwszej, a macierz  $\mathbf{H}_{22}$  drugiej płyty układu. Wymiary macierzy  $\mathbf{H}_{11}$  oraz  $\mathbf{H}_{22}$  wynoszą odpowiednio  $c_1 d_1 \times c_1 d_1$  oraz  $c_2 d_2 \times c_2 d_2$ . Elementy  $H_{mn'}$  macierzy  $\mathbf{H}_{12}$  oblicza się, przyjmując początek  $m$  lokalnych układów współrzędnych w kolejnych punktach kolokacji podobszarów cieczy należących do płyty pierwszej. W tak określonych układach współrzędnych wyznacza się współrzędne punktów kolokacji podobszarów cieczy  $n'$  należących do płyty drugiej. Wymiar macierzy  $\mathbf{H}_{12}$  wynosi zatem  $c_1 d_1 \times c_2 d_2$ . Z kolei kolejne elementy  $H_{m'n}$  macierzy  $\mathbf{H}_{21}$  oblicza się analogicznie jak w przypadku macierzy  $\mathbf{H}_{12}$ , tzn. początki lokalnych układów współrzędnych  $m'$  zakłada się na obszarze drugiej płyty i względem nich ustala się współrzędne punktów kolokacji podobszarów cieczy  $n$  należących do płyty pierwszej. Wymiar macierzy  $\mathbf{H}_{21}$  wynosi więc  $c_2 d_2 \times c_1 d_1$ .

Aby wyznaczyć macierz  $\mathbf{H}_u$  w programie Octave dla układu płyt z rysunku 6.1, w pierwszej kolejności należy określić macierze pomocnicze  $\mathbf{W}_1$  oraz  $\mathbf{W}_2$  zawierające w kolejnych kolumnach współrzędne punktów narożnych podobszarów cieczy, odpowiednio dla pierwszej i drugiej płyty układu, w globalnym układzie współrzędnych przyjętym w lewym dolnym narożu płyty wysuniętej najbardziej na lewo. Globalny układ współrzędnych  $xOy$  oznaczono na rysunku 6.1. Macierze  $\mathbf{W}_1$  oraz  $\mathbf{W}_2$  wyznacza się według zasad opisanych w podrozdziale 5.1 dla macierzy  $\mathbf{W}$ , której strukturę w przypadku pojedynczej płyty określa wzór (5.16). Następnie należy utworzyć macierze pomocnicze  $\mathbf{Sr}_1$  oraz  $\mathbf{Sr}_2$ , których kolumny zawierają współrzędne punktów kolokacji podobszarów cieczy, odpowiednio dla pierwszej i drugiej płyty układu, w globalnym układzie współrzędnych  $xOy$ . Macierze te wyznacza się zgodnie z zasadami przedstawionymi w podrozdziale 5.1 odnośnie macierzy  $\mathbf{Sr}$ , której struktura dla pojedynczej płyty określona jest wzorem (5.17).

Dla obu płyt układu można utworzyć macierze powiązań  $\mathbf{t}_1$  oraz  $\mathbf{t}_2$  o wymiarach odpowiednio  $4 \times c_1 d_1$  oraz  $4 \times c_2 d_2$ , które w kolejnych kolumnach zawierają numery węzłów narożnych podobszarów cieczy. Kolumna macierzy powiązań  $\mathbf{t}_i$  ( $i = 1, 2$ ) odpowiadająca podobszarowi cieczy o numerze  $q_i c_i + r_i$ , gdzie  $q_i = 0, 1, 2, \dots, d_i - 1$  oraz  $r_i = 1, 2, 3, \dots, c_i$ , zawiera kolejno numery węzłów:  $q_i c_i + q_i + r_i$ ,  $q_i c_i + q_i + r_i + 1$ ,  $(q_i + 1)c_i + q_i + r_i + 2$ ,  $(q_i + 1)c_i + q_i + r_i + 1$ .

Macierze pomocnicze  $\mathbf{W}_1$ ,  $\mathbf{W}_2$ ,  $\mathbf{Sr}_1$ ,  $\mathbf{Sr}_2$ ,  $\mathbf{t}_1$ ,  $\mathbf{t}_2$  umożliwiają wyznaczenie współrzędnych:  $x_{p,i}$ ,  $x_{k,i}$ ,  $y_{p,i}$ ,  $y_{k,i}$  określających położenie podobszarów cieczy o numerze  $n$  lub  $n'$ , gdzie  $n = 1, 2, 3, \dots, c_1 d_1$  oraz  $n' = 1, 2, 3, \dots, c_2 d_2$ , w lokalnym układzie współrzędnych mającym początek w środku podobszaru cieczy o numerze  $m$  lub  $m'$ , gdzie  $m = 1, 2, 3, \dots, c_1 d_1$  oraz  $m' = 1, 2, 3, \dots, c_2 d_2$ . Numery podobszarów cieczy  $m$  oraz  $n$  dotyczą pierwszej płyty układu, natomiast numery  $m'$  oraz  $n'$  odnoszą się do drugiej płyty układu. Lokalizację współrzędnych:  $x_{p,i}$ ,  $x_{k,i}$ ,  $y_{p,i}$ ,  $y_{k,i}$  przedstawiono na rysunku 5.2.

Dla pewnego ustalonego położenia lokalnego układu współrzędnych w punkcie kolokacji o numerze  $m$ , należącym do płyty pierwszej, wyznacza się współrzędne odpowiadające kolejnym podobszarom cieczy o numerach  $n = 1, 2, 3, \dots, c_1 d_1$ , należącym do tej samej płyty. Współrzędne te oznaczone jako:  $x_{p,1}$ ,  $x_{k,1}$ ,  $y_{p,1}$ ,  $y_{k,1}$  stosuje się w przypadku obliczania, zgodnie ze wzorem (5.15), elementów  $H_{mn}$  macierzy  $\mathbf{H}_{11}$  i określone są następująco, w podobny sposób jak w przypadku wzoru (5.18):

$$x_{p,1} = \mathbf{W}_1(1, \mathbf{t}_1(1, n)) - \mathbf{Sr}_1(1, m),$$

$$x_{k,1} = \mathbf{W}_1(1, \mathbf{t}_1(2, n)) - \mathbf{Sr}_1(1, m),$$

$$y_{p,1} = \mathbf{W}_1(2, \mathbf{t}_1(1, n)) - \mathbf{S}\mathbf{r}_1(2, m),$$

$$y_{k,1} = \mathbf{W}_1(2, \mathbf{t}_1(3, n)) - \mathbf{S}\mathbf{r}_1(2, m).$$

Postępując analogicznie jak wyżej i przyjmując zamiast  $n$  numery  $n' = 1, 2, 3, \dots, c_2 d_2$  dla podobszarów płynu należących do płyty drugiej, otrzymuje się współrzędne:  $x_{p,2}$ ,  $x_{k,2}$ ,  $y_{p,2}$ ,  $y_{k,2}$  stosowane do obliczenia elementów  $H_{mn'}$  macierzy  $\mathbf{H}_{12}$ . Określone są one wzorami:

$$x_{p,2} = \mathbf{W}_2(1, \mathbf{t}_2(1, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_1(1, m),$$

$$x_{k,2} = \mathbf{W}_2(1, \mathbf{t}_2(2, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_1(1, m),$$

$$y_{p,2} = \mathbf{W}_2(2, \mathbf{t}_2(1, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_1(2, m),$$

$$y_{k,2} = \mathbf{W}_2(2, \mathbf{t}_2(3, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_1(2, m).$$

W celu wyznaczenia współrzędnych:  $x_{p,3}$ ,  $x_{k,3}$ ,  $y_{p,3}$ ,  $y_{k,3}$ , potrzebnych do obliczenia elementów  $H_{m'n}$  macierzy  $\mathbf{H}_{21}$ , należy w pewnym ustalonym punkcie kolokacji o numerze  $m'$ , należącym do płyty drugiej, przyjąć lokalny układ współrzędnych i określić w nim współrzędne kolejnych punktów  $n = 1, 2, 3, \dots, c_1 d_1$  odpowiadających podobszarom cieczy należącym do płyty pierwszej. Otrzymuje się wówczas:

$$x_{p,3} = \mathbf{W}_1(1, \mathbf{t}_1(1, n)) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(1, m'),$$

$$x_{k,3} = \mathbf{W}_1(1, \mathbf{t}_1(2, n)) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(1, m'),$$

$$y_{p,3} = \mathbf{W}_1(2, \mathbf{t}_1(1, n)) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(2, m'),$$

$$y_{k,3} = \mathbf{W}_1(2, \mathbf{t}_1(3, n)) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(2, m').$$

Współrzędne:  $x_{p,4}$ ,  $x_{k,4}$ ,  $y_{p,4}$ ,  $y_{k,4}$ , stosowane do obliczenia elementów  $H_{m'n'}$  macierzy  $\mathbf{H}_{22}$ , dotyczą lokalizacji kolejnych punktów kolokacji  $n' = 1, 2, 3, \dots, c_2 d_2$  podobszarów cieczy należących do płyty drugiej, określonych względem lokalnego układu współrzędnych o początku ustalonym w pewnym punkcie  $m'$  należącym do tej samej płyty. Otrzymuje się następujące wzory:

$$x_{p,4} = \mathbf{W}_2(1, \mathbf{t}_2(1, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(1, m'),$$

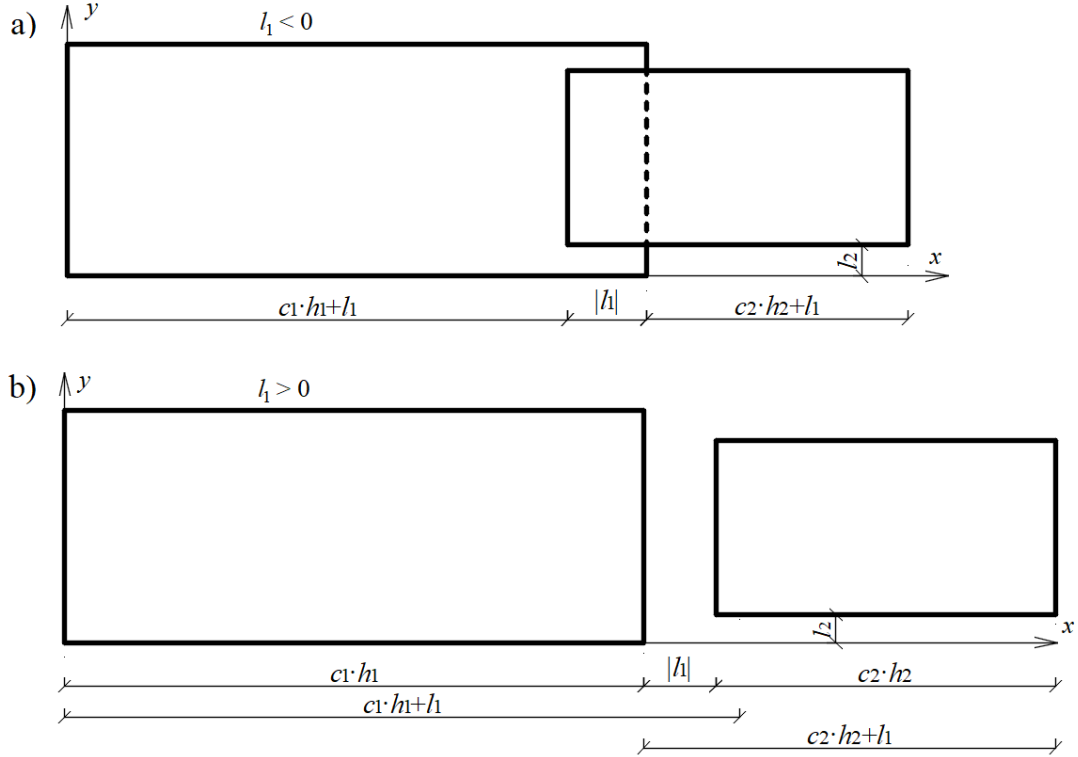
$$x_{k,4} = \mathbf{W}_2(1, \mathbf{t}_2(2, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(1, m'),$$

$$y_{p,4} = \mathbf{W}_2(2, \mathbf{t}_2(1, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(2, m'),$$

$$y_{k,4} = \mathbf{W}_2(2, \mathbf{t}_2(3, n')) - \mathbf{S}\mathbf{r}_2(2, m').$$

W przypadku płyt, których powierzchnie środkowe zawierają się w dwóch różnych płaszczyznach równoległych (rysunek 6.2) wszystkie wcześniej opisane macierze pomocnicze wyznacza się jak dla płyt leżących w jednej płaszczyźnie. Na potrzeby algorytmu komputerowego przyjęto, że odległość między płytami  $l_1$  jest liczbą ujemną,

w przypadku gdy rzuty płyt na siebie nachodzą albo dodatnią, jeśli rzuty nie mają części wspólnej. Położenia płyt względem siebie w obu tych sytuacjach pokazano na rysunku 6.4.



Rysunek 6.4. Rzut poziomy układu płyt zawierających się w dwóch równoległych płaszczyznach, w przypadku gdy rzuty płyt nachodzą na siebie (a) oraz gdy nie mają części wspólnej (b)

Bez zmian, w odniesieniu do układu płyt leżących w jednej wspólnej płaszczyźnie, pozostaje również sposób wyznaczania podmacierzy  $\mathbf{H}_{11}$  oraz  $\mathbf{H}_{22}$ . Różnica pojawia się jedynie w przypadku podmacierzy  $\mathbf{H}_{12}$  oraz  $\mathbf{H}_{21}$ . Określając współrzędne punktów kolokacji podobszarów cieczy dla jednej z płyt w lokalnym układzie współrzędnych przyjętym w wybranym punkcie kolokacji podobszaru płynu drugiej płyty, współrzędna  $z$  jest niezerowa i przyjmuje wartości  $\pm l_3$ . Wzory (6.5) oraz (6.6) należy więc zastąpić następującymi:

$$\mathbf{H}_{12} = [H_{mn'}] = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{PQ'}} \right) \right]_{z \rightarrow l_3} dS_n, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{H}_{21} = [H_{m'n}] = \int_{S_n} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r_{P'Q}} \right) \right]_{z \rightarrow -l_3} dS_n, \quad (6.9)$$

gdzie  $l_3$  jest odległością między płaszczyznami środkowymi obu płyt układu. Wyrażenie podcałkowe przyjmuje następującą postać:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left( \frac{1}{r} \right)_{z \rightarrow \pm l_3} &= \frac{\partial^2}{\partial z_m^2} \left[ \frac{1}{\sqrt{x_m^2 + y_m^2 + z_m^2}} \right]_{z \rightarrow \pm l_3} = \\ &= \left[ -(x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)^{-\frac{3}{2}} + 3z_m^2 (x_m^2 + y_m^2 + z_m^2)^{-\frac{5}{2}} \right]_{z \rightarrow \pm l_3} = \\ &= 3l_3^2 (x_m^2 + y_m^2 + l_3^2)^{-\frac{5}{2}} - (x_m^2 + y_m^2 + l_3^2)^{-\frac{3}{2}}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

Całki (6.8) oraz (6.9) można obliczyć numerycznie np. metodą Gaussa lub metodami niestandardowymi opisanymi w podrozdziale 3.2.1.

## 6.2. Rozwiązanie problemu przy zastosowaniu MES

W niniejszym podrozdziale opisano metodykę wyznaczania charakterystyk dynamicznych układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES oraz MEB. Podczas analizy takiego zagadnienia należy rozwiązać uogólniony problem własny postaci:

$$(\mathbf{K}_u - \omega^2 \mathbf{M}_u) \mathbf{q}_u = \mathbf{0}, \quad (6.11)$$

gdzie:

$\mathbf{K}_u$  – macierz sztywności układu dwóch płyt, tj. macierz:

$$\mathbf{K}_u = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

w której  $\mathbf{K}_1$  oraz  $\mathbf{K}_2$  są macierzami sztywności odpowiednio pierwszej i drugiej płyty układu,

$\mathbf{M}_u$  – macierz bezwładności układu dwóch płyt otoczonych płynem, będąca sumą:

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{M}_{u,p} + \mathbf{M}_{u,c}, \quad (6.13)$$

w której  $\mathbf{M}_{u,p}$  jest macierzą bezwładności układu płyt w próżni, tj. macierzą postaci:

$$\mathbf{M}_{u,p} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.14)$$

zawierającą macierze bezwładności  $\mathbf{M}_1$  oraz  $\mathbf{M}_2$  odpowiednio pierwszej i drugiej płyty układu. Z kolei  $\mathbf{M}_{u,c}$  jest macierzą bezwładności płynu otaczającego układ płyt, którą wyznacza się zgodnie ze wzorem (6.1) objaśnionym w podrozdziale 6.1.

Globalne macierze sztywności  $\mathbf{K}_1$  oraz  $\mathbf{K}_2$  wyznacza się dla każdej z płyt układu przez agregację macierzy sztywności  $\mathbf{K}_{e,i}$  elementów skończonych dyskretyzujących te płyty. Dyskretyzacji MES dokonuje się dla każdej płyty oddzielnie, poprzedzając ją zdefiniowaniem regularnej siatki podobszarów cieczy, zgodnie z rysunkami 6.1 oraz 6.2. Siatkę MES nakłada się na płyty w sposób pokazany na rysunku 5.9 i opisany w podrozdziale 5.2. Po wyznaczeniu dla poszczególnych płyt układu globalnych macierzy sztywności należy w każdej z nich dokonać modyfikacji z uwagi na warunki brzegowe płyt, co opisano bardziej szczegółowo pod koniec niniejszego podrozdziału.

Analogiczne postępowanie należy przeprowadzić, aby otrzymać macierz bezwładności  $\mathbf{M}_{u,p}$  układu płyt. Przyjęto konsystentne macierze bezwładności dla każdej z płyt. Należy więc dla założonej dyskretyzacji MES wyznaczyć macierze bezwładności poszczególnych elementów skończonych i dokonać ich agregacji, czego efektem jest otrzymanie globalnych macierzy bezwładności  $\mathbf{M}_1$  oraz  $\mathbf{M}_2$  dla obu płyt.

Aby wyznaczyć macierz bezwładności (6.13) układu płyt z uwzględnieniem obecności płynu, należy w odpowiedni sposób dodać do siebie macierze (6.14) oraz (6.1). Macierze te mają różne wymiary, a ich strukturę blokową pokazano na rysunku 6.5. Macierz bezwładności układu płyt  $\mathbf{M}_{u,p}$  składa się z podmacierzy  $\mathbf{M}_1$  oraz  $\mathbf{M}_2$  o wymiarach odpowiednio  $3w_{e1} \times 3w_{e1}$  oraz  $3w_{e2} \times 3w_{e2}$ , gdzie  $w_{e1}$  oraz  $w_{e2}$  oznaczają liczbę węzłów siatek MES pierwszej i drugiej płyty układu. Pozostałe podmacierze tworzące macierz  $\mathbf{M}_{u,p}$  to macierze zerowe  $\mathbf{0}_1$  oraz  $\mathbf{0}_2$  o wymiarach odpowiednio  $3w_{e1} \times 3w_{e2}$  oraz  $3w_{e2} \times 3w_{e1}$ . Łączny wymiar macierzy  $\mathbf{M}_{u,p}$  wynosi zatem  $3(w_{e1} + w_{e2}) \times 3(w_{e1} + w_{e2})$ . Macierz bezwładności cieczy  $\mathbf{M}_{u,c}$  składa się z podmacierzy  $\mathbf{M}_{11}$ ,  $\mathbf{M}_{12}$ ,  $\mathbf{M}_{21}$  oraz  $\mathbf{M}_{22}$  o wymiarach odpowiednio  $c_1d_1 \times c_1d_1$ ,  $c_1d_1 \times c_2d_2$ ,  $c_2d_2 \times c_1d_1$  oraz  $c_2d_2 \times c_2d_2$ , gdzie  $c_1d_1$  oraz  $c_2d_2$  to łączna liczba podobszarów cieczy pierwszej i drugiej płyty układu.

$$\begin{array}{cc} \text{a)} & \text{b)} \\ \mathbf{M}_{u,p} = & \mathbf{M}_{u,c} = \\ \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \hline \mathbf{0}_2 & \mathbf{M}_2 \end{array} \right] & \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{M}_{11} & \mathbf{M}_{12} \\ \hline \mathbf{M}_{21} & \mathbf{M}_{22} \end{array} \right] \end{array}$$

Rysunek 6.5. Struktura blokowa macierzy bezwładności układu płyt (a) oraz macierzy bezwładności płynu otaczającego układ (b)

Niech  $c_i$  oraz  $d_i$  oznacza liczbę podobszarów cieczy dyskretyzujących  $i$ -tą płytę układu wzdłuż kierunku odpowiednio poziomego i pionowego. Przyjęto ponadto oznaczenie  $j_i = q_i c_i + r_i$  dla numeru dowolnie wybranego punktu kolokacji podobszaru cieczy w  $i$ -tej płycie układu, przy czym  $q_i = 0, 1, 2, \dots, d_i - 1$  oraz  $r_i = 1, 2, 3, \dots, c_i$ . Wówczas odpowiadający numer węzła  $x_i$  siatki MES posiada wartość:

$$x_i = (q_i + 1)c_i + 2q_i + r_i + 3. \quad (6.15)$$

Dodanie do siebie macierzy  $\mathbf{M}_{u,p}$  oraz  $\mathbf{M}_{u,c}$  polega na wykonaniu następujących działań:

- dodanie elementów podmacierzy  $\mathbf{M}_{11}$  do odpowiednich elementów podmacierzy  $\mathbf{M}_1$  według algorytmu:

```
for i=1:c1*d1 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 1
    r1=mod(i,c1); % wyznaczenie reszty z dzielenia "i" przez c1
    if r1==0 % dodatkowy warunek do reszty
        r1=c1;
    end
    q1=(i-r1)/c1; % iloraz z dzielenia "i" przez c1
    % numer "x" węzła MES odpowiadający numerowi "i"
    x=(q1+1)*c1+2*q1+r1+3;
    for j=1:c1*d1 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 1
        r2=mod(j,c1); % wyznaczenie reszty z dzielenia "j" przez c1
        if r2==0 % dodatkowy warunek do reszty
            r2=c1;
        end
        q2=(j-r2)/c1; % iloraz z dzielenia "j" przez c1
        % numer "y" węzła MES odpowiadający numerowi "j"
        y=(q2+1)*c1+2*q2+r2+3;
        % dodanie elementu macierzy M11 do elementu macierzy M1
        M1(3*x-2,3*y-2)=M1(3*x-2,3*y-2)+M11(i,j);
    end
end
```

- dodanie elementów podmacierzy  $\mathbf{M}_{22}$  do odpowiednich elementów podmacierzy  $\mathbf{M}_2$  zgodnie z procedurą:

```

for i=1:c2*d2 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 2
    r1=mod(i,c2); % wyznaczenie reszty z dzielenia "i" przez c2
    if r1==0 % dodatkowy warunek do reszty
        r1=c2;
    end
    q1=(i-r1)/c2; % iloraz z dzielenia "i" przez c2
    % numer "x" węzła MES odpowiadający numerowi "i"
    x=(q1+1)*c2+2*q1+r1+3;
    for j=1:c2*d2 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 2
        r2=mod(j,c2); % wyznaczenie reszty z dzielenia "j" przez c2
        if r2==0 % dodatkowy warunek do reszty
            r2=c2;
        end
        q2=(j-r2)/c2; % iloraz z dzielenia "j" przez c2
        % numer "y" węzła MES odpowiadający numerowi "j"
        y=(q2+1)*c2+2*q2+r2+3;
        % dodanie elementu macierzy M22 do elementu macierzy M2
        M2(3*x-2,3*y-2)=M2(3*x-2,3*y-2)+M22(i,j);
    end
end
end

```

- dodanie elementów podmacierzy  $\mathbf{M}_{12}$  do odpowiednich elementów podmacierzy  $\mathbf{O}_1$  według algorytmu:

```

for i=1:c1*d1 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 1
    r1=mod(i,c1); % wyznaczenie reszty z dzielenia "i" przez c1
    if r1==0 % dodatkowy warunek do reszty
        r1=c1;
    end
    q1=(i-r1)/c1; % iloraz z dzielenia "i" przez c1
    % numer "x" węzła MES odpowiadający numerowi "i"
    x=(q1+1)*c1+2*q1+r1+3;
    for j=1:c2*d2 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 2
        r2=mod(j,c2); % wyznaczenie reszty z dzielenia "j" przez c2
        if r2==0 % dodatkowy warunek do reszty
            r2=c1;
        end
    end
end

```

```

q2=(j-r2)/c2; % iloraz z dzielenia "j" przez c2
% numer "y" węzła MES odpowiadający numerowi "j"
y=(q2+1)*c2+2*q2+r2+3;
% dodanie elementu macierzy M12 do elementu macierzy 01
01(3*x-2,3*y-2)=01(3*x-2,3*y-2)+M12(i,j);
end
end

• dodanie elementów podmacierzy  $\mathbf{M}_{21}$  do odpowiednich elementów podmacierzy
 $\mathbf{O}_2$  zgodnie z procedurą:

for i=1:c2*d2 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 2
    r1=mod(i,c2); % wyznaczenie reszty z dzielenia "i" przez c2
    if r1==0 % dodatkowy warunek do reszty
        r1=c2;
    end
    q1=(i-r1)/c2; % iloraz z dzielenia "i" przez c2
    % numer "x" węzła MES odpowiadający numerowi "i"
    x=(q1+1)*c2+2*q1+r1+3;
    for j=1:c1*d1 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 1
        r2=mod(j,c1); % wyznaczenie reszty z dzielenia "j" przez c1
        if r2==0 % dodatkowy warunek do reszty
            r2=c1;
        end
        q2=(j-r2)/c1; % iloraz z dzielenia "j" przez c1
        % numer "y" węzła MES odpowiadający numerowi "j"
        y=(q2+1)*c1+2*q2+r2+3;
        % dodanie elementu macierzy M21 do elementu macierzy 02
        02(3*x-2,3*y-2)=02(3*x-2,3*y-2)+M21(i,j);
    end
end
end

```

Po utworzeniu macierzy  $\mathbf{K}_u$  oraz  $\mathbf{M}_u$  według wyżej opisanych zasad dokonuje się następnie ich modyfikacji ze względu na warunki podparcia obu płyt układu. Można ten krok wykonać na jeden z dwóch niżej przedstawionych sposobów:

## 1. zmniejszenie rozmiaru zadania

a) macierz  $\mathbf{K}_u$ 

- wykreślenie wierszy i kolumn w macierzy  $\mathbf{K}_1$  oraz odpowiednich wierszy w macierzy  $\mathbf{O}_1$  i kolumn w macierzy  $\mathbf{O}_2$ , zgodnie z warunkami brzegowymi w płycie nr 1,
- wykreślenie wierszy i kolumn<sup>1</sup> w macierzy  $\mathbf{K}_2$  oraz odpowiednich wierszy w macierzy  $\mathbf{O}_2$  i kolumn w macierzy  $\mathbf{O}_1$  na podstawie warunków brzegowych w płycie nr 2,

b) macierz  $\mathbf{M}_u$  – wykreślenie tych samych wierszy i kolumn, które zostały usunięte w macierzy  $\mathbf{K}_u$ ,

## 2. zachowanie pierwotnego rozmiaru zadania

- a) macierz  $\mathbf{K}_u$  – zastąpienie w macierzy wierszy i kolumn wykreślanych według sposobu 1. wierszami i kolumnami z zerami i jednością na przekątnej głównej,
- b) macierz  $\mathbf{M}_u$  – zastąpienie w macierzy wierszy i kolumn wykreślanych zgodnie ze sposobem 1. wierszami i kolumnami wypełnionymi zerami.

Do celów algorytmicznych korzystniej jest zachować pierwotny rozmiar zadania ze względu na mniejszy stopień trudności w opracowaniu procedury tworzenia postaci drgań własnych dla układu płyt.

### 6.3. Rozwiązanie problemu przy zastosowaniu MRS

Niniejszy podrozdział dotyczy metodyki wyznaczania charakterystyk dynamicznych układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MRS oraz MEB. Podczas analizy takiego zagadnienia rozwiązuje się uogólniony problem własny postaci:

$$(\Delta_u - \omega^2 \mathbf{M}_u) \mathbf{q}_u = \mathbf{0}, \quad (6.16)$$

gdzie:

$\Delta_u$  – macierz operatorów różnicowych układu dwóch płyt, tj. macierz postaci:

$$\Delta_u = \begin{bmatrix} \Delta_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \Delta_2 \end{bmatrix}, \quad (6.17)$$

---

<sup>1</sup> Wierszowi i kolumnie macierzy  $\mathbf{K}_2$  o numerze  $l$ , gdzie  $l = 1, 2, 3, \dots, 3w_{e2}$ , odpowiada wiersz i kolumna w macierzy  $\mathbf{K}_u$  o numerze  $l + 3w_{e1}$ .

w której  $\Delta_1$  oraz  $\Delta_2$  są macierzami operatorów różnicowych<sup>2</sup> odpowiednio pierwszej i drugiej płyty układu,

$\mathbf{M}_u$  – macierz bezwładności układu dwóch płyt otoczonych płynem będąca sumą:

$$\mathbf{M}_u = \mathbf{M}_{u,p} + \mathbf{M}_{u,c}, \quad (6.18)$$

w której  $\mathbf{M}_{u,p}$  jest macierzą bezwładności układu płyt w próżni, tj. macierzą postaci:

$$\mathbf{M}_{u,p} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1 & \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 & \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.19)$$

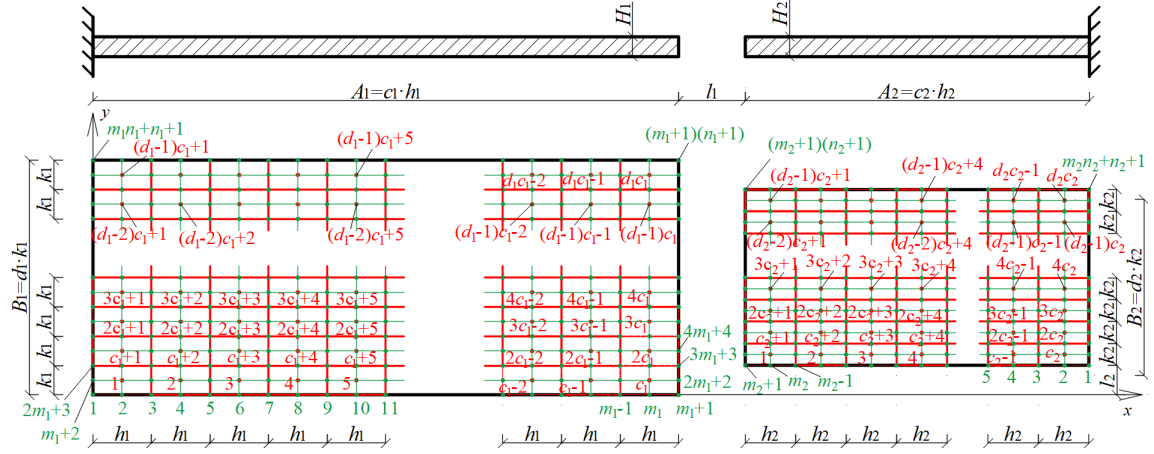
zawierającą macierze bezwładności  $\mathbf{M}_1$  oraz  $\mathbf{M}_2$  odpowiednio pierwszej i drugiej płyty układu. Z kolei  $\mathbf{M}_{u,c}$  jest macierzą bezwładności płynu otaczającego układ płyt, którą określa wzór (6.1) objaśniony w podrozdziale 6.1.

Macierze operatorów różnicowych  $\Delta_1$  oraz  $\Delta_2$  wyznacza się przy zastosowaniu wcześniej zdefiniowanej siatki MRS dla każdej z płyt, zgodnie z zasadami opisanymi w podrozdziale 3.2.2. W macierzach tych należy uwzględnić warunki brzegowe, zależnie od przyjętego sposobu podparcia płyt układu (np. podparta swobodnie na obwodzie, podparta na dwóch krawędziach, utwierdzona na jednej krawędzi). Siatki MRS dla każdej z płyt przyjęto jako regularne i na ich podstawie założono siatki podobszarów cieczy według zasad opisanych w podrozdziale 5.3. Na rysunku 6.6 pokazano przykładowy układ dwóch płyt, z których każda jest utwierdzona na jednej krawędzi. Czerwonym kolorem oznaczono dyskretyzację na podobszary cieczy wraz z ich numeracją, a kolorem zielonym wyróżniono siatkę MRS wraz z numeracją węzłów. Dla płyty utwierdzonej na prawej krawędzi numeracja węzłów siatki MRS została dostosowana do przypadku wyprowadzonego w podrozdziale 3.2.2, gdzie szczegółowo rozpatrzono płytę utwierdzoną na krawędzi lewej. Dyskretyzacji MRS na  $m_i \times n_i$  elementów, wykonanej dla  $i$ -tej płyty, odpowiada siatka podobszarów cieczy o gęstości  $c_i \times d_i = \frac{m_i}{2} \times \frac{n_i}{2}$ . Przyjmując podobszary cieczy o wymiarach  $h_i \times k_i$ , otrzymuje się wymiary elementów siatki MRS wynoszące  $\frac{h_i}{2} \times \frac{k_i}{2}$ .

Macierze bezwładności płyt,  $\mathbf{M}_1$  oraz  $\mathbf{M}_2$ , przyjęto jako diagonalne, w których na głównej przekątnej występują wartości mas części płyty przypadających na poszczególne węzły siatki MRS, podzielone przez odpowiednie pola powierzchni. Wyprowadzenie postaci tych macierzy opisano w podrozdziale 3.2.2.

Procedura dodawania elementów macierzy bezwładności płynu  $\mathbf{M}_{u,c}$  do elementów macierzy bezwładności płyt  $\mathbf{M}_{u,p}$  przebiega podobnie jak w przypadku metody

<sup>2</sup> Przez macierz operatorów różnicowych płyty należy rozumieć macierz układu równań (3.85) o strukturze określonej wzorem (3.86), zmodyfikowaną ze względu na warunki podparcia płyty. Szczegółowe wyprowadzenia postaci tej macierzy zostały przedstawione w podrozdziale 3.2.2.



Rysunek 6.6. Układ dwóch płyt z przykładową dyskretyzacją MRS oraz odpowiadającą jej dyskretyzacją na podobszary cieczy

elementów skończonych opisanej w poprzednim podrozdziale. W pierwszej kolejności należy dla każdej z płyt układu określić zależność między numeracją  $j$  podobszarów cieczy a odpowiadającą numeracją  $x$  węzłów siatki MRS. Dla płyt przedstawionych na rysunku 6.6 zależności te przedstawiają się następująco:

- płyta nr 1

$$j_1 = q_1 c_1 + r_1 \Rightarrow x_1 = 2(2q_1 + 1)c_1 + 2q_1 + 1 + 2r_1, \quad (6.20)$$

gdzie  $q_1 = 0, 1, 2, \dots, d_1 - 1$  oraz  $r_1 = 1, 2, 3, \dots, c_1$ ,

- płyta nr 2

$$j_2 = q_2 c_2 + r_2 \Rightarrow x_2 = 4(q_2 + 1)c_2 + 2q_2 + 3 - 2r_2, \quad (6.21)$$

gdzie  $q_2 = 0, 1, 2, \dots, d_2 - 1$  oraz  $r_2 = 1, 2, 3, \dots, c_2$ .

Algorytmy dodawania macierzy bezwładności cieczy do macierzy bezwładności płyt są analogiczne do tych przedstawionych w podrozdziale 6.2. Należy skorzystać z zależności (6.20) oraz (6.21) i pamiętać, aby elementy podmacierzy  $\mathbf{M}_{ij}$ , wchodzące w skład macierzy bezwładności płynu  $\mathbf{M}_{u,c}$ , w procedurze dodawania dzielić przez pole podobszaru siatki MRS. Ponadto w przypadku układu z rysunku 6.6 w pętlach „for” po numerach podobszarów cieczy płyty nr 1 należy brać pod uwagę zależność (6.20), a w przypadku płyty nr 2 uwzględnić zależność (6.21). Przykładowo algorytm dodawania elementów podmacierzy  $\mathbf{M}_{12}$  (rysunek 6.5), zawartej w macierzy  $\mathbf{M}_{u,c}$ , do elementów podmacierzy  $\mathbf{0}_1$ , zawartej w macierzy  $\mathbf{M}_{u,p}$  (wzór (6.19)), przedstawia się następująco:

```

for i=1:c1*d1 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 1
    r1=mod(i,c1); % wyznaczenie reszty z dzielenia "i" przez c1
    if r1==0 % dodatkowy warunek do reszty
        r1=c1;
    end
    q1=(i-r1)/c1; % iloraz z dzielenia "i" przez c1
    % numer "x" węzła MES odpowiadający numerowi "i"
    x=2*(2*q1+1)*c1+2*q1+2*r1+1;
    for j=1:c2*d2 % pętla po numerach podobszarów cieczy płyty nr 2
        r2=mod(j,c2); % wyznaczenie reszty z dzielenia "j" przez c2
        if r2==0 % dodatkowy warunek do reszty
            r2=c1;
        end
        q2=(j-r2)/c2; % iloraz z dzielenia "j" przez c2
        % numer "y" węzła MES odpowiadający numerowi "j"
        y=4*(q2+1)*c2+2*q2-2*r2+3;
        % dodanie elementu macierzy M12 do elementu macierzy O1
        O1(x,y)=O1(x,y)+M12(i,j)/(0.25*h1*k1);
    end
end
end

```

Warunki brzegowe w macierzy bezwładności  $\mathbf{M}_u$  układu płyt uwzględnia się przez wypełnienie zerami wierszy i kolumn odpowiadających węzłom siatki MRS zlokalizowanym na krawędzi utwierdzonej lub swobodnie podpartej. W przypadku pierwszej płyty układu numery węzłów jej siatki pokrywają się z numeracją odpowiadających im wierszy i kolumn macierzy  $\mathbf{M}_u$ . Natomiast numerowi  $l$  węzła siatki MRS zdefiniowanej dla drugiej płyty układu, gdzie  $l = 1, 2, 3, \dots, (m_2 + 1)(n_2 + 1)$ , odpowiadają wiersz i kolumna w macierzy  $\mathbf{M}_u$  o numerze  $l + (m_1 + 1)(n_1 + 1)$ .

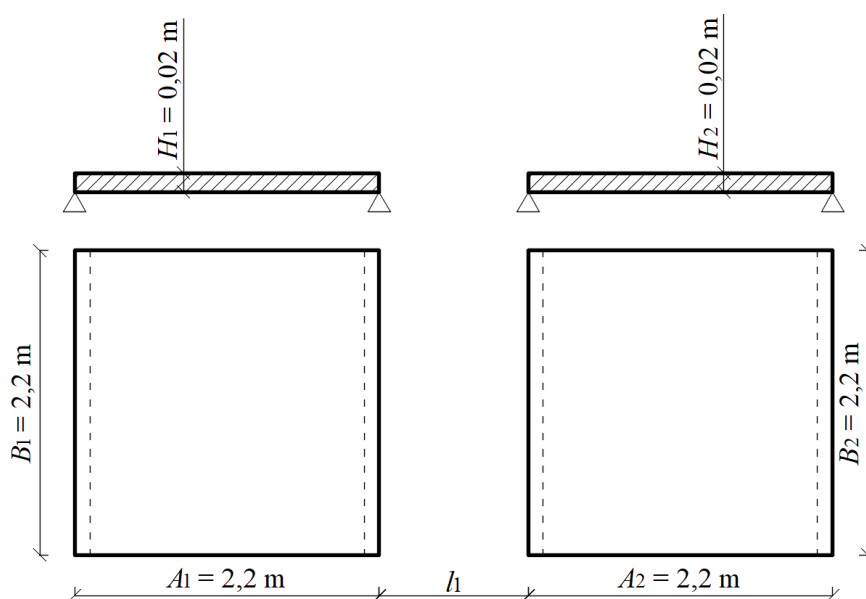
## 6.4. Przykłady analizy dynamicznej układu płyt zanurzonych w płynie

W niniejszym podrozdziale przedstawiono przykłady wyznaczania częstości drgań własnych układu dwóch płyt zanurzonych całkowicie w wodzie, której gęstość wynosi  $\rho_c = 1000 \text{ kg/m}^3$ . Obliczenia wykonano przy zastosowaniu dwóch kombinacji metod numerycznych, MES–MEB oraz MRS–MEB, opisanych w podrozdziałach 6.2

oraz 6.3. Przyjęto różne schematy podparcia badanych płyt. W pierwszych dwóch przykładach analizie poddano układy płyt o stałej grubości leżących w jednej płaszczyźnie lub w dwóch płaszczyznach równoległych. W kolejnych dwóch przykładach rozpatrzono układy płyt o liniowo zmiennej grubości.

**Przykład 6.1.** *Drgania własne układu dwóch płyt kwadratowych o stałej grubości, swobodnie podpartych na dwóch krawędziach, leżących w jednej płaszczyźnie i całkowicie zanurzonych w wodzie*

W przykładzie rozpatrzono układ dwóch płyt o wymiarach i schemacie statycznym jak na rysunku 6.7. Płyty wykonano z materiału izotropowego o module Younga  $E = 205$  GPa, współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$  i gęstości  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>.



Rysunek 6.7. Układ dwóch płyt kwadratowych leżących w jednej płaszczyźnie, analizowany w przykładzie 6.1

W tabelach 6.1–6.3 przedstawiono wartości częstości drgań własnych rozważanego układu płyt otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB. Przyjęto, że wartości rozstawu płyt należą do zbioru  $l_1 \in \{0, 0,25A_1, 0,5A_1, A_1, 10A_1\}$ . Dla każdej z płyt układu przyjęto siatkę MES o wymiarach  $20 \times 20$  oraz dwa przypadki siatki MRS – o gęstościach  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$ . Aby wyznaczyć macierz bezwładności wody, zdefiniowano dla każdej z płyt regularne siatki podobszarów cieczy o wymiarach  $19 \times 19$  w kombinacji z MES oraz  $10 \times 10$  i  $16 \times 16$  w kombinacji z MRS dla siatek odpowiednio  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$ . Otrzymane wyniki porównano z wartościami uzyskanymi przy zastosowaniu MEB [9], które zestawiono w tabeli 6.4.

Tabela 6.1. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB oraz siatki MES  $20 \times 20$ 

| Rozw. MES–MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s] |         |           |          |         |         |
|-------------------------------------------------------------|---------|-----------|----------|---------|---------|
| $l_1$                                                       | 0       | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                                  | 20,193  | 21,295    | 21,427   | 21,508  | 21,556  |
| $\omega_2$                                                  | 22,207  | 21,803    | 21,683   | 21,604  | 21,557  |
| $\omega_3$                                                  | 45,393  | 45,883    | 45,921   | 45,935  | 45,939  |
| $\omega_4$                                                  | 46,233  | 45,994    | 45,957   | 45,942  | 45,939  |
| $\omega_5$                                                  | 103,606 | 108,378   | 108,664  | 108,773 | 108,800 |
| $\omega_6$                                                  | 110,953 | 109,203   | 108,935  | 108,828 | 108,801 |

Tabela 6.2. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS  $20 \times 20$ 

| Rozw. MRS–MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s]<br>dla siatki $20 \times 20$ |         |           |          |         |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|----------|---------|---------|
| $l_1$                                                                                    | 0       | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                                                               | 19,742  | 20,814    | 20,955   | 21,041  | 21,091  |
| $\omega_2$                                                                               | 21,790  | 21,352    | 21,225   | 21,142  | 21,092  |
| $\omega_3$                                                                               | 44,006  | 44,496    | 44,538   | 44,554  | 44,558  |
| $\omega_4$                                                                               | 44,890  | 44,618    | 44,577   | 44,562  | 44,558  |
| $\omega_5$                                                                               | 100,770 | 105,297   | 105,610  | 105,728 | 105,758 |
| $\omega_6$                                                                               | 108,161 | 106,195   | 105,903  | 105,787 | 105,758 |

Tabela 6.3. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS  $32 \times 32$ 

| Rozw. MRS–MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s]<br>dla siatki $32 \times 32$ |         |           |          |         |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|----------|---------|---------|
| $l_1$                                                                                    | 0       | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                                                               | 20,208  | 21,187    | 21,320   | 21,402  | 21,451  |
| $\omega_2$                                                                               | 22,219  | 21,701    | 21,579   | 21,500  | 21,452  |
| $\omega_3$                                                                               | 45,476  | 45,581    | 45,620   | 45,634  | 45,638  |
| $\omega_4$                                                                               | 46,314  | 45,694    | 45,656   | 45,642  | 45,638  |
| $\omega_5$                                                                               | 103,491 | 107,581   | 107,872  | 107,982 | 108,010 |
| $\omega_6$                                                                               | 110,815 | 108,419   | 108,147  | 108,038 | 108,010 |

Tabela 6.4. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.1 otrzymane przy zastosowaniu MEB, na podstawie [9]

| Rozw. MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s] |         |           |          |         |         |
|---------------------------------------------------------|---------|-----------|----------|---------|---------|
| $l_1$                                                   | 0       | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                              | 20,150  | 21,244    | 21,387   | 21,472  | 21,523  |
| $\omega_2$                                              | 22,224  | 21,785    | 21,657   | 21,574  | 21,523  |
| $\omega_3$                                              | 43,957  | 44,443    | 44,484   | 44,499  | 44,503  |
| $\omega_4$                                              | 44,826  | 44,562    | 44,522   | 44,507  | 44,503  |
| $\omega_5$                                              | 101,760 | 106,329   | 106,638  | 106,754 | 106,784 |
| $\omega_6$                                              | 109,145 | 107,215   | 106,927  | 106,813 | 106,784 |

Na podstawie zestawionych wartości częstości drgań własnych układu płyt można wyciągnąć wniosek, że częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  przyjmują zbliżone do siebie wartości. Podobna prawidłowość ma miejsce w przypadku częstości  $\omega_3$  i  $\omega_4$  oraz  $\omega_5$  i  $\omega_6$ . Wynika to z faktu, że wartości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  odpowiadają pierwszej częstości drgań własnych odpowiednio pierwszej i drugiej płyty układu. Analogicznie częstości  $\omega_3$  i  $\omega_4$  można odnieść do drugiej, a częstości  $\omega_5$  i  $\omega_6$  – do trzeciej częstości drgań własnych kolejnych płyt tworzących układ. Im bardziej płyty w układzie są od siebie oddalone, tym mniejsza staje się różnica między częstościami  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , a także między częstościami  $\omega_3$  i  $\omega_4$  oraz  $\omega_5$  i  $\omega_6$ . Można zauważyć, że dla płyt oddległych od siebie o wartość  $10A_1$ , częstości drgań są parami identyczne, ponieważ dwie płyty zanurzone w płynie, przy znacznym oddaleniu od siebie, nie współpracują ze sobą i zachowują się jak dwa niezależne obiekty. Z kolei gdy płyty przylegają do siebie (tzn. odległość między nimi wynosi  $l_1 = 0$ ), największa różnica procentowa między częstościami drgań stanowiącymi parę, tzn. przyjmującymi zbliżone do siebie wartości, wynosi około 10% dla pary częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . W przypadku kolejnych par różnica ta wynosi około 2% oraz 7% pomiędzy odpowiednio  $\omega_3$  i  $\omega_4$  oraz  $\omega_5$  i  $\omega_6$ . Wraz z dalszym wzrostem odległości  $l_1$  różnice między częstościami drgań:  $\omega_1$  i  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  i  $\omega_4$  oraz  $\omega_5$  i  $\omega_6$  wynoszą odpowiednio około: 2,5%–0,5%, 0,25%–0,02% oraz 0,8%–0,05%, przy czym w podanych przedziałach procentowych większe wartości różnic dotyczą odległości  $l_1 = 0,25A_1$ , a mniejsze wartości występują dla  $l_1 = A_1$ . W rozpatrywanym zadaniu dynamiki układu płyt największe różnice procentowe dotyczą częstości w parze  $\omega_1$  i  $\omega_2$ , a najmniejsze – w parze  $\omega_3$  i  $\omega_4$ .

Analizując wartości częstości drgań własnych otrzymane zgodnie z metodologiami MES–MEB i MRS–MEB, zawarte w tabelach 6.1–6.3, w zestawieniu z war-

tościami otrzymanymi z literatury na podstawie MEB (tabela 6.4), można wyciągnąć wniosek, że zadowalające wartości pierwszej i drugiej częstości drgań własnych uzyskano w ujęciu MES–MEB oraz MRS–MEB przy siatce MRS  $32 \times 32$ . W obu tych przypadkach różnice procentowe w odniesieniu do wyników z literatury nie przekraczają 1%, a mniejsze wartości tych różnic dotyczą użycia kombinacji metod MES–MEB. Można zatem przyjąć, że w celu uzyskania zadowalających wyników pierwszej i drugiej częstości drgań własnych układu płyt należy zastosować siatkę MES o gęstości  $20 \times 20$  lub siatkę MRS o gęstości  $32 \times 32$ . Odpowiadające siatki podobszarów cieczy, utworzone zgodnie z MEB, wynoszą wówczas dla tych przypadków kolejno  $19 \times 19$  oraz  $16 \times 16$ . Przyjęto, że kryterium dokładności stanowi różnica procentowa wyników uzyskanych na podstawie MES–MEB lub MRS–MEB, nie przekraczająca 1% w odniesieniu do wartości częstości z pozycji [9], wyznaczonych przy użyciu MEB. W przypadku trzeciej i kolejnych częstości drgań własnych układu płyt wyniki najbliższe wartościom zawartym w tabeli 6.4 uzyskano przy zastosowaniu kombinacji MRS–MEB, której odpowiada siatka MRS  $20 \times 20$  oraz siatka podobszarów cieczy  $10 \times 10$  (tabela 6.2). Wtedy odpowiednie różnice procentowe są mniejsze od 1%. W tabelach 6.1 oraz 6.3 różnice te przekraczają 1% dla częstości  $\omega_5$  i  $\omega_6$  oraz 2,5% w przypadku  $\omega_3$  i  $\omega_4$ . Można zatem zauważyć, że użycie siatki podobszarów cieczy o niedużej gęstości  $10 \times 10$  spowodowało największe zbliżenie się wartości częstości drgań  $\omega_3$ – $\omega_6$  do wyników z literatury [9].

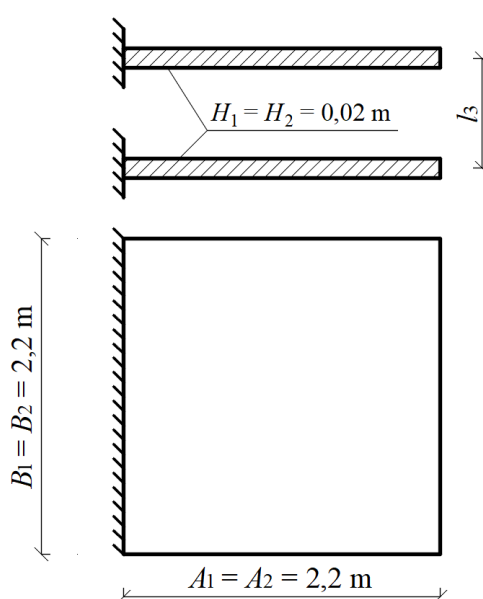
Porównując ze sobą wartości częstości otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB (tabele 6.1–6.3), można dostrzec duże podobieństwo wyników występujących w tabelach 6.1 oraz 6.3. Różnice między odpowiednimi wartościami częstości drgań w tych tabelach są mniejsze od 1%. Wynika to z faktu, że przy jednakowych siatkach MES oraz MRS odpowiadające siatki podobszarów cieczy znacznie się różnią, co ma wpływ na większe różnice otrzymywanych wartości częstości drgań. Wyniki otrzymane przy użyciu MES–MEB i MRS–MEB wyraźnie zbiegają się do siebie, gdy odpowiadają im zbliżone gęstości siatek podobszarów płynu. W tabelach 6.1 oraz 6.3 zastosowano siatki podobszarów cieczy  $19 \times 19$  oraz  $16 \times 16$  w kombinacji odpowiednio z MES i MRS.

W tabelach 6.2 oraz 6.3, w których użyto kombinację metod MRS–MEB dla siatek MRS  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$ , różnice między odpowiednimi wartościami częstości drgań własnych zawierają się w przedziale 1,71%–3,34%, przy czym najmniejsza różnica dotyczy częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  przy odległości między płytami  $l_1 = 10A_1$ , a największa różnica występuje przy częstości  $\omega_3$  i odległości  $l_1 = 0$ . Zatem przyjmując kryterium zbieżności jako różnicę między częstościami drgań dla kolejnych siatek

MRS mniejszą od 1%, należałoby wykonać dalsze obliczenia numeryczne przy zastosowaniu dyskretyzacji MRS gęstszej niż  $32 \times 32$ . Można też przyjąć do obliczeń siatkę MRS o gęstości pośredniej pomiędzy  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$ . Warto wówczas zaobserwować zgodność otrzymywanych wyników z wartościami zawartymi w tabeli 6.4.

**Przykład 6.2.** *Drgania własne układu dwóch płyt kwadratowych o stałej grubości, utwierdzonych na jednej krawędzi, leżących w dwóch płaszczyznach równoległych i całkowicie zanurzonych w wodzie*

W przykładzie analizowano układ dwóch płyt o wymiarach i schemacie statycznym jak na rysunku 6.8. Płyty wykonano z materiału, który zastosowano w przykładzie 6.1.



Rysunek 6.8. Układ dwóch płyt kwadratowych leżących w dwóch płaszczyznach równoległych, analizowany w przykładzie 6.2

W tabeli 6.5 przedstawiono wartości częstości drgań własnych układu płyt otrzymane w ujęciu metod MES–MEB z użyciem siatki MES  $20 \times 20$ . Z kolei w tabeli 6.6 zestawiono wartości częstości drgań własnych układu płyt uzyskane przy zastosowaniu kombinacji MRS–MEB i dwóch rodzajów siatek MRS,  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$ . Przyjęto wartości pionowego rozstawu płyt ze zbioru  $l_3 \in \{0,25A_1, 0,5A_1, A_1, 10A_1\}$ . W celu wyznaczenia macierzy bezwładności wody przyjęto dla każdej z płyt regularne siatki podobszarów cieczy o wymiarach  $19 \times 19$  w kombinacji z MES oraz  $10 \times 10$  i  $16 \times 16$  w kombinacji z MRS, dla siatek odpowiednio  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$ . Otrzymane wyniki porównano z wartościami uzyskanymi przy zastosowaniu MEB [9], które zestawiono w tabeli 6.7.

Tabela 6.5. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.2 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB oraz siatki MES  $20 \times 20$ 

| Rozw. MES–MEB – częstości $\omega_i$ [rad/s] |           |          |        |         |
|----------------------------------------------|-----------|----------|--------|---------|
| $l_3$                                        | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$  | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                   | 7,455     | 8,203    | 8,558  | 8,685   |
| $\omega_2$                                   | 9,605     | 9,106    | 8,806  | 8,685   |
| $\omega_3$                                   | 23,656    | 25,027   | 25,445 | 25,506  |
| $\omega_4$                                   | 27,045    | 25,961   | 25,567 | 25,506  |
| $\omega_5$                                   | 54,642    | 58,592   | 60,028 | 60,378  |
| $\omega_6$                                   | 64,930    | 62,004   | 60,720 | 60,378  |

Tabela 6.6. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.2 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatek MRS  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$ 

| Rozw. MRS–MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s] |                       |          |        |         |                       |          |        |         |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------|----------|--------|---------|-----------------------|----------|--------|---------|
|                                                             | Siatka $20 \times 20$ |          |        |         | Siatka $32 \times 32$ |          |        |         |
| $l_3$                                                       | $0,25A_1$             | $0,5A_1$ | $A_1$  | $10A_1$ | $0,25A_1$             | $0,5A_1$ | $A_1$  | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                                  | 7,241                 | 8,003    | 8,369  | 8,501   | 7,441                 | 8,195    | 8,556  | 8,684   |
| $\omega_2$                                                  | 9,446                 | 8,935    | 8,627  | 8,501   | 9,616                 | 9,111    | 8,807  | 8,684   |
| $\omega_3$                                                  | 25,009                | 26,611   | 27,109 | 27,183  | 25,057                | 26,562   | 27,025 | 27,093  |
| $\omega_4$                                                  | 28,993                | 27,725   | 27,256 | 27,183  | 28,788                | 27,597   | 27,160 | 27,093  |
| $\omega_5$                                                  | 52,713                | 56,683   | 58,118 | 58,468  | 54,181                | 58,127   | 59,555 | 59,902  |
| $\omega_6$                                                  | 63,017                | 60,089   | 58,810 | 58,469  | 64,436                | 61,518   | 60,241 | 59,903  |

Tabela 6.7. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.2 otrzymane przy zastosowaniu MEB, na podstawie [9]

| Rozw. MEB – częstości drgań $\omega_i$ [rad/s] |           |          |        |         |
|------------------------------------------------|-----------|----------|--------|---------|
| $l_1$                                          | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$  | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                     | 7,188     | 7,941    | 8,301  | 8,430   |
| $\omega_2$                                     | 9,359     | 8,856    | 8,553  | 8,430   |
| $\omega_3$                                     | 22,661    | 24,072   | 24,504 | 24,567  |
| $\omega_4$                                     | 26,149    | 25,036   | 24,630 | 24,567  |
| $\omega_5$                                     | 53,421    | 57,471   | 58,933 | 59,288  |
| $\omega_6$                                     | 63,929    | 60,938   | 59,636 | 59,289  |

Częstości drgań własnych rozpatrywanego układu płyt wspornikowych są około 1,7–2,9-krotnie mniejsze w porównaniu z układem dwóch płyt swobodnie podpar-

tych, rozpatrywanym w przykładzie 6.1. Ponadto, w porównaniu z poprzednim przykładem, większe są różnice procentowe pomiędzy częstościami:  $\omega_1$  i  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  i  $\omega_4$  oraz  $\omega_5$  i  $\omega_6$ . Różnice te mieszczą się w przedziałach kolejno około: 3%–30%, 0,5%–15% oraz 1,2%–19%, przy czym większe wartości różnic w każdym z przedziałów dotyczą odległości  $l_3 = 0,25A_1$ , a mniejsze wartości występują dla  $l_3 = A_1$ . Porównując układy płyt z przykładów 6.1 i 6.2, można wyciągnąć wniosek, że przy tych samych rozstawach większa współpraca między płytami na skutek obecności płynu występuje w przypadku obecnie rozważanym, tzn. dla płyt wspornikowych umieszczonych w dwóch płaszczyznach równoległych.

Wartości częstości drgań  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$  uzyskane przy pomocy MES i zestawione w tabeli 6.5 różnią się o około 2,6%–3,7% w porównaniu z wynikami w tabeli 6.7, pochodzącymi z literatury i otrzymanymi przy zastosowaniu MEB. Można zauważyć, że mniejsze wartości częstości drgań własnych dotyczące układu płyt wspornikowych w wodzie zaskutkowały większymi procentowymi różnicami tych wartości otrzymanych przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB oraz MEB–MEB, niż miało to miejsce w przykładzie 6.1. Z kolei częstości drgań  $\omega_5$  oraz  $\omega_6$  różnią się od wyników otrzymanych przy użyciu MEB o około 1,6%–2,3%, a dla częstości  $\omega_3$  oraz  $\omega_4$  różnice te wynoszą około 3,4%–4,4%, czyli są zbliżone do występujących w przykładzie 6.1. Aby zmniejszyć rozbieżność między wynikami z tabel 6.5 oraz 6.7, należałoby wykonać obliczenia numeryczne przy użyciu kombinacji MES–MEB dla siatek MES gęstszych niż  $20 \times 20$ . Można przyjąć kryterium wystarczającej dokładności obliczeń jako różnicę procentową nie większą niż 1% w odniesieniu do wyników uzyskanych przy zastosowaniu MEB.

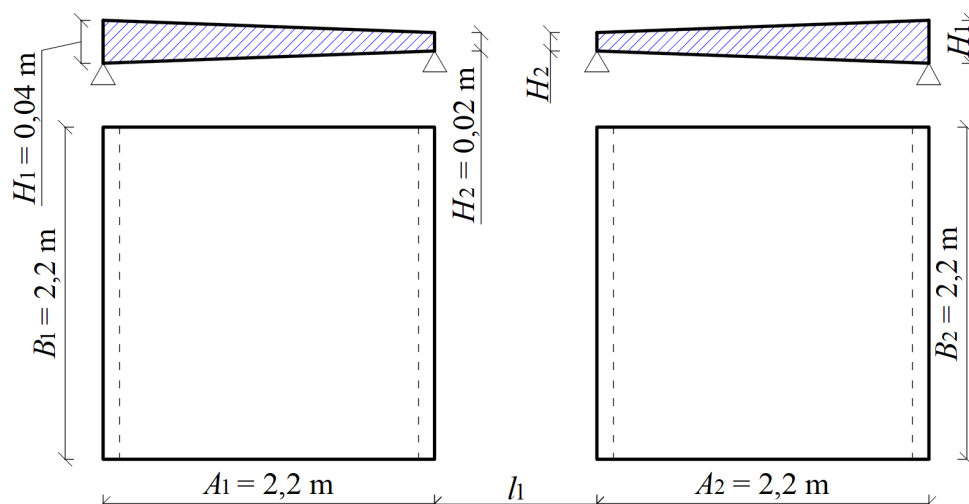
W rozważanym przykładzie częstości drgań własnych:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_5$  i  $\omega_6$  otrzymane przy użyciu kombinacji metod MRS–MEB (tabela 6.6) są bardziej zbliżone do wyników uzyskanych na podstawie MEB (tabela 6.7) w porównaniu z przypadkiem kombinacji MES–MEB. Okazuje się, że najkorzystniejsze wyniki otrzymano przy zastosowaniu siatki MRS  $20 \times 20$ . Wartości pierwszej i drugiej częstości drgań różnią się od wartości z tabeli 6.7 w granicach około 0,7%–0,9%, a więc spełniają przyjęte kryterium dokładności. Stosując siatkę  $32 \times 32$ , otrzymano różnice większe, mieszczące się w zakresie około 2,8%–3,5%. W przypadku piątej i szóstej częstości drgań rozbieżności te wynoszą około 0,8%–1,4% oraz 1,3%–1,4% dla siatek odpowiednio  $32 \times 32$  oraz  $20 \times 20$ , czyli są zbliżone. Duże różnice procentowe, w porównaniu z wynikami w tabeli 6.7, dotyczą trzeciej i czwartej częstości drgań i dla obu zastosowanych siatek MRS przekraczają 10%. Aby wartości wszystkich rozważanych częstości drgań zbliżyć do tych zawartych w literaturze, należałoby zwiększyć gęstość

użytej siatki MRS ponad  $32 \times 32$  i ponownie sprawdzić założone kryterium dokładności. Warto również kontrolować kryterium zbieżności metody przez porównywanie różnic procentowych między częstościami drgań uzyskanymi z użyciem kolejnych siatek MRS. Dla siatek  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$  kryterium zbieżności spełnione jest tylko w przypadku częstości  $\omega_3$  i  $\omega_4$ , które z kolei najbardziej odbiegają od wyników z tabeli 6.7.

Podobnie jak w przykładzie 6.1 wartości częstości drgań otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB są do siebie bardziej zbliżone dla siatek MES i MRS o gęstościach odpowiednio  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$ . Wówczas różnice procentowe między poszczególnymi wynikami są nie większe niż 1% w przypadku częstości:  $\omega_1$ ,  $\omega_2$ ,  $\omega_5$  i  $\omega_6$ . Dla częstości  $\omega_3$  i  $\omega_4$  rozbieżności te w większości przekraczają 6%. Można, podobnie jak w przykładzie 6.1, wyciągnąć wniosek, że o podobieństwie wyników uzyskanych przy użyciu obu kombinacji metod MES–MEB i MRS–MEB decyduje zbliżona gęstość siatki podobszarów ciecży.

**Przykład 6.3.** *Drgania własne układu dwóch płyt kwadratowych o zmiennej grubości, swobodnie podpartych na dwóch krawędziach, leżących w jednej płaszczyźnie i całkowicie zanurzonych w wodzie*

Przedmiotem analizy w przykładzie jest układ dwóch płyt o wymiarach i schemacie statycznym jak na rysunku 6.9. Płyty wykonano z materiału identycznego jak w dwóch poprzednich przykładach. Charakteryzują się one liniowo zmienną grubością w jednym kierunku, przy czym grubość wzdłuż jednej z podpartych krawędzi jest 2-krotnie większa od grubości na przeciwległej podpartej krawędzi.



Rysunek 6.9. Układ dwóch płyt kwadratowych o zmiennej grubości, leżących w jednej płaszczyźnie, analizowany w przykładzie 6.3

W tabelach 6.8–6.9 przedstawiono wartości częstości drgań własnych układu płyt otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB. Przyjęto wartości rozstawu płyt ze zbioru  $l_1 \in \{0, 0,25A_1, 0,5A_1, A_1, 10A_1\}$ . Dla płyt tworzących układ wzięto pod uwagę dwa warianty siatki MRS – o wymiarze  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$ . W celu wyznaczenia macierzy bezwładności wody przyjęto regularną dyskretyzację na podobszary cieczy o gęstościach  $10 \times 10$  i  $16 \times 16$  dla siatek MRS odpowiednio  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$ .

Tabela 6.8. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.3 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS  $20 \times 20$

| Rozw. MRS–MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s]<br>dla siatki $20 \times 20$ |         |           |          |         |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|----------|---------|---------|
| $l_1$                                                                                    | 0       | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                                                               | 32,700  | 34,638    | 34,882   | 35,027  | 35,111  |
| $\omega_2$                                                                               | 36,351  | 35,556    | 35,335   | 35,194  | 35,111  |
| $\omega_3$                                                                               | 73,154  | 74,214    | 74,298   | 74,328  | 74,334  |
| $\omega_4$                                                                               | 75,037  | 74,452    | 74,371   | 74,341  | 74,334  |
| $\omega_5$                                                                               | 166,693 | 176,381   | 177,063  | 177,311 | 177,371 |
| $\omega_6$                                                                               | 185,104 | 178,347   | 177,679  | 177,432 | 177,371 |

Tabela 6.9. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.3 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatki MRS  $32 \times 32$

| Rozw. MRS–MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s]<br>dla siatki $32 \times 32$ |         |           |          |         |         |
|------------------------------------------------------------------------------------------|---------|-----------|----------|---------|---------|
| $l_1$                                                                                    | 0       | $0,25A_1$ | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                                                               | 33,309  | 35,286    | 35,516   | 35,655  | 35,735  |
| $\omega_2$                                                                               | 36,902  | 36,160    | 35,950   | 35,816  | 35,736  |
| $\omega_3$                                                                               | 74,905  | 75,957    | 76,034   | 76,061  | 76,067  |
| $\omega_4$                                                                               | 76,698  | 76,176    | 76,101   | 76,074  | 76,067  |
| $\omega_5$                                                                               | 170,113 | 180,058   | 180,675  | 180,902 | 180,957 |
| $\omega_6$                                                                               | 186,633 | 181,838   | 181,238  | 181,013 | 180,957 |

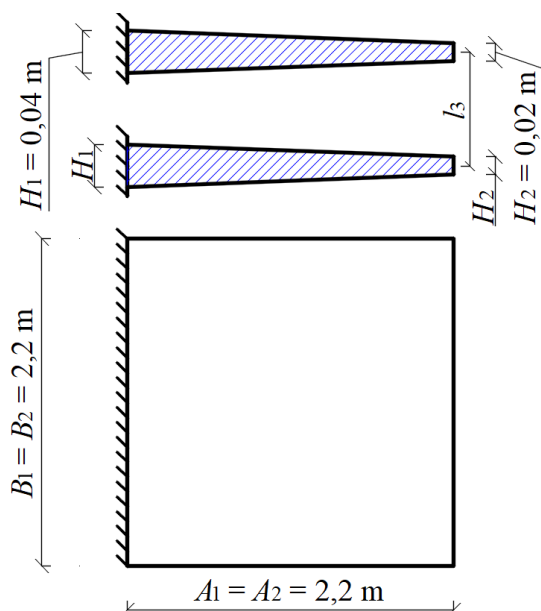
Analizując wartości częstości drgań własnych zawarte w tabelach 6.8 oraz 6.9, można stwierdzić, że różnice między wynikami uzyskanymi z użyciem siatek  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$  wahają się w granicach około 1,52%–1,87% dla częstości  $\omega_1$  oraz  $\omega_2$ . W przypadku wartości  $\omega_3$  oraz  $\omega_4$  rozbieżności te wynoszą około 2,21%–2,39%. Z ko-

lei częstości  $\omega_5$  oraz  $\omega_6$ , otrzymane przy zastosowaniu dwóch rozważanych siatek MRS, różnią się między sobą w granicach 1,96%–2,08%, poza częstością  $\omega_6$  dla rozstawu  $l_1 = 0$ , gdzie różnica ta wynosi 0,83%. Aby można było zaobserwować większą zbieżność uzyskiwanych wyników, należy wykonać obliczenia numeryczne dla kolejnej siatki MRS, gęstszej niż  $32 \times 32$ . Można też przyjąć siatkę o gęstości pośredniej między  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$ . Jak wspomniano we wcześniejszych przykładach, kryterium zbieżności można ustalić jako różnicę między wynikami otrzymywanymi dla kolejnych siatek MRS, która nie powinna przekroczyć 1%.

Porównując uzyskane wyniki z wartościami z przykładu 6.1, można stwierdzić, że dwukrotny wzrost grubości  $H_1$  każdej z płyt układu przy jednej z podpartych krawędzi, względem grubości  $H_2$  przy krawędzi przeciwległej, spowodował około 1,7-krotny wzrost wartości częstości drgań własnych w odniesieniu do płyty o stałej grubości  $H = H_2 = 0,02$  m.

**Przykład 6.4.** *Drgania własne układu dwóch płyt kwadratowych o zmiennej grubości, utwierdzonych na jednej krawędzi, leżących w dwóch płaszczyznach równoległych i całkowicie zanurzonych w wodzie*

W przykładzie analizie poddano układ dwóch płyt o wymiarach i schemacie statycznym jak na rysunku 6.10. Materiał płyt nie uległ zmianie w odniesieniu do poprzednich przykładów.



Rysunek 6.10. Układ dwóch płyt kwadratowych o zmiennej grubości, leżących w dwóch płaszczyznach równoległych, analizowany w przykładzie 6.4

W tabeli 6.10 zestawiono częstości drgań własnych układu płyt otrzymane w ujęciu metod MRS–MEB przy użyciu dwóch rodzajów siatek  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$ . Przyjęto wartości pionowego rozstawu płyt ze zbioru  $l_3 \in \{0,25A_1, 0,5A_1, A_1, 10A_1\}$ . Aby zbudować macierz bezwładności wody, założono dla płyt układu regularne siatki podobszarów cieczy o wymiarach  $10 \times 10$  i  $16 \times 16$ , dopasowane do siatek MRS odpowiednio  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$ .

Tabela 6.10. Wartości częstości drgań własnych dla układu płyt z przykładu 6.4 otrzymane przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB oraz siatek MRS  $20 \times 20$  i  $32 \times 32$

| Rozw. MRS–MEB – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s] |                       |          |         |         |                       |          |         |         |
|-------------------------------------------------------------|-----------------------|----------|---------|---------|-----------------------|----------|---------|---------|
|                                                             | Siatka $20 \times 20$ |          |         |         | Siatka $32 \times 32$ |          |         |         |
| $l_3$                                                       | $0,25A_1$             | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ | $0,25A_1$             | $0,5A_1$ | $A_1$   | $10A_1$ |
| $\omega_1$                                                  | 17,016                | 18,704   | 19,501  | 19,785  | 17,534                | 19,206   | 19,991  | 20,268  |
| $\omega_2$                                                  | 21,830                | 20,721   | 20,057  | 19,786  | 22,286                | 21,189   | 20,534  | 20,269  |
| $\omega_3$                                                  | 38,265                | 40,468   | 41,133  | 41,230  | 37,864                | 39,892   | 40,498  | 40,586  |
| $\omega_4$                                                  | 43,674                | 41,950   | 41,326  | 41,230  | 42,829                | 41,242   | 40,672  | 40,586  |
| $\omega_5$                                                  | 98,292                | 104,060  | 105,864 | 106,270 | 101,335               | 107,016  | 108,763 | 109,147 |
| $\omega_6$                                                  | 112,047               | 108,148  | 106,658 | 106,271 | 114,709               | 110,939  | 109,514 | 109,148 |

Analizując wartości częstości drgań własnych przedstawione w tabeli 6.10, można stwierdzić, że różnice między wynikami uzyskanymi przy użyciu siatek  $20 \times 20$  oraz  $32 \times 32$  mieszczą się w przedziale 2,1%–3% dla częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$ . W przypadku częstości  $\omega_3$  i  $\omega_4$  rozbieżności te zawierają się w granicach 1,05%–1,93%, a dla wartości  $\omega_5$  i  $\omega_6$  jest to przedział 2,4%–3,1%. Wniosek co do gęstości przyjmowanych siatek MRS, w celu uzyskania określonej zbieżności wyników, można sformułować podobnie jak w przykładzie 6.3.

Porównując uzyskane wartości z wynikami z przykładu 6.2, można wywnioskować, że dwukrotny wzrost grubości  $H_1$  każdej z płyt układu przy utwierdzonej krawędzi, względem grubości  $H_2$  przy przeciwległej krawędzi swobodnej, spowodował około 2,3-krotny wzrost wartości pierwszej i drugiej częstości drgań własnych w odniesieniu do płyty o stałej grubości  $H = H_2 = 0,02$  m. Dla trzeciej i czwartej częstości drgań wzrost ten jest około 1,5-krotny, a w przypadku piątej i szóstej – około 1,8-krotny. Częstości  $\omega_1$  i  $\omega_2$  wzrosły zatem bardziej znacząco w porównaniu z rozważanym wcześniej układem płyt swobodnie podpartych na dwóch krawędziach. Dla pozostałych częstości uzyskano wzrost zbliżony do tego przypadku.



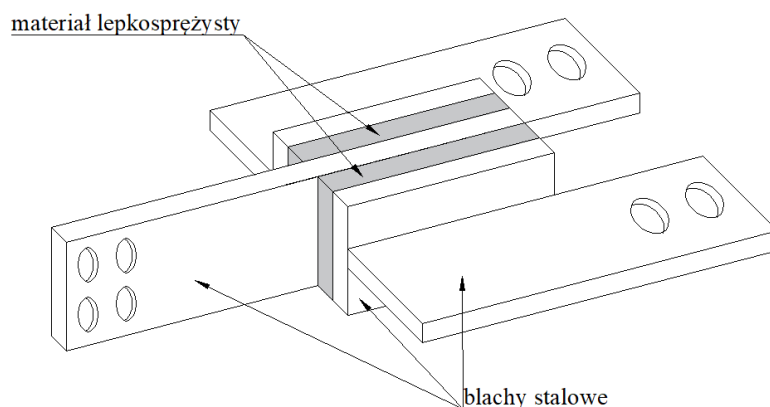
## 7. Analiza dynamiczna płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań

Celem niniejszego rozdziału jest przeprowadzenie analizy dynamicznej cienkich płyt prostokątnych wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań. W zawartych analizach badano drgania własne tłumione płyt o założonych wstępnie warunkach zamocowania na krawędziach. Dodatkowo przyjęto, że płyty spoczywają na ustalonej liczbie punktowych podpór (wieżów) lepkosprężystych.

W sytuacjach gdy na konstrukcję budowlaną oddziałują obciążenia zmienne w czasie, często konieczna jest zmiana określonych parametrów dynamicznych takiego układu, jak np. częstość drgań własnych. Jednym ze sposobów zabezpieczenia konstrukcji przed niekorzystnymi skutkami drgań jest wbudowanie tłumików lepkosprężystych. Tę metodę eliminacji drgań zalicza się do tzw. metod pasywnych.

Zgodnie z pracą [30] jedną z często stosowanych form tłumików lepkosprężystych jest „tłumik składający się z dwóch warstw materiału (o właściwościach lepkosprężystych) przymocowanych do płyt stalowych. Warstwy lepkosprężyste są wykonane z kopolimerów (najczęściej akrylowych) lub z substancji szklistych. Materiały lepkosprężyste rozpraszają energię w trakcie odkształceń postaciowych powodowanych ruchem płyt stalowych względem siebie. Mają one dobre właściwości tłumiące, a więc mogą rozpraszać energię także wtedy, gdy częstość siły wymuszającej jest mała. Wadą tych materiałów jest fakt, że ich właściwości zależą od temperatury otoczenia i częstości wymuszenia. W tłumiku lepkosprężystym wmontowanym w konstrukcję energia jest rozpraszana wtedy, gdy drgania konstrukcji powodują względne przemieszczenia punktów, do których jest przymocowana płyta środkowa tłumika i płyty zewnętrzne.” Schemat budowy przykładowego tłumika lepkosprężystego pokazano na rysunku 7.1.

Przeprowadzone w niniejszym rozdziale badania mogą znaleźć praktyczne zastosowanie np. przy projektowaniu płyt będących elementami konstrukcji wsporczych pod maszyny lub inne układy narażone na oddziaływania dynamiczne. Przyjęto założenie, że tłumiki przymocowane są jednym końcem w wybranych punktach płyty, a drugim – do sztywnego podłoża. W obrębie pojedynczej płyty wszystkie tłumiki cechują się jednakowymi parametrami [33]. Założono ponadto, że temperatura otoczenia badanych płyt ma wpływ jedynie na parametry tłumików i jest brana pod uwagę



Rysunek 7.1. Budowa lepkosprężystego tłumika drgań [30]

przy zastosowaniu zasady proporcjonalności częstotliwościowo-temperaturowej opisanej np. w pracach [31, 35].

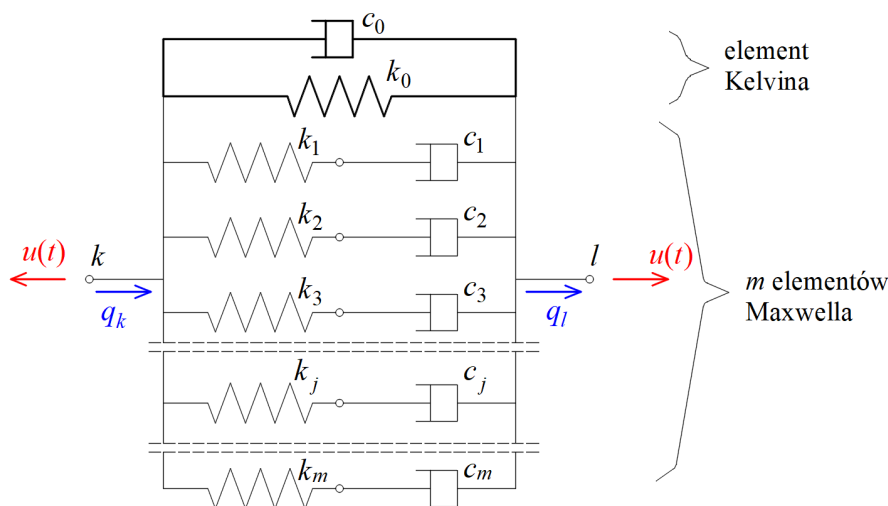
W przykładach numerycznych zwartych w niniejszym rozdziale przyjęto dwa modele opisu tłumika lepkosprężystego – uogólniony model Maxwella oraz model ułamkowy [30, 39]. W prowadzonych analizach numerycznych rozwiązywano nieliniowy problem własny powstały w wyniku odpowiedniego przekształcenia równania ruchu konstrukcji wyposażonej w tłumiki lepkosprężyste. W dysertacji zastosowano dwa sposoby jego rozwiązywania, przy czym w każdym z nich użyto metodę kontynuacji, opisaną np. w pracy [39]. W pierwszym podejściu obliczenia numeryczne prowadzono dla zagadnienia w pełnym jego wymiarze, a w drugim zredukowano wymiar zadania, stosując metodę podprzestrzennych iteracji przedstawioną np. w pozycji [41]. Do opisu deformacji płyty użyto metodę elementów skończonych, a sposób dyskretyzacji jej powierzchni środkowej przyjęto zgodnie z zasadami przedstawionymi w podrozdziale 3.2.1.

W pierwszym podrozdziale omówiono wybrane modele tłumika lepkosprężystego. Przedstawiono graficznie ich schematy oraz zestawiono niezbędne wzory pozwalające wyznaczyć siłę występującą w pojedynczym tłumiku. W podrozdziale drugim opisano zależności pozwalające ustalić parametry tłumików w temperaturze innej niż tzw. temperatura referencyjna, w której ustalono wstępne wartości tych parametrów. W kolejnym podrozdziale przedstawiono równanie ruchu płyty wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań. Przy pomocy transformaty Laplace’a oraz wzorów opisujących siłę w tłumikach równanie to sprowadzono do nieliniowego problemu własnego. Podano teoretyczne podstawy metod obliczeniowych pozwalających ten problem rozwiązać. Na zakończenie rozdziału zamieszczono przykłady wyznaczania charakterystyk dynamicznych wybranych typów płyt wyposażonych w lepkospręży-

ste tłumiki drgań. Omawiane zagadnienia rozwiązywano numerycznie przy użyciu procedur obliczeniowych opracowanych w środowisku Octave/Matlab<sup>1</sup>.

## 7.1. Opis modelu tłumika lepko-sprężystego

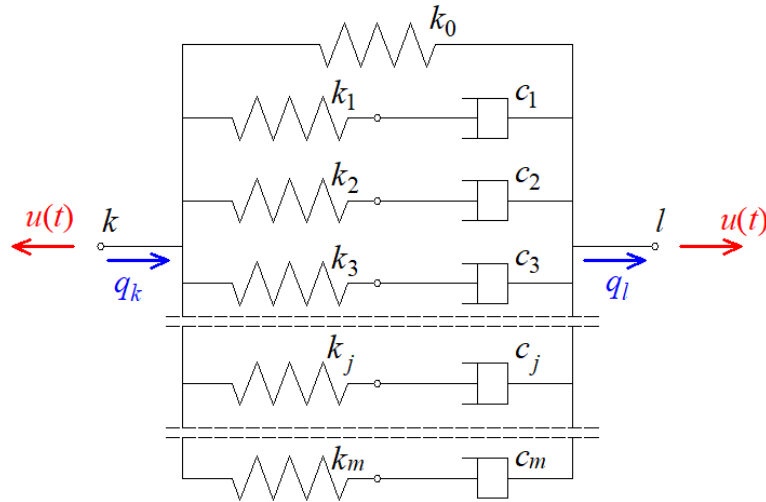
W niniejszym podrozdziale opisano dwa alternatywne modele tłumika lepko-sprężystego, które mogą być stosowane w analizie dynamicznej płyt wyposażonych w elementy pasywnej redukcji drgań. Pierwszy z tych modeli, którym jest uogólniony model Maxwella, stanowi szczególny przypadek tzw. uogólnionego modelu reologicznego opisanego np. w pracach [31, 33, 39] i przedstawionego graficznie na rysunku 7.2. Tłumik ten składa się z  $m+1$  elementów, z których każdy zawiera część lepka o stałej  $c_j$  oraz część sprężystą o stałej  $k_j$ , gdzie  $j = 0, 1, 2, \dots, m$ . Element o numerze „0” nazywany jest elementem Kelvina (zaznaczony pogrubioną linią na rysunku 7.2), a pozostałe  $m$  elementów to tzw. elementy Maxwella.



Rysunek 7.2. Schemat lepko-sprężystego tłumika drgań opisanego uogólnionym modelem reologicznym [39]

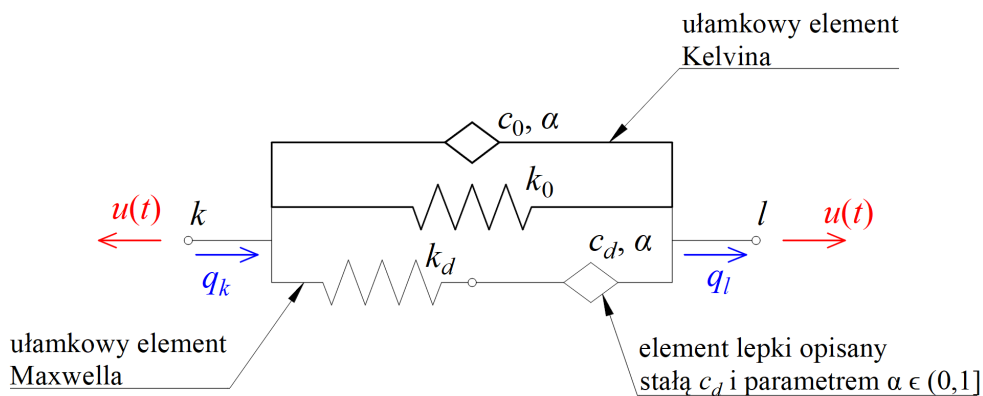
Uogólniony model Maxwella powstaje z połączenia elementu sprężystego o stałej  $k_0$  i  $m$  elementów Maxwella, a więc różni się od uogólnionego modelu reologicznego tym, że nie zawiera części lepkiej o stałej  $c_0$ . Model ten opisano np. w pracach [42, 43], a jego schemat pokazano na rysunku 7.3. W przypadku gdy  $m = 1$ , tzn. model zawiera jeden element Maxwella, nazywa się go modelem Zenera [30].

<sup>1</sup> Procedury korzystające z metody podprzestrzennych iteracji, stosowane w przykładzie 7.2, opracowała dr hab. inż. M. Łasecka-Plura. Pozostałe algorytmy użyte w przykładach numerycznych, zamieszczonych w niniejszym rozdziale, są autorskimi procedurami obliczeniowymi.

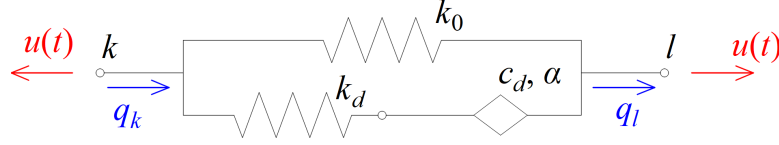


Rysunek 7.3. Schemat lepkosprężystego tłumika drgań opisanego uogólnionym modelem Maxwella [76]

Tłumik lepkosprężysty opisany modelem ułamkowym przedstawiono graficznie na rysunku 7.4. Zgodnie z pracą [39] składa się on z tzw. ułamkowego elementu Kelvina stanowiącego równoległe połączenie dwóch elementów – sprężystego opisanego stałą  $k_0$  oraz lepkiego opisanego stałą  $c_0$  i parametrem  $\alpha \in (0, 1]$ . Omawiany model zawiera także tzw. ułamkowy element Maxwella będący szeregowym połączeniem elementów – sprężystego opisanego stałą  $k_d$  oraz lepkiego charakteryzowanego przez stałą  $c_d$  i parametr  $\alpha \in (0, 1]$ . W szczególnym przypadku w modelu ułamkowym tłumika można element Kelvina zastąpić elementem sprężystym. Schemat takiego modelu pokazano na rysunku 7.5.



Rysunek 7.4. Schemat lepkosprężystego tłumika drgań opisanego przy pomocy modelu ułamkowego [39]



Rysunek 7.5. Schemat lepkosprężystego tłumika drgań opisanego modelem ułamkowym zawierający element sprężysty zamiast elementu Kelvina

Na rysunkach 7.2–7.5 symbolem  $u(t)$  oznaczono całkowitą siłę panującą w tłumiku, będącą funkcją czasu  $t$ . Stanowi ona sumę sił występujących w poszczególnych elementach składających się na tłumik. Można ją wyrazić jednym z następujących wzorów:

- dla tłumika opisanego uogólnionym modelem reologicznym lub uogólnionym modelem Maxwella (rysunki 7.2–7.3):

$$u(t) = \sum_{j=0}^m u_j(t), \quad (7.1)$$

- dla tłumika opisanego modelem ułamkowym (rysunki 7.4–7.5):

$$u(t) = u_0(t) + u_d(t), \quad (7.2)$$

gdzie  $u_j(t)$  we wzorze (7.1) oznacza siłę w  $j$ -tym elemencie wchodzącym w skład tłumika. Może to być element: Kelvina, Maxwella lub sprężysty (zastępujący element Kelvina). Natomiast  $u_0(t)$  i  $u_d(t)$  we wzorze (7.2) oznaczają siłę odpowiednio w ułamkowym elemencie Kelvina (lub w zastępującym go elemencie sprężystym) oraz w ułamkowym elemencie Maxwella. Siły występujące w pojedynczych elementach składających się na tłumik można zapisać przy pomocy poniższych wzorów [39]:

- siła w elemencie sprężystym:

$$u_0(t) = k_0 \Delta q(t), \quad (7.3)$$

- siła w elemencie Kelvina

- dla uogólnionego modelu reologicznego (rysunek 7.2):

$$u_0(t) = k_0 \Delta q(t) + c_0 \Delta \dot{q}(t), \quad (7.4)$$

- dla modelu ułamkowego (rysunek 7.4):

$$u_0(t) = k_0 \Delta q(t) + c_0 D_t^\alpha \Delta q(t), \quad (7.5)$$

- siła w elemencie Maxwella
  - dla uogólnionego modelu reologicznego (rysunek 7.2):

$$\nu_j u_j(t) + \dot{u}_j(t) = k_j \Delta \dot{q}(t), \quad (7.6)$$

- dla modelu ułamkowego (rysunek 7.4):

$$\nu_d u_d(t) + D_t^\alpha u_d(t) = k_d D_t^\alpha \Delta q(t). \quad (7.7)$$

We wzorach (7.3)–(7.7) przyjęto następujące oznaczenia:

- iloraz współczynników sztywności i tłumienia dla  $j$ -tego elementu Maxwella:

$$\nu_j = \frac{k_j}{c_j}, \quad (7.8)$$

- iloraz współczynników sztywności i tłumienia dla ułamkowego elementu Maxwella:

$$\nu_d = \frac{k_d}{c_d}, \quad (7.9)$$

- względne przemieszczenie tłumika (różnica przemieszczeń  $q_l$  oraz  $q_k$  końców tłumika  $l$  oraz  $k$ ) w chwili czasowej  $t$ :

$$\Delta q(t) = q_l(t) - q_k(t), \quad (7.10)$$

- pochodna ułamkowa rzędu  $\alpha$  obliczana z wyrażenia będącego funkcją czasu  $t$ :

$$D_t^\alpha(\cdot). \quad (7.11)$$

W celu uproszczenia dalszych obliczeń wyrażenia (7.3)–(7.7) przekształcono przy pomocy transformaty Laplace'a<sup>2</sup>. Na skutek tego przekształcenia wyeliminowano występujące w nich pochodne i otrzymano następujące wzory:

- przekształcenie Laplace'a siły w elemencie sprężystym:

$$\bar{u}_0(s) = k_0 \Delta \bar{q}(s), \quad (7.12)$$

---

<sup>2</sup> Zgodnie z [110] „przekształceniem lub transformatą Laplace'a nazywa się odwzorowanie  $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s)$  określone wzorem

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Jest to więc przyporządkowanie funkcji  $f(t)$  zmiennej rzeczywistej  $t$  jej transformaty Laplace'a, czyli funkcji  $F(s)$  zmiennej zespolonej  $s = x + iy$ . Jeśli całka w powyższej definicji jest zbieżna dla pewnego niepustego zbioru  $s \in \mathbb{C}$ , to wówczas funkcja  $f(t)$  jest  $\mathcal{L}$ -transformowalna.”

- przekształcenie Laplace'a siły w elemencie Kelvina
  - dla uogólnionego modelu reologicznego (rysunek 7.2):

$$\bar{u}_0(s) = k_0 \Delta \bar{q}(s) + s c_0 \Delta \bar{q}(s), \quad (7.13)$$

- dla modelu ułamkowego (rysunek 7.4):

$$\bar{u}_0(s) = k_0 \Delta \bar{q}(s) + s^\alpha c_0 \Delta \bar{q}(s), \quad (7.14)$$

- przekształcenie Laplace'a siły w elemencie Maxwella
  - dla uogólnionego modelu reologicznego (rysunek 7.2):

$$\nu_j \bar{u}_j(s) + s \bar{u}_j(s) = k_j s \Delta \bar{q}(s) \Rightarrow \bar{u}_j(s) = \frac{k_j s}{\nu_j + s} \Delta \bar{q}(s), \quad (7.15)$$

- dla modelu ułamkowego (rysunek 7.4):

$$\nu_d \bar{u}_d(s) + s^\alpha \bar{u}_d(s) = k_d s^\alpha \Delta \bar{q}(s) \Rightarrow \bar{u}_d(s) = \frac{k_d s^\alpha}{\nu_d + s^\alpha} \Delta \bar{q}(s). \quad (7.16)$$

We wzorach (7.12)–(7.16) symbolem  $s$  oznaczono zmienną  $\mathcal{L}$ -transformaty, natomiast  $\bar{u}_j(s)$  oraz  $\Delta \bar{q}(s)$  są  $\mathcal{L}$ -transformatami odpowiednio funkcji  $u_j(t)$  siły w  $j$ -tym elemencie tłumika oraz funkcji  $\Delta q(t)$  względnego przemieszczenia tłumika.

Przekształcenie Laplace'a jest operatorem liniowym, a więc  $\mathcal{L}$ -transformata sumy funkcji jest równa sumie  $\mathcal{L}$ -transformat pojedynczych funkcji wchodzących w skład sumy. Na podstawie wzorów (7.1)–(7.2) oraz (7.12)–(7.16) można napisać wzory na  $\mathcal{L}$ -transformaty całkowitych sił występujących w poszczególnych modelach tłumika lepkosprężystego:

- tłumik opisany uogólnionym modelem reologicznym:

$$\bar{u}(s) = \sum_{j=0}^m \bar{u}_j(s) = \left( k_0 + s c_0 + \sum_{j=0}^m \frac{k_j s}{\nu_j + s} \right) \Delta \bar{q}(s), \quad (7.17)$$

- tłumik opisany uogólnionym modelem Maxwella:

$$\bar{u}(s) = \sum_{j=0}^m \bar{u}_j(s) = \left( k_0 + \sum_{j=0}^m \frac{k_j s}{\nu_j + s} \right) \Delta \bar{q}(s), \quad (7.18)$$

- tłumik opisany modelem ułamkowym:

$$\bar{u}(s) = \bar{u}_0(s) + \bar{u}_d(s) = \left( k_0 + s^\alpha c_0 + \frac{k_d s^\alpha}{\nu_d + s^\alpha} \right) \Delta \bar{q}(s), \quad (7.19)$$

- tłumik opisany modelem ułamkowym z elementem sprężystym zastępującym ułamkowy element Kelvina:

$$\bar{u}(s) = \bar{u}_0(s) + \bar{u}_d(s) = \left( k_0 + \frac{k_d s^\alpha}{\nu_d + s^\alpha} \right) \Delta \bar{q}(s). \quad (7.20)$$

Aby uprościć zapis wzorów (7.17)–(7.20), przyjęto poniższe oznaczenia:

- w uogólnionym modelu reologicznym:

$$K_r = k_0, \quad C_r(s) = s c_0, \quad G_r(s) = \sum_{j=1}^m \frac{k_j s}{\nu_j + s}, \quad (7.21)$$

- w modelu ułamkowym:

$$K_r = k_0, \quad C_r(s) = s^\alpha c_0, \quad G_r(s) = \frac{k_d s^\alpha}{\nu_d + s^\alpha}. \quad (7.22)$$

Wówczas wzory (7.17) oraz (7.19) można przedstawić następująco:

$$\bar{u}(s) = (K_r + C_r(s) + G_r(s)) \Delta \bar{q}(s). \quad (7.23)$$

Z kolei wzory (7.18) oraz (7.20) przyjmują postać:

$$\bar{u}(s) = (K_r + G_r(s)) \Delta \bar{q}(s). \quad (7.24)$$

## 7.2. Opis zależności parametrów tłumika od temperatury

Wartości parametrów charakteryzujących dany tłumik lepkosprężysty wykazują zależność od temperatury otoczenia, w którym jest on umieszczony. W niniejszej pracy przyjęto, że temperatura otoczenia ma wpływ jedynie na parametry tłumików, a wartości stałych materiałowych płyty są od niej niezależne.

Opis zależności parametrów tłumików od temperatury przedstawiono na podstawie prac [31, 33] przy założeniu, że tłumik opisywany jest za pomocą uogólnionego modelu reologicznego (rysunek 7.2). Wartości parametrów sztywności i tłumienia dla  $j$ -tego elementu (Maxwella lub Kelvina) tłumika, ustalone w temperaturze referencyjnej  $T_0$ , oznaczono odpowiednio jako  $\bar{k}_j$  oraz  $\bar{c}_j$ . W przypadku umieszczenia tłumika w temperaturze  $T$ , różnej od temperatury referencyjnej, jego parametry oznaczone jako  $k_j$  oraz  $c_j$  można określić, stosując tzw. zasadę proporcjonalności częstotliwościowo-temperaturowej.

Przy założeniu wykonywania przez tłumik lepkosprężysty drgań harmonicznym wymuszonych o częstotliwości wymuszenia  $\lambda$  można przedstawić następujące związki opisujące względne przemieszczenie tłumika, siłę całkowitą w tłumiku oraz siłę działającą w jego  $j$ -tym elemencie:

$$\begin{aligned}\Delta q(t) &= \Delta Q e^{i\lambda t}, \\ u(t) &= U e^{i\lambda t}, \\ u_j(t) &= U_j e^{i\lambda t},\end{aligned}\tag{7.25}$$

gdzie  $j = 0, 1, 2, \dots, m$  oraz  $\Delta Q$ ,  $U$  i  $U_j$  są amplitudami odpowiednio: względnego przemieszczenia tłumika, siły całkowitej w tłumiku oraz siły występującej w jego  $j$ -tym elemencie. Po podstawieniu wzorów (7.25) do (7.1), (7.4) oraz (7.6) otrzymuje się poniższe zależności:

$$U e^{i\lambda t} = \sum_{j=0}^m U_j e^{i\lambda t} \Rightarrow U = \sum_{j=0}^m U_j,$$

$$U_0 e^{i\lambda t} = k_0 \Delta Q e^{i\lambda t} + i\lambda c_0 \Delta Q e^{i\lambda t} \Rightarrow U_0 = (k_0 + i\lambda c_0) \Delta Q,$$

$$\nu_j U_j e^{i\lambda t} + i\lambda U_j e^{i\lambda t} = i\lambda k_j \Delta Q e^{i\lambda t} \Rightarrow U_j = k_j \frac{i\lambda}{\nu_j + i\lambda} \Delta Q,$$

z których wynika następujący wzór na amplitudę całkowitej siły w tłumiku:

$$U = \left[ k_0 + i\lambda c_0 + \sum_{j=1}^m \frac{i\lambda k_j}{\nu_j + i\lambda} \right] \Delta Q = K^*(\lambda) \Delta Q = [K'(\lambda) + iK''(\lambda)] \Delta Q, \tag{7.26}$$

gdzie

$$K^*(\lambda) = k_0 + i\lambda c_0 + \sum_{j=1}^m \frac{i\lambda k_j}{\nu_j + i\lambda} \tag{7.27}$$

oznacza tzw. moduł zespolony. Jego część rzeczywistą  $K'(\lambda)$  nazywa się modulem sztywności dynamicznej lub modulem zachowawczym, a część urojoną  $K''(\lambda)$  określa się jako moduł tłumienia lub moduł stratności. We wzorze (7.26) wyrażenie pod sumą można przekształcić następująco:

$$\frac{i\lambda k_j}{\nu_j + i\lambda} = \frac{i\lambda k_j (\nu_j - i\lambda)}{\nu_j^2 + \lambda^2} = \frac{k_j \lambda^2}{\nu_j^2 + \lambda^2} + i \frac{k_j \lambda \nu_j}{\nu_j^2 + \lambda^2}.$$

Z powyższego zapisu wynika, że moduły  $K'$  oraz  $K''$  przyjmują postacie:

$$K'(\lambda) = k_0 + \sum_{j=1}^m k_j \frac{\lambda^2}{\nu_j^2 + \lambda^2}, \tag{7.28}$$

$$K''(\lambda) = \lambda c_0 + \sum_{j=1}^m k_j \frac{\lambda \nu_j}{\nu_j^2 + \lambda^2}. \quad (7.29)$$

Zgodnie z zasadą proporcjonalności częstotliwościowo-temperaturowej można powiązać powyższe moduły, wyznaczone w temperaturze  $T$ , z modułami określonymi w temperaturze referencyjnej  $T_0$  w następujący sposób:

$$K'(\lambda, T) = K'(\alpha_T \lambda, T_0), \quad K''(\lambda, T) = K''(\alpha_T \lambda, T_0), \quad (7.30)$$

gdzie  $\alpha_T$  to tzw. funkcja przesunięcia. Ze wzorów (7.28)–(7.30) wynika, że:

$$k_0 + \sum_{j=1}^m k_j \frac{\lambda^2}{\nu_j^2 + \lambda^2} = \bar{k}_0 + \sum_{j=1}^m \bar{k}_j \frac{\alpha_T^2 \lambda^2}{\bar{\nu}_j^2 + \alpha_T^2 \lambda^2}, \quad (7.31)$$

$$\lambda c_0 + \sum_{j=1}^m k_j \frac{\lambda \nu_j}{\nu_j^2 + \lambda^2} = \alpha_T \lambda \bar{c}_0 + \sum_{j=1}^m \bar{k}_j \frac{\alpha_T \lambda \bar{\nu}_j}{\bar{\nu}_j^2 + \alpha_T^2 \lambda^2}. \quad (7.32)$$

Po podstawieniu wzoru (7.8) do (7.31)–(7.32) otrzymuje się:

$$k_0 + \sum_{j=1}^m k_j \frac{c_j^2 \lambda^2}{k_j^2 + c_j^2 \lambda^2} = \bar{k}_0 + \sum_{j=1}^m \bar{k}_j \frac{\alpha_T^2 \bar{c}_j^2 \lambda^2}{\bar{k}_j^2 + \alpha_T^2 \bar{c}_j^2 \lambda^2}, \quad (7.33)$$

$$\lambda c_0 + \sum_{j=1}^m k_j^2 \frac{\lambda c_j}{k_j^2 + c_j^2 \lambda^2} = \alpha_T \lambda \bar{c}_0 + \sum_{j=1}^m \bar{k}_j^2 \frac{\alpha_T \bar{c}_j \lambda}{\bar{k}_j^2 + \alpha_T^2 \bar{c}_j^2 \lambda^2}. \quad (7.34)$$

Z powyższego z kolei wynikają wzory na parametry tłumików w temperaturze  $T$ :

$$k_j = \bar{k}_j, \quad c_j = \bar{c}_j \alpha_T, \quad (7.35)$$

gdzie  $j = 0, 1, 2, \dots, m$  oraz funkcja przesunięcia  $\alpha_T$  zależy od temperatury  $T$  i może być wyrażona np. przy pomocy wzoru Wiliama-Landela-Ferry'ego [31, 34]:

$$\log_{10} \alpha_T = \frac{-C_1(T - T_0)}{C_2 + T - T_0}, \quad (7.36)$$

w którym  $C_1$  oraz  $C_2$  są stałymi wyznaczanymi doświadczalnie. Aby określić parametry danego tłumika  $k_j$ ,  $c_j$  w dowolnej temperaturze  $T$ , konieczna jest więc znajomość wartości tych parametrów  $\bar{k}_j$ ,  $\bar{c}_j$  w temperaturze odniesienia  $T_0$  oraz informacja o postaci funkcji przesunięcia  $\alpha_T(T)$ .

### 7.3. Równanie ruchu płyty z więzami lepkosprężystymi w ujęciu MES

Równanie (4.2), przedstawione w podrozdziale 4.1, pozwala opisać ruch konstrukcji obciążonej dynamicznie przy użyciu metody elementów skończonych. W niniejszym podrozdziale przyjęto założenie, że badane płyty wyposażono w lepkosprężyste tłumiki drgań oraz nie poddano ich działaniu dodatkowych zewnętrznych sił wymuszających. Wówczas wektor obciążeń zewnętrznych  $F(t)$ , występujący po prawej stronie równania (4.2), jest niezerowy ze względu na siły oddziaływania tłumików na konstrukcję. Równanie ruchu płyty z więzami lepkosprężystymi można wówczas zapisać następująco [31, 39]:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{q}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{q}(t) = \mathbf{f}(t), \quad (7.37)$$

gdzie  $\mathbf{f}(t)$  jest wektorem obciążenia wynikającym z oddziaływania tłumików na płytę. Wektor ten jest sumą wektorów obciążeń od poszczególnych tłumików. Zatem jeśli do płyty przymocowanych jest  $n_d$  tłumików, to można zapisać:

$$\mathbf{f}(t) = \sum_{r=1}^{n_d} \mathbf{f}_r(t), \quad (7.38)$$

gdzie  $\mathbf{f}_r(t)$  oznacza wektor oddziaływania  $r$ -tego tłumika na płytę.

Aby przekształcić równanie (7.37) w problem własny, należy do obu jego stron zastosować transformatę Laplace'a z zerowymi warunkami początkowymi. Przyjmuje ono wówczas następującą postać:

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{q}}(s) = \bar{\mathbf{f}}(s), \quad (7.39)$$

gdzie  $\bar{\mathbf{q}}(s)$  oraz  $\bar{\mathbf{f}}(s)$  są  $\mathcal{L}$ -transformatami odpowiednio wektorów  $\mathbf{q}(t)$  oraz  $\mathbf{f}(t)$ . Wektor  $\bar{\mathbf{f}}(s)$  można przedstawić przy pomocy następującego wzoru<sup>3</sup>:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = \sum_{r=1}^{n_d} \bar{\mathbf{f}}_r(s) = - \sum_{r=1}^{n_d} (K_r + C_r(s) + G_r(s)) \mathbf{L}_r \bar{\mathbf{q}}(s), \quad (7.40)$$

gdzie:

$\bar{\mathbf{f}}_r(s)$  –  $\mathcal{L}$ -transformata wektora  $\mathbf{f}_r(t)$  oddziaływania  $r$ -tego tłumika na płytę,  
 $K_r$ ,  $C_r(s)$ ,  $G_r(s)$  – funkcje charakteryzujące  $r$ -ty tłumik wyrażone wzorami (7.21) lub (7.22), zależnie od przyjętego modelu tłumika,  
 $\mathbf{L}_r$  – globalna macierz lokalizacji  $r$ -tego tłumika, tzn. macierz zerowa posiadająca

<sup>3</sup> por. wzór (7.23)

wymiar  $n_s \times n_s$  ( $n_s$  – liczba stopni swobody płyty), zawierająca wartość jednostkową na przekątnej głównej w wierszu i kolumnie o numerze translacyjnego stopnia swobody, wzdłuż którego działa  $r$ -ty tłumik.

W przypadku gdy wszystkie tłumiki zamocowane do płyty są jednakowe, wzór (7.40) można zapisać następująco:

$$\bar{\mathbf{f}}(s) = - (K_r + C_r(s) + G_r(s)) \mathbf{L} \bar{\mathbf{q}}(s), \quad (7.41)$$

gdzie

$$\mathbf{L} = \sum_{r=1}^{n_d} \mathbf{L}_r \quad (7.42)$$

jest macierzą lokalizacji układu tłumików, tj. macierzą diagonalną zawierającą wartości jednostkowe na przecięciu wierszy i kolumn o numerach translacyjnych stopni swobody, po kierunku których działają kolejne tłumiki zamocowane do płyty.

Po podstawieniu wzoru (7.41) do (7.39) otrzymuje się nieliniowy problem własny postaci:

$$(s^2 \mathbf{M} + s \mathbf{C} + \mathbf{C}_d(s) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d + \mathbf{G}_d(s)) \bar{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{0}, \quad (7.43)$$

gdzie:

$$\mathbf{K}_d = K_r \mathbf{L}, \quad \mathbf{C}_d(s) = C_r(s) \mathbf{L}, \quad \mathbf{G}_d(s) = G_r(s) \mathbf{L}, \quad (7.44)$$

przy założeniu, że wszystkie tłumiki zamocowane do płyty są jednakowe. Rozwiązaniem problemu własnego (7.43) są zespolone wartości własne  $s_i \in \mathbb{C}$  oraz odpowiadające im wektory własne  $\bar{\mathbf{q}}_i(s)$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ . Po ich wyznaczeniu uzyskuje się charakterystyki dynamiczne płyty z tłumikami, którymi są:

- postacie drgań własnych (przy użyciu wektora  $\bar{\mathbf{q}}_i(s)$ ),
- częstości drgań własnych  $\omega_i$  (przy użyciu wartości własnych  $s_i$ ),
- bezwymiarowe współczynniki tłumienia  $\gamma_i$  (przy użyciu wartości własnych  $s_i$ ).

Jak wspomniano we wstępie do niniejszego rozdziału, nieliniowy problem własny (7.43) można rozwiązać np. przy zastosowaniu metody kontynuacji [39]. W dalszej części niniejszego podrozdziału opisano dwa sposoby wyznaczenia rozwiązania analizowanego zagadnienia własnego. W pierwszym z nich rozpatrywano zadanie w jego pierwotnej postaci, a w drugim posłużono się metodą podprzestrzennych iteracji umożliwiającą zredukowanie problemu do mniejszego wymiaru.

**7.3.1. Rozwiązanie nieliniowego problemu własnego metodą kontynuacji**

Metoda kontynuacji rozwiązywania nieliniowego problemu własnego opisana została m.in. w pracach [36, 37, 39]. W celu rozwiązania układu równań jednorodnych, opisanego macierzowo przy pomocy wzoru (7.43), wprowadza się tzw. parametr homotopii  $\kappa \in [0, 1]$ . Przez ten parametr przemnaża się składniki, które w zapisie macierzowym równania zawierają zmienną  $s$  w pierwszej potęgze. Wówczas równanie (7.43) zastępuje się następującym:

$$(s^2\mathbf{M} + \kappa s\mathbf{C} + \kappa\mathbf{C}_d(s) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d + \kappa\mathbf{G}_d(s)) \bar{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{0}. \quad (7.45)$$

Wzór (7.45) można przedstawić w krótszej postaci:

$$\mathbf{h}_1(\bar{\mathbf{q}}(s), s) = \mathbf{D}(s)\bar{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{0}, \quad (7.46)$$

gdzie

$$\mathbf{D}(s) = s^2\mathbf{M} + \kappa s\mathbf{C} + \kappa\mathbf{C}_d(s) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d + \kappa\mathbf{G}_d(s). \quad (7.47)$$

Aby elementy wektora  $\bar{\mathbf{q}}_i(s)$ , odpowiadające wartości własnej  $s_i$ , mogły zostać wyznaczone jednoznacznie, wprowadza się dodatkowe równanie normalizujące:

$$h_2(\bar{\mathbf{q}}(s), s) = \frac{1}{2}\bar{\mathbf{q}}^T(s) \frac{\partial \mathbf{D}(s)}{\partial s} \bar{\mathbf{q}}(s) - a, \quad (7.48)$$

gdzie  $a$  jest parametrem, którego wartość należy przyjąć. Ponadto pochodna z wyrażenia określonego wzorem (7.47) względem zmiennej  $s$  ma następującą postać:

$$\frac{\partial \mathbf{D}(s)}{\partial s} = 2s\mathbf{M} + \kappa\mathbf{C} + \kappa \frac{\partial \mathbf{C}_d(s)}{\partial s} + \kappa \frac{\partial \mathbf{G}_d(s)}{\partial s}. \quad (7.49)$$

Można zauważyć, że rozwiązaniu pierwotnego problemu własnego, określonego wzorem (7.43), odpowiada wartość parametru  $\kappa = 1$ .

W zerowym kroku metody kontynuacji należy przyjąć wartość parametru homotopii:  $\kappa_0 = 0$ . Wówczas nieliniowy problem własny (7.45) zostaje zredukowany do uogólnionego problemu własnego wyrażonego wzorem:

$$(s^2\mathbf{M} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d) \bar{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{0}. \quad (7.50)$$

Powyższy problem własny można rozwiązać w programie Octave przy pomocy wbudowanej funkcji „`eig`”. Otrzymuje się wówczas zerowe przybliżenie wartości własnych:  $s_1^{(0)}, s_2^{(0)}, \dots, s_{n_s}^{(0)}$  oraz wektorów własnych:  $\bar{\mathbf{q}}_1^{(0)}, \bar{\mathbf{q}}_2^{(0)}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{n_s}^{(0)}$ . Na podstawie otrzymanego rozwiązania można wyznaczyć wartości parametrów:  $a_1^{(0)}, a_2^{(0)}, \dots, a_{n_s}^{(0)}$  zgodnie ze wzorem:  $a_i^{(0)} = s_i^{(0)} \left( \bar{\mathbf{q}}_i^{(0)} \right)^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{q}}_i^{(0)}$ .

W pierwszym kroku metody kontynuacji określa się przyrost  $\Delta\kappa_1$  wartości parametru homotopii. Wówczas rozwiązania problemu własnego (7.45) poszukuje się, przyjmując parametr  $\kappa_1 = \kappa_0 + \Delta\kappa_1$ . Należy tę wartość podstawić do równań (7.46) oraz (7.48), a następnie rozwiązać układ:

$$\begin{cases} \mathbf{h}_1(\bar{\mathbf{q}}, s) = \mathbf{0}, \\ h_2(\bar{\mathbf{q}}, s) = 0. \end{cases} \quad (7.51)$$

W celu wyznaczenia rozwiązania układu (7.51), przy danej wartości parametru  $\kappa$ , można skorzystać z metody Newtona. Rozwiązuje się wówczas tzw. równanie przyrostowe, które ma postać:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \bar{\mathbf{q}} + \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial s} \delta s = -\mathbf{h}_1, \\ \frac{\partial h_2}{\partial \bar{\mathbf{q}}} \delta \bar{\mathbf{q}} + \frac{\partial h_2}{\partial s} \delta s = -h_2, \end{cases} \quad (7.52)$$

gdzie pochodne cząstkowe oraz prawe strony równań układu należy wyznaczyć dla konkretnie wybranego wektora własnego  $\bar{\mathbf{q}}_i^{(0)}$ , wartości własnej  $s_i^{(0)}$  oraz parametru  $a_i^{(0)}$  z kroku „0”, przy czym  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$  oznacza numer wartości własnej, której przybliżenie jest wyznaczane. Układ (7.52) jest układem algebraicznym dwóch równań z dwoma niewiadomymi przyrostami  $\delta \bar{\mathbf{q}}$  oraz  $\delta s$ . Pochodne cząstkowe występujące w układzie (7.52) wyrażają się poniższymi wzorami:

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \mathbf{D}(s) = s^2 \mathbf{M} + \kappa s \mathbf{C} + \kappa \mathbf{C}_d(s) + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d + \kappa \mathbf{G}_d(s), \quad (7.53)$$

$$\frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial s} = \left( 2s \mathbf{M} + \kappa \mathbf{C} + \kappa \frac{\partial \mathbf{C}_d(s)}{\partial s} + \kappa \frac{\partial \mathbf{G}_d(s)}{\partial s} \right) \bar{\mathbf{q}}, \quad (7.54)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \bar{\mathbf{q}}^T \left( 2s \mathbf{M} + \kappa \mathbf{C} + \kappa \frac{\partial \mathbf{C}_d(s)}{\partial s} + \kappa \frac{\partial \mathbf{G}_d(s)}{\partial s} \right), \quad (7.55)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial s} = \frac{1}{2} \bar{\mathbf{q}}^T \left( 2 \mathbf{M} + \kappa \frac{\partial^2 \mathbf{C}_d(s)}{\partial s^2} + \kappa \frac{\partial^2 \mathbf{G}_d(s)}{\partial s^2} \right) \bar{\mathbf{q}}. \quad (7.56)$$

Pochodne cząstkowe macierzy  $\mathbf{C}_d(s)$  oraz  $\mathbf{G}_d(s)$ , zależnie od przyjętego modelu tłumika, przedstawiają się następująco:

- dla uogólnionego modelu reologicznego:

$$\frac{\partial \mathbf{C}_d(s)}{\partial s} = \frac{\partial C_r(s)}{\partial s} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s}(s c_0) \mathbf{L} = c_0 \mathbf{L}, \quad (7.57)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}_d(s)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 C_r(s)}{\partial s^2} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s}(c_0) \mathbf{L} = \mathbf{0}, \quad (7.58)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_d(s)}{\partial s} = \frac{\partial G_r(s)}{\partial s} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_{j=1}^m \frac{k_j s}{\nu_j + s} \right) \mathbf{L} = \sum_{j=1}^m \frac{k_j \nu_j}{(\nu_j + s)^2} \mathbf{L}, \quad (7.59)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{G}_d(s)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 G_r(s)}{\partial s^2} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \sum_{j=1}^m \frac{k_j \nu_j}{(\nu_j + s)^2} \right) \mathbf{L} = \sum_{j=1}^m \frac{-2k_j \nu_j}{(\nu_j + s)^3} \mathbf{L}, \quad (7.60)$$

• dla modelu ułamkowego:

$$\frac{\partial \mathbf{C}_d(s)}{\partial s} = \frac{\partial C_r(s)}{\partial s} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s}(s^\alpha c_0) \mathbf{L} = \alpha s^{\alpha-1} c_0 \mathbf{L}, \quad (7.61)$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{C}_d(s)}{\partial s^2} = \frac{\partial^2 C_r(s)}{\partial s^2} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s}(\alpha s^{\alpha-1} c_0) \mathbf{L} = \alpha(\alpha-1) s^{\alpha-2} c_0 \mathbf{L}, \quad (7.62)$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}_d(s)}{\partial s} = \frac{\partial G_r(s)}{\partial s} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{k_d s^\alpha}{\nu_d + s^\alpha} \right) \mathbf{L} = \frac{k_d \nu_d \alpha s^{\alpha-1}}{(\nu_d + s^\alpha)^2} \mathbf{L}, \quad (7.63)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{G}_d(s)}{\partial s^2} &= \frac{\partial^2 G_r(s)}{\partial s^2} \mathbf{L} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{k_d \nu_d \alpha s^{\alpha-1}}{(\nu_d + s^\alpha)^2} \right) \mathbf{L} = \\ &= \frac{k_d \nu_d \alpha}{(\nu_d + s^\alpha)^3} [\nu_d(\alpha-1)s^{\alpha-2} - (\alpha+1)s^{2(\alpha-1)}] \mathbf{L}. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Po rozwiązaniu układu równań (7.52) i wyznaczeniu przyrostów  $\delta \bar{\mathbf{q}}^{(1)}$  oraz  $\delta s^{(1)}$  otrzymuje się nowe przybliżenie rozwiązania problemu własnego (7.45) w pierwszym kroku metody kontynuacji, tzn. dla  $\kappa = \kappa_1$  oraz w pierwszym kroku iteracji, tzn. dla  $k = 1$ . To nowe przybliżenie  $i$ -tej wartości własnej oraz  $i$ -tego wektora własnego ma postać:

$$s_i^{(1)} = s_i^{(0)} + \delta s^{(1)}, \quad \bar{\mathbf{q}}_i^{(1)} = \bar{\mathbf{q}}_i^{(0)} + \delta \bar{\mathbf{q}}^{(1)}, \quad (7.65)$$

gdzie w powyższym wzorze indeks dolny informuje o numerze wartości własnej lub wektora własnego, a indeks górny – o numerze iteracji w pierwszym kroku metody kontynuacji. Wartość własną i wektor własny wyrażone wzorem (7.65) podstawia się następnie do układu równań (7.52). Po jego rozwiązaniu otrzymuje się nowe przyrosty  $\delta \bar{\mathbf{q}}^{(2)}$  oraz  $\delta s^{(2)}$ , które pozwalają wyznaczyć przybliżenie  $i$ -tej wartości własnej oraz  $i$ -tego wektora własnego w pierwszym kroku metody kontynuacji, tzn. dla  $\kappa = \kappa_1$  oraz w drugim kroku iteracji, czyli dla  $k = 2$ . Kolejne przybliżenie można zapisać przy pomocy wzorów:

$$s_i^{(2)} = s_i^{(1)} + \delta s^{(2)}, \quad \bar{\mathbf{q}}_i^{(2)} = \bar{\mathbf{q}}_i^{(1)} + \delta \bar{\mathbf{q}}^{(2)}. \quad (7.66)$$

Znając przybliżenie  $i$ -tej wartości własnej oraz  $i$ -tego wektora własnego w pierwszym kroku metody kontynuacji, tzn. dla  $\kappa = \kappa_1$  oraz w  $(k - 1)$ -szym kroku iteracji, z układu równań (7.52) wyznacza się, po podstawieniu tych wielkości, przyrosty  $\delta \bar{\mathbf{q}}^{(k)}$  oraz  $\delta s^{(k)}$ , a następnie nowe przybliżenie wartości i wektora własnego zgodnie ze wzorami:

$$s_i^{(k)} = s_i^{(k-1)} + \delta s^{(k)}, \quad \bar{\mathbf{q}}_i^{(k)} = \bar{\mathbf{q}}_i^{(k-1)} + \delta \bar{\mathbf{q}}^{(k)}. \quad (7.67)$$

Proces iteracyjny jest kontynuowany aż do spełnienia warunków zakończenia wyrażonych poniższymi nierównościami:

$$\delta s^{(k)} < \varepsilon_1 |s_i^{(k)}| \quad \wedge \quad \|\delta \bar{\mathbf{q}}^{(k)}\| < \varepsilon_2 \|\bar{\mathbf{q}}_i^{(k)}\|, \quad (7.68)$$

gdzie  $\varepsilon_1$  oraz  $\varepsilon_2$  oznaczają przyjęte dokładności obliczeń.

W  $l$ -tym kroku metody kontynuacji należy przyjąć przyrost  $\Delta \kappa_l$  parametru homotopii, a rozwiązanie problemu własnego (7.45) poszukuje się dla  $\kappa_l = \kappa_{l-1} + \Delta \kappa_l$ . Wartość własna i wektor własny otrzymane końcowo dla  $(l - 1)$ -szego kroku metody kontynuacji stanowią wartości startowe dla kroku  $l$ -tego, tzn. dla  $\kappa = \kappa_l$  oraz dla pierwszego kroku procesu iteracyjnego, czyli dla  $k = 1$ . Wielkości te podstawia się do układu równań (7.52), z którego wyznaczane są przyrosty wartości i wektora własnego. Na podstawie tych przyrostów określa się wartość własną i wektor własny dla drugiego kroku iteracyjnego, tzn. dla  $k = 2$ . Postępowanie iteracyjne powtarza się przez rozwiązywanie układu równań (7.52) oraz wyznaczanie nowych przybliżeń wartości własnej i wektora własnego według wzoru (7.67) aż do otrzymania pożądanej dokładności obliczeń zgodnie z nierównościami (7.68).

Wyżej opisana procedura jest kontynuowana do momentu osiągnięcia wartości parametru  $\kappa = 1$  i tym samym rozwiązania oryginalnego nieliniowego problemu własnego (7.43). Wtedy uzyskuje się szukaną  $i$ -tą wartość własną  $s_i$  oraz  $i$ -ty wektor własny  $\bar{\mathbf{q}}_i$ . Otrzymana  $i$ -ta wartość własna jest liczbą zespoloną o części rzeczywistej  $\mu_i$  oraz części urojonej  $\eta_i$ . Wówczas częstość drgań własnych  $\omega_i$  oraz bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\gamma_i$  dla  $i$ -tej postaci drgań wyznacza się ze wzorów:

$$\omega_i^2 = \mu_i^2 + \eta_i^2, \quad (7.69)$$

$$\gamma_i = -\frac{\mu_i}{\eta_i}. \quad (7.70)$$

Opisana wyżej metoda kontynuacji umożliwia obliczenie kilku wybranych wartości częstości drgań oraz bezwymiarowych współczynników tłumienia bez konieczności rozwiązywania całego nieliniowego problemu własnego (7.43). Przy pomocy autorskich algorytmów opracowanych w środowisku Octave w niniejszej pracy

wyznaczano częstości drgań własnych płyty wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań oraz odpowiadające im bezwymiarowe współczynniki tłumienia. Użytkownik programu może samodzielnie ustalić pozycję wybranej liczby tłumików lepkosprężystych w węzłach siatki MES. Przy pomocy funkcji zewnętrznych stanowiących integralną część algorytmu wyznacza się macierze występujące w równaniu (7.43). Uogólniony problem własny rozwiązywany jest w kroku „0” metody kontynuacji przy pomocy wbudowanej komendy programu Octave. Następnie autorski algorytm iteracyjny umożliwia wyznaczenie końcowych charakterystyk dynamicznych płyty wyposażonej w więzy lepkosprężyste [86].

### 7.3.2. Rozwiązanie nieliniowego problemu własnego przy użyciu metod podprzestrzennych iteracji oraz kontynuacji

Przedstawiona w niniejszym podrozdziale metoda podprzestrzennych iteracji opisana została m.in. w pracach [6, 41]. Autor pracy [6] wprowadził tą metodę oraz zastosował ją do rozwiązywania liniowych problemów własnych. Z kolei w pozycji [41] możliwości jej użycia zostały rozszerzone na przypadek nieliniowych zagadnień własnych. Metodę podprzestrzennych iteracji wykorzystuje się do rozwiązywania dużych problemów własnych, w przypadkach gdy wyznaczenie wszystkich wartości własnych nie jest konieczne. Umożliwia ona znalezienie pewnej liczby początkowych wartości własnych dla rozważanego problemu. Zakłada się przy tym, że liczba ta jest znacznie mniejsza od łącznej liczby wszystkich rozwiązań, wynikającej z rozmiaru analizowanego zadania.

W dalszej części podrozdziału rozpatrzono modele tłumika, w których element Kelvina zastąpiono elementem sprężystym (rysunki 7.3 oraz 7.5). W takich modelach nieliniowy problem własny (7.43) sprowadza się do postaci:

$$(s^2\mathbf{M} + s\mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d + \mathbf{G}_d(s)) \bar{\mathbf{q}}(s) = \mathbf{0}. \quad (7.71)$$

W powyższym równaniu macierzowym wektor  $\bar{\mathbf{q}}(s)$  oraz macierz zerowa po prawej stronie mają wymiar  $n_s \times 1$ . Z kolei macierze  $\mathbf{M}$ ,  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{K}$ ,  $\mathbf{K}_d$  oraz  $\mathbf{G}_d(s)$  są macierzami kwadratowymi o wymiarze  $n_s \times n_s$ . Równanie to spełnione jest przez pary  $(s_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$  składające się z wartości własnych i odpowiadających im wektorów własnych, przy czym  $i = 1, 2, 3, \dots, n_s$ . Problem własny (7.71) można zapisać w poniższej, równoważnej postaci:

$$\mathbf{M}\mathbf{X}\Lambda^2 + \mathbf{C}\mathbf{X}\Lambda + \mathbf{K}\mathbf{X} + \mathbf{K}_d\mathbf{X} + \sum_{r=1}^{n_d} \mathbf{L}_r\mathbf{X}\Gamma_r(s) = \mathbf{0}, \quad (7.72)$$

gdzie:

$\mathbf{X} = [\bar{\mathbf{q}}_1, \bar{\mathbf{q}}_2, \bar{\mathbf{q}}_3, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{n_s}]$  – macierz o wymiarze  $n_s \times n_s$  zawierająca w kolejnych kolumnach wektory własne stanowiące rozwiązanie problemu (7.71),

$\Lambda = \text{diag}(s_1, s_2, s_3, \dots, s_{n_s})$  – macierz diagonalna o wymiarze  $n_s \times n_s$  zawierająca na głównej przekątnej kolejne wartości własne będące rozwiązaniem problemu (7.71),

$\Gamma_r(\mathbf{s}) = \text{diag}(G_r(s_1), G_r(s_2), G_r(s_3), \dots, G_r(s_{n_s}))$  – macierz diagonalna o wymiarze  $n_s \times n_s$  zawierająca na głównej przekątnej wartości funkcji  $G_r(s)$ , wyrażonej wzorem (7.21) lub (7.22), wyznaczone dla kolejnych wartości własnych stanowiących rozwiązanie problemu (7.71).

W równaniu (7.72) macierz zerowa po prawej stronie posiada wymiar  $n_s \times n_s$ . Różnica między zapisami (7.71) oraz (7.72) polega na tym, że do wzoru (7.71) można podstawić tylko pojedynczą parę  $(s_i, \bar{\mathbf{q}}_i)$ , natomiast równanie (7.72) umożliwia podstawienie wszystkich tych par jednocześnie.

Algorytm metody podprzestrzennych iteracji opisano na podstawie pracy [41]. Na początku obliczeń zakłada się liczbę  $\tilde{m}$  szukanych par wartość własna–wektor własny, przy czym zgodnie ze wstępnym założeniem dla metody zachodzi nierówność:  $\tilde{m} \ll n_s$ .

W zerowym kroku metody należy znaleźć rozwiązanie uogólnionego problemu własnego postaci:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_d - \omega^2 \mathbf{M})\mathbf{x} = \mathbf{0}. \quad (7.73)$$

Wartości i wektory własne stanowiące rozwiązanie powyższego problemu są odpowiednio liczbami i wektorami rzeczywistymi. Można je wyznaczyć, posługując się gotową funkcją dostępną w programie Octave. Należy wybrać  $\tilde{m}$  par  $(\omega_i, \mathbf{x}_i)$  i utworzyć macierze:

$$\Lambda_0 = \text{diag}(i\omega_1, i\omega_2, i\omega_3, \dots, i\omega_{\tilde{m}}), \quad (7.74)$$

$$\mathbf{X}_0 = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \dots, \mathbf{x}_{\tilde{m}}], \quad (7.75)$$

przy czym we wzorze (7.74)  $i$  oznacza jednostkę urojoną, a wartości własne uporządkowane są niemalejąco, tzn.  $\omega_k \leq \omega_l$  dla  $k < l$ . Rozwiązanie (7.74)–(7.75) uogólnionego problemu własnego (7.73) stanowi początkowe przybliżenie zespolonego rozwiązania oryginalnego problemu własnego (7.71), które można oznaczyć jako  $(s_i^{(0)}, \bar{\mathbf{q}}_i^{(0)})$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, \tilde{m}$ .

W  $j$ -tym kroku metody zakłada się, że znane jest rozwiązanie poprzednie, tj. z kroku  $(j-1)$ , które stanowią pary  $(s_i^{(j-1)}, \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)})$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, \tilde{m}$ . Rozwiązanie to można zapisać w postaci macierzy wektorów własnych  $\mathbf{X}_{j-1}$  o wymiarze  $n_s \times \tilde{m}$

oraz diagonalnej macierzy wartości własnych  $\Lambda_{j-1}$  o wymiarze  $\tilde{m} \times \tilde{m}$ . W pierwszym etapie  $j$ -tej pętli iteracyjnej należy wyznaczyć macierz  $\tilde{\mathbf{X}}_j$ , która stanowi rozwiązanie następującego równania macierzowego:

$$(\mathbf{K} + \mathbf{K}_d)\tilde{\mathbf{X}}_j = \mathbf{P}_{j-1}, \quad (7.76)$$

gdzie

$$\mathbf{P}_{j-1} = -\mathbf{M}\mathbf{X}_{j-1}\Lambda_{j-1}^2 - \mathbf{C}\mathbf{X}_{j-1}\Lambda_{j-1} - \sum_{r=1}^{n_d} \mathbf{L}_r \mathbf{X}_{j-1} \Gamma_{r,j-1} (\mathbf{s}^{(j-1)}). \quad (7.77)$$

Macierze  $\tilde{\mathbf{X}}_j$  oraz  $\mathbf{P}_{j-1}$  są macierzami zespolonymi o wymiarze  $n_s \times \tilde{m}$ . Nowe przybliżenie  $i$ -tego wektora własnego stanowiącego rozwiązanie problemu własnego (7.71) wyznacza się ze wzoru:

$$\bar{\mathbf{q}}_i^{(j)} = \tilde{\mathbf{X}}_j \mathbf{z}_i^{(j)}, \quad (7.78)$$

gdzie  $\mathbf{z}_i^{(j)}$  jest nieznanym wektorem współrzędnych Ritza o wymiarze  $\tilde{m} \times 1$ . Po podstawieniu wzoru (7.78) do problemu własnego (7.71), a następnie przemnożeniu obu stron równania lewostronnie przez macierz  $\tilde{\mathbf{X}}_j^H$ , będącą sprzężeniem hermitowskim<sup>4</sup> macierzy  $\tilde{\mathbf{X}}_j$ , otrzymuje się równanie postaci:

$$\tilde{\mathbf{X}}_j^H \left( (s^{(j)})^2 \mathbf{M} + (s^{(j)}) \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d + \mathbf{G}_d (s^{(j)}) \right) \tilde{\mathbf{X}}_j \mathbf{z}_i^{(j)} = \mathbf{0}, \quad (7.79)$$

które można zapisać w krótszej formie:

$$\left( (s^{(j)})^2 \tilde{\mathbf{M}}_j + (s^{(j)}) \tilde{\mathbf{C}}_j + \tilde{\mathbf{K}}_j + \tilde{\mathbf{K}}_{d,j} + \tilde{\mathbf{G}}_{d,j} (s^{(j)}) \right) \mathbf{z}_i^{(j)} = \mathbf{0}, \quad (7.80)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_j &= \tilde{\mathbf{X}}_j^H \mathbf{M} \tilde{\mathbf{X}}_j, \quad \tilde{\mathbf{C}}_j = \tilde{\mathbf{X}}_j^H \mathbf{C} \tilde{\mathbf{X}}_j, \quad \tilde{\mathbf{K}}_j = \tilde{\mathbf{X}}_j^H \mathbf{K} \tilde{\mathbf{X}}_j, \\ \tilde{\mathbf{K}}_{d,j} &= \tilde{\mathbf{X}}_j^H \mathbf{K}_d \tilde{\mathbf{X}}_j, \quad \tilde{\mathbf{G}}_{d,j} (s^{(j)}) = \sum_{r=1}^{n_d} \tilde{\mathbf{X}}_j^H \mathbf{L}_r \tilde{\mathbf{X}}_j G_r (s^{(j)}). \end{aligned} \quad (7.81)$$

Macierze zdefiniowane wzorem (7.81) są macierzami hermitowskimi, tzn. działanie sprzężenia hermitowskiego tych macierzy nie zmienia ich postaci. Wymiar tych macierzy wynosi  $\tilde{m} \times \tilde{m}$ . Problem własny wyrażony wzorem (7.80) to tzw. zredukowany problem własny, który nazywa się również hermitowskim problemem własnym,

<sup>4</sup> „Sprzężeniem hermitowskim macierzy  $\mathbf{A} = [a_{ij}] \in \mathbb{C}^{m \times n}$  jest macierz  $\mathbf{A}^H = [a_{ji}^H] \in \mathbb{C}^{n \times m}$ , której elementy spełniają warunek  $a_{ji}^H = \bar{a}_{ij}$  dla  $i = 1, 2, 3, \dots, m$  oraz  $j = 1, 2, 3, \dots, n$ .” Jest to więc macierz uzyskana przez transpozycję macierzy danej i zamianę elementów na elementy sprzężone (źródło: <https://epodreczniki.open.agh.edu.pl/handbook/1/module/58/reader>, dostęp: 12.06.2025).

z uwagi na występujące w nim macierze hermitowskie. Tak otrzymany nieliniowy problem własny rozwiązuje się np. metodą kontynuacji, opisaną w podrozdziale 7.3.1, co stanowi drugi etap  $j$ -tej pętli iteracyjnej. W wyniku rozwiązania tego problemu otrzymuje się  $\tilde{m}$  wartości własnych:  $s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, s_3^{(j)}, \dots, s_{\tilde{m}}^{(j)}$  stanowiących szukane rozwiązanie oryginalnego nieliniowego problemu własnego (7.71). Można je zapisać w formie macierzy diagonalnej o wymiarze  $\tilde{m} \times \tilde{m}$ :

$$\Lambda_j = \text{diag} \left( s_1^{(j)}, s_2^{(j)}, s_3^{(j)}, \dots, s_{\tilde{m}}^{(j)} \right). \quad (7.82)$$

Ponadto uzyskuje się  $\tilde{m}$  wektorów własnych  $\mathbf{z}_1^{(j)}, \mathbf{z}_2^{(j)}, \mathbf{z}_3^{(j)}, \dots, \mathbf{z}_{\tilde{m}}^{(j)}$ , z których można utworzyć macierz postaci  $\mathbf{Z}_j = \left[ \mathbf{z}_1^{(j)}, \mathbf{z}_2^{(j)}, \mathbf{z}_3^{(j)}, \dots, \mathbf{z}_{\tilde{m}}^{(j)} \right]$  o wymiarze  $\tilde{m} \times \tilde{m}$ . Wówczas nowe przybliżenie wektorów własnych stanowiących rozwiązanie oryginalnego problemu własnego (7.72) wyznacza się ze wzoru:

$$\mathbf{X}_j = \tilde{\mathbf{X}}_j \mathbf{Z}_j, \quad (7.83)$$

przy czym wyżej określona macierz  $\mathbf{X}_j$  zawiera  $\tilde{m}$  szukanych wektorów własnych, a więc jej wymiar wynosi  $n_s \times \tilde{m}$  i można zapisać ją w postaci:

$$\mathbf{X}_j = \left[ \bar{\mathbf{q}}_1^{(j)}, \bar{\mathbf{q}}_2^{(j)}, \bar{\mathbf{q}}_3^{(j)}, \dots, \bar{\mathbf{q}}_{\tilde{m}}^{(j)} \right]. \quad (7.84)$$

Opisaną wyżej procedurę wykonuje się aż do spełnienia warunków zakończenia procesu iteracyjnego, które przybierają postać następujących nierówności:

$$\left| s_i^{(j)} - s_i^{(j-1)} \right| \leq \varepsilon_1 \left| s_i^{(j)} \right|, \quad (7.85)$$

$$\left\| \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)} - \bar{\mathbf{q}}_i^{(j-1)} \right\| \leq \varepsilon_2 \left\| \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)} \right\|, \quad (7.86)$$

gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, \tilde{m}$  oraz  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  oznaczają przyjęte dokładności obliczeń. Aby sprawdzić czy rozwiązanie zredukowanego problemu własnego (7.80) jest rozwiązaniem problemu oryginalnego (7.71), można dodatkowo wyznaczyć tzw. wektor residualny według poniższego wzoru:

$$\mathbf{r}_i^{(j)} = \left( \left( s_i^{(j)} \right)^2 \mathbf{M} + \left( s_i^{(j)} \right) \mathbf{C} + \mathbf{K} + \mathbf{K}_d + \mathbf{G}_d \left( s_i^{(j)} \right) \right) \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)}, \quad (7.87)$$

a następnie sprawdzić warunek:

$$\left\| \mathbf{r}_i^{(j)} \right\| \leq \varepsilon_3 \left\| \mathbf{K} \bar{\mathbf{q}}_i^{(j)} \right\|, \quad (7.88)$$

gdzie  $\varepsilon_3$  oznacza przyjętą dokładność obliczeń.

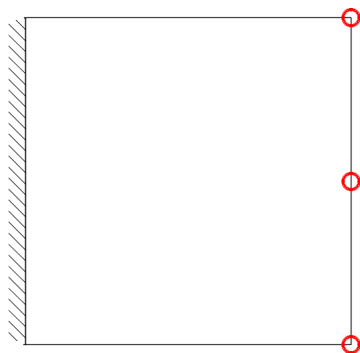
Podsumowując oba przedstawione wyżej sposoby rozwiązywania nieliniowego problemu własnego, można zauważyć, że zastosowanie wyłącznie metody kontynuacji, opisanej w podrozdziale 7.3.1, skutkuje przez cały czas trwania obliczeń wykonywaniem analizy pełnego problemu własnego postaci (7.43). Z kolei użycie metody podprzestrzennych iteracji, przedstawionej w podrozdziale 7.3.2, pozwala duży problem własny zredukować do problemu (7.80) o mniejszym wymiarze zależnym od przyjętej wstępnie liczby początkowych wartości i wektorów własnych, których wyznaczenie jest wystarczające do rozwiązania danego zagadnienia. Podczas stosowania metody podprzestrzennych iteracji metoda kontynuacji stanowi narzędzie służące do rozwiązania zredukowanego problemu, co może być zdecydowanie korzystniejsze w kontekście nakładu obliczeniowego komputera. Użycie wyłącznie metody kontynuacji, podobnie jak w przypadku dołączenia metody podprzestrzennych iteracji, nie wymaga wyznaczenia wszystkich wartości i wektorów własnych występujących w danym zadaniu, ale obliczenia numeryczne bazują przez cały czas ich trwania na problemie o dużym wymiarze. Badania związane z zastosowaniem obu opisanych wyżej metod przedstawiono w kolejnym podrozdziale, w którym zawarto kilka przykładów numerycznych.

#### 7.4. Przykłady analizy dynamicznej płyt z lepkosprężystymi tłumikami drgań

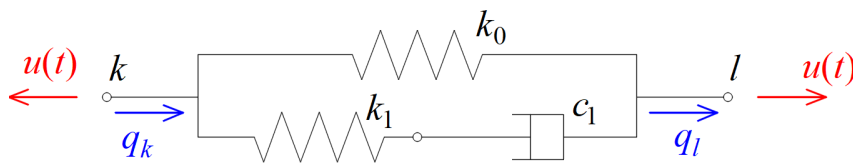
W niniejszym podrozdziale zawarto dwa przykłady numeryczne związane z analizą dynamiczną płyt z elementami pasywnej redukcji drgań. W pierwszym przykładzie analizowano płytę wspornikową wyposażoną w tłumiki lepkosprężyste rozmieszczone przy jej swobodnej krawędzi. W ramach badań wyznaczono częstotliwości drgań własnych oraz bezwymiarowe współczynniki tłumienia dla tej płyty w zależności od temperatury otoczenia tłumików. W zadaniu rozwiązywano pełny nieliniowy problem własny przy zastosowaniu metody kontynuacji. W przykładzie drugim analizie poddano płytę o niesymetrycznym schemacie podparcia. Głównym celem tego przykładu było wykonanie analizy porównawczej związanej z zastosowaniem dwóch sposobów rozwiązywania nieliniowego problemu własnego. W pierwszym z nich użyto wyłącznie metodę kontynuacji, a w drugim dołączono, jako narzędzie pomocnicze, metodę podprzestrzennych iteracji w celu zmniejszenia wymiaru rozważanego zadania.

**Przykład 7.1.** [33] *Badanie zależności charakterystyk dynamicznych od temperatury dla płyty wspornikowej wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań*

Analizie dynamicznej poddano płytę kwadratową utwierdzoną przy jednej krawędzi. Długość każdej z krawędzi płyty wynosi 2,0 m, natomiast jej grubość przyjmuje wartość 0,01 m. Płyta wykonana jest z materiału izotropowego o module Younga  $E = 205$  GPa, współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$  oraz gęstości  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Do płyty zamocowano trzy tłumiki lepkosprężyste w sposób przedstawiony na rysunku 7.6, tzn. jeden tłumik znajduje się na środku swobodnej krawędzi, a dwa pozostałe przy jej końcach. Przyjęto, że tłumiki są opisane uogólnionym modelem Maxwella przedstawionym na rysunku 7.7. Każdy z tłumików składa się z elementu sprężystego określonego stałą  $\bar{k}_0 = 108,56$  N/m oraz z jednego elementu Maxwella charakteryzowanego przez stałe  $\bar{k}_1 = 19968,09$  N/m i  $\bar{c}_1 = 229,63$  Ns/m. Założono, że wstępne wartości parametrów tłumików wyznaczone zostały w temperaturze referencyjnej wynoszącej:  $T_0 = 0,2^\circ\text{C}$ .



Rysunek 7.6. Płyta wspornikowa analizowana w przykładzie 7.1, wyposażona w trzy tłumiki lepkosprężyste przy jej swobodnej krawędzi (oznaczone czerwonymi okręgami)



Rysunek 7.7. Schemat tłumika lepkosprężystego opisanego uogólnionym modelem Maxwella, zawierającego jeden element Maxwella

Wpływ temperatury otoczenia na właściwości tłumików uwzględniono przy zastosowaniu zasady proporcjonalności częstotliwościowo-temperaturowej. Aby obliczyć wartość funkcji przesunięcia określonej wzorem (7.36), przyjęto stałe  $C_1 = 19,5$

oraz  $C_2 = 80,2$ . Wartości tych stałych, jak również parametry tłumików ustalono na podstawie pracy [32].

W celu wyznaczenia charakterystyk dynamicznych badanej płyty rozwiązano nieliniowy problem własny (7.43), w którym pominięto składniki związane z tłumieniem konstrukcyjnym płyty oraz częścią lepką elementu Kelvina (macierze  $\mathbf{C}$  oraz  $\mathbf{C}_d$  przyjęto jako zerowe). Do jego rozwiązania zastosowano algorytm metody kontynuacji opisany w podrozdziale 7.3.1. W użytej procedurze przyjęto pięć kroków metody oraz jednakowe przyrosty parametru homotopii, tzn.  $\Delta\kappa_l = 0,2$  dla  $l = 1, 2, 3, 4, 5$ . Dokładności obliczeń występujące w nierównościach (7.68), decydujące o zakończeniu procesu iteracyjnego w każdym kroku metody, przyjęto równe  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 10^{-3}$ . W tabelach 7.1 oraz 7.2 przedstawiono wartości częstości drgań własnych oraz bezwymiarowych współczynników tłumienia odpowiadające pięciu pierwszym postaciom drgań płyty przy założeniu wartości temperatur  $T \in \{0, 2, 4, 6, 8, 10, 12\}^\circ\text{C}$ .

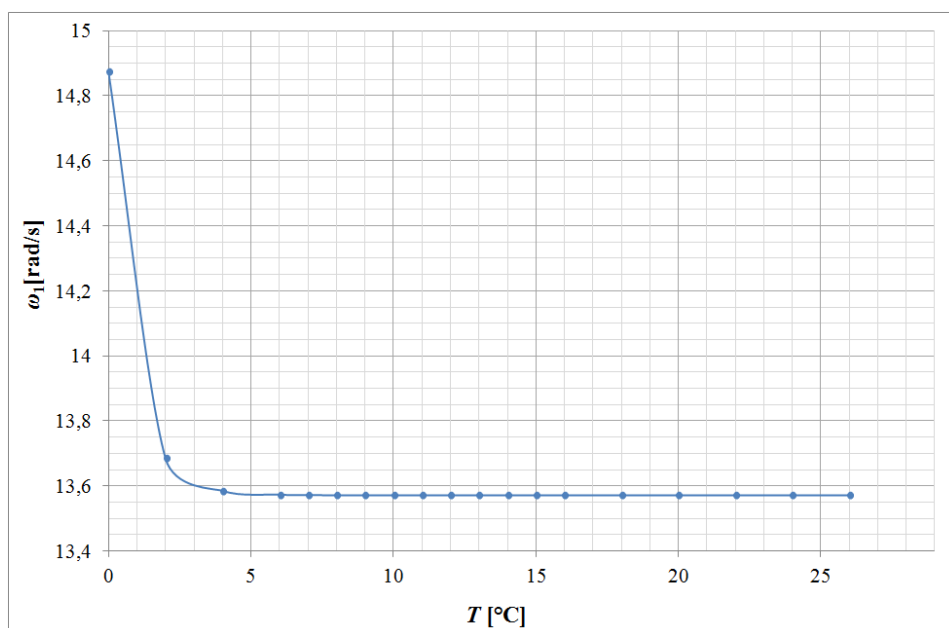
Tabela 7.1. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 7.1 w zależności od temperatury otoczenia [33]

|            | Rozw. MES – częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s] dla siatki $14 \times 14$ |                       |                       |                       |                       |                        |                        |
|------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
|            | $T = 0^\circ\text{C}$                                                             | $T = 2^\circ\text{C}$ | $T = 4^\circ\text{C}$ | $T = 6^\circ\text{C}$ | $T = 8^\circ\text{C}$ | $T = 10^\circ\text{C}$ | $T = 12^\circ\text{C}$ |
| $\omega_1$ | 14,877                                                                            | 13,687                | 13,586                | 13,574                | 13,572                | 13,572                 | 13,572                 |
| $\omega_2$ | 36,577                                                                            | 33,365                | 33,027                | 32,986                | 32,980                | 32,980                 | 32,980                 |
| $\omega_3$ | 84,186                                                                            | 82,753                | 82,442                | 82,400                | 82,395                | 82,394                 | 82,394                 |
| $\omega_4$ | 110,496                                                                           | 106,621               | 105,338               | 105,155               | 105,129               | 105,126                | 105,125                |
| $\omega_5$ | 123,193                                                                           | 120,756               | 119,868               | 119,736               | 119,717               | 119,715                | 119,714                |

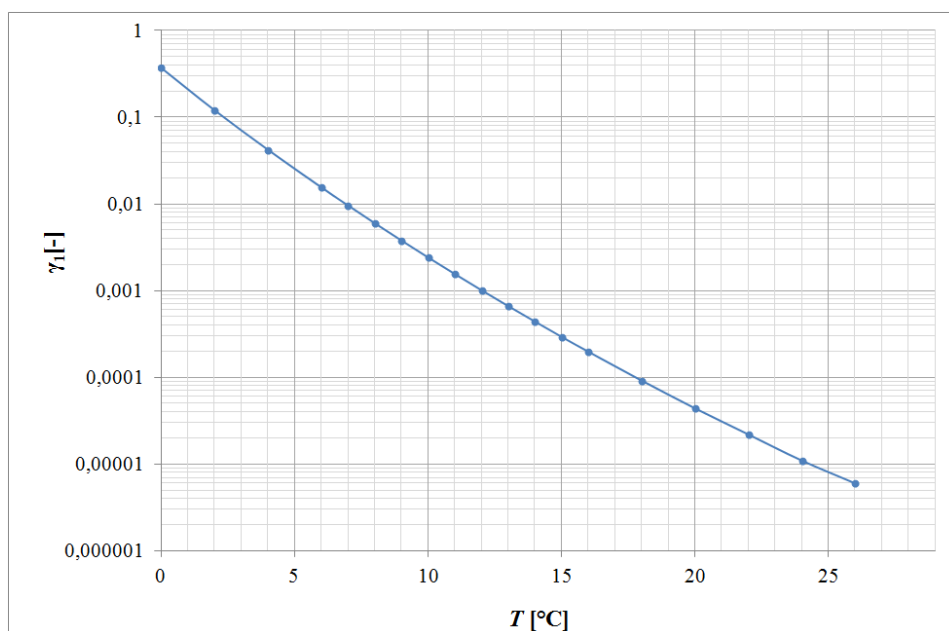
Tabela 7.2. Wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia wyznaczone dla płyty z przykładu 7.1 w zależności od temperatury otoczenia [33]

|            | Rozw. MES – bezwymiarowe współczynniki tłumienia $\gamma_i$ [-] dla siatki $14 \times 14$ |                       |                       |                       |                       |                        |                        |
|------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|
|            | $T = 0^\circ\text{C}$                                                                     | $T = 2^\circ\text{C}$ | $T = 4^\circ\text{C}$ | $T = 6^\circ\text{C}$ | $T = 8^\circ\text{C}$ | $T = 10^\circ\text{C}$ | $T = 12^\circ\text{C}$ |
| $\gamma_1$ | 0,371                                                                                     | 0,120                 | 0,0421                | 0,0156                | 0,00600               | 0,00242                | 0,00101                |
| $\gamma_2$ | 0,171                                                                                     | 0,0691                | 0,0246                | 0,00911               | 0,00352               | 0,00142                | 0,000594               |
| $\gamma_3$ | 0,0200                                                                                    | 0,0126                | 0,00487               | 0,00182               | 0,000703              | 0,000283               | 0,000119               |
| $\gamma_4$ | 0,0312                                                                                    | 0,0286                | 0,0120                | 0,00453               | 0,00175               | 0,000707               | 0,000296               |
| $\gamma_5$ | 0,0174                                                                                    | 0,0165                | 0,00710               | 0,00269               | 0,00104               | 0,000420               | 0,000176               |

Zależność od temperatury wartości częstości drgań własnych oraz bezwymiarowego współczynnika tłumienia dla pierwszej postaci drgań pokazano graficznie na rysunkach 7.8 oraz 7.9.



Rysunek 7.8. Wykres zależności pierwszej częstości drgań własnych od temperatury dla płyty z przykładu 7.1 [33]



Rysunek 7.9. Wykres zależności bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań od temperatury dla płyty z przykładu 7.1 [33]

W tabeli 7.3 zestawiono wartości charakterystyk dynamicznych badanej płyty obliczone dla temperatury  $T = 2^{\circ}\text{C}$  oraz różnych dyskretyzacji powierzchni płyty w celu zbadania zbieżności zastosowanej metody numerycznej.

Tabela 7.3. Charakterystyki dynamiczne płyty z przykładu 7.1 otrzymane dla temperatury  $T = 2^{\circ}\text{C}$  i różnych dyskretyzacji MES [33]

| Nr | Rozw. MES dla $T = 2^{\circ}\text{C}$ i różnych dyskretyzacji płyty |                |                |                                         |                |                |
|----|---------------------------------------------------------------------|----------------|----------------|-----------------------------------------|----------------|----------------|
|    | Częstości drgań $\omega_i$ [rad/s]                                  |                |                | Bezwym. współ. tłumienia $\gamma_i$ [-] |                |                |
|    | $10 \times 10$                                                      | $14 \times 14$ | $20 \times 20$ | $10 \times 10$                          | $14 \times 14$ | $20 \times 20$ |
| 1  | 13,686                                                              | 13,687         | 13,687         | 0,120300                                | 0,120328       | 0,120343       |
| 2  | 33,370                                                              | 33,365         | 33,362         | 0,0691145                               | 0,069103       | 0,069079       |
| 3  | 82,841                                                              | 82,753         | 82,706         | 0,012607                                | 0,012620       | 0,012628       |
| 4  | 106,547                                                             | 106,621        | 106,660        | 0,028478                                | 0,028617       | 0,028690       |
| 5  | 120,770                                                             | 120,756        | 120,745        | 0,016559                                | 0,016512       | 0,016483       |

Na podstawie zamieszczonych wyżej wyników można wyciągnąć wniosek, że wraz ze wzrostem temperatury zarówno częstości drgań własnych, jak i wartości bezwymiarowych współczynników tłumienia maleją i dążą do pewnej stałej wartości. W przypadku pierwszej częstości drgań własnych tą wartością jest częstość drgań charakteryzująca płytę nie posiadającą tłumików, która wynosi 13,419 rad/s. Z kolei wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia wraz ze wzrostem temperatury dążą do zera.

Dla przyjętego w przykładzie modelu tłumika przy temperaturach bliskich temperaturze referencyjnej  $T_0 = 0,2^{\circ}\text{C}$  pierwsza częstość drgań własnych jest o około 10% wyższa w porównaniu z wartością tej częstości w przypadku płyty bez tłumików. W temperaturach wyższych od  $8^{\circ}\text{C}$  pierwsza częstość drgań własnych osiąga wartości porównywalne z uzyskanymi dla płyty bez tłumików<sup>5</sup>, a wartości odpowiadającego bezwymiarowego współczynnika tłumienia są bliskie zeru. Zatem można stwierdzić, że przy takich temperaturach tłumik traci właściwości tłumiące, a płyta zachowuje się tak, jakby nie posiadała więzów lepkosprężystych. Aby możliwa była zmiana charakterystyk dynamicznych badanej płyty np. dla temperatury  $20^{\circ}\text{C}$  bądź wyższej, należałoby zwiększyć liczbę zamocowanych tłumików lub dobrać inne wartości ich parametrów i powtórzyć przeprowadzone badanie.

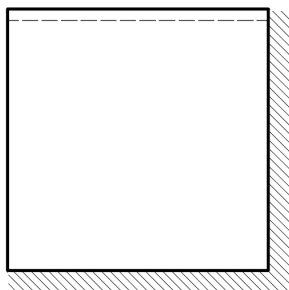
Zestawione w tabeli 7.3 wyniki testów zbieżności pozwalają stwierdzić, że użycie siatki  $14 \times 14$  jest wystarczające pod kątem dokładności wyników, ponieważ różnice

<sup>5</sup> Różnica między wartościami pierwszej częstości drgań otrzymanymi dla płyty z tłumikami w temperaturze  $8^{\circ}\text{C}$  oraz dla płyty bez tłumików wynosi około 1,14%.

procentowe w porównaniu z siatką  $10 \times 10$  nie przekraczają 1% dla wszystkich pięciu częstości drgań własnych. Zastosowanie do badań zbyt gęstych siatek skutkuje znacznym zwiększeniem czasu obliczeniowego.

**Przykład 7.2.** [111] *Analiza dynamiczna płyty wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań opisane modelem ułamkowym przy zastosowaniu metod kontynuacji oraz podprzestrzennych iteracji, z pominięciem wpływu temperatury*

W niniejszym przykładzie rozpatrzono płytę kwadratową o długości boku 2,0 m oraz grubości 0,01 m. Podobnie jak w przykładzie poprzednim przyjęto, że płyta wykonana jest z materiału izotropowego o module Younga  $E = 205$  GPa, współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$  oraz gęstości  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Schemat podparcia płyty pokazano na rysunku 7.10, tzn. płyta jest utwierdzona przy krawędzi dolnej i prawej oraz swobodnie podparta przy krawędzi górnej.

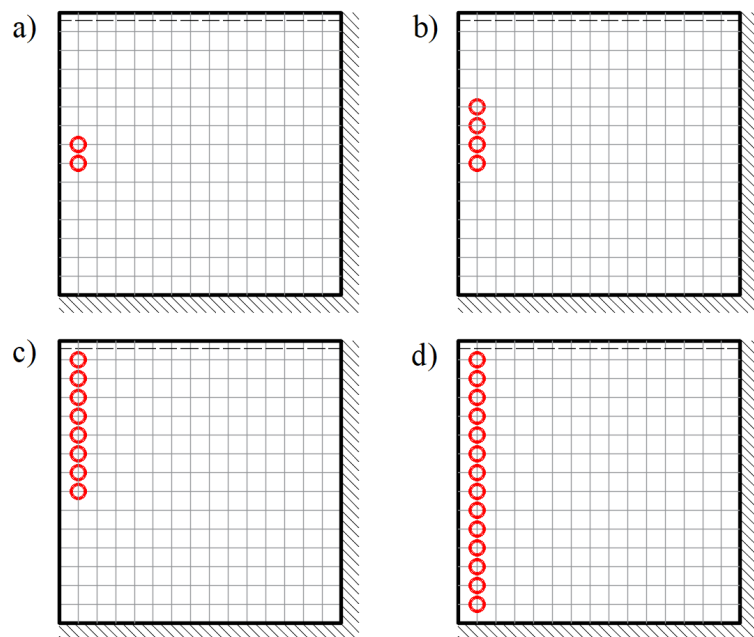


Rysunek 7.10. Schemat podparcia płyty z przykładu 7.2

Przyjęto dyskretyzację płyty w postaci regularnej siatki MES o gęstości  $15 \times 15$ . Do płyty zamocowano: dwa, cztery, siedem oraz czternaście tłumików lepkosprężystych w sposób przedstawiony na rysunku 7.11. Zgodnie z wcześniejszymi założeniami tłumiki mogą być rozmieszczane tylko w węzłach siatki MES. Przyjęto, że są one opisane modelem ułamkowym, którego schemat pokazano na rysunku 7.5. Każdy tłumik składa się z elementu sprężystego określonego stałą  $\bar{k}_0 = 108,56$  N/m oraz z ułamkowego elementu Maxwella określonego stałymi:  $\bar{k}_1 = 19968,09$  N/m,  $\bar{c}_1 = 229,63$  Ns/m oraz  $\alpha = 0,609$ . Wszystkie stałe wyznaczono w temperaturze  $T_0$ .

W tabeli 7.4 podano wartości częstości drgań własnych otrzymane dwoma sposobami rozwiązywania nieliniowego problemu własnego (7.43) – metodą kontynuacji z zachowaniem pierwotnego wymiaru zadania oraz metodą podprzestrzennych iteracji, w której zastosowano metodę kontynuacji przy rozwiązywaniu powstałego zredukowanego problemu własnego. Przyjęto rozmieszczenie tłumików lepkosprężystych zgodnie z rysunkiem 7.11. W rozwiązaniu pominięto wpływ tłumienia konstrukcyjnego płyty, a więc podobnie jak w przykładzie poprzednim  $\mathbf{C}$  oraz  $\mathbf{C}_d$  są macierzami

zerowymi. W rozwiązaniu problemu własnego przy użyciu metody podprzestrzennych iteracji założono liczbę obliczanych wartości własnych  $\tilde{m} = 2$ .



Rysunek 7.11. Sposób rozmieszczenia: dwóch (a), czterech (b), siedmiu (c) oraz czternastu (d) tłumików lepkosprężystych w analizie dynamicznej płyty z przykładu 7.2

Tabela 7.4. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 7.2 wyposażonej w: dwa, cztery, siedem oraz czternaście tłumików rozmieszczonych zgodnie z rysunkami 7.11a)–d) [111]

| Nr         | Częstości drgań $\omega_i$ [rad/s] |                                   |                      |                                   |
|------------|------------------------------------|-----------------------------------|----------------------|-----------------------------------|
|            | metoda kontynuacji                 | metoda podprzestrzennych iteracji | metoda kontynuacji   | metoda podprzestrzennych iteracji |
|            | dwa tłumiki                        |                                   | cztery tłumiki       |                                   |
|            |                                    |                                   |                      |                                   |
| $\omega_1$ | 68,346                             | 68,346                            | 68,915               | 68,915                            |
| $\omega_2$ | 139,105                            | 139,105                           | 139,384              | 139,384                           |
| $\omega_3$ | 200,507                            | –                                 | 200,600              | –                                 |
| $\omega_4$ | 273,305                            | –                                 | 273,366              | –                                 |
|            | siedem tłumików                    |                                   | czternaście tłumików |                                   |
| $\omega_1$ | 69,098                             | 69,098                            | 69,805               | 69,805                            |
| $\omega_2$ | 139,446                            | 139,446                           | 139,866              | 139,866                           |
| $\omega_3$ | 200,969                            | –                                 | 201,594              | –                                 |
| $\omega_4$ | 273,594                            | –                                 | 274,041              | –                                 |

W tabeli 7.5 przedstawiono wartości częstości drgań własnych otrzymane w wyniku rozwiązania pełnego problemu własnego (metoda kontynuacji) oraz zredukowanego problemu własnego (metoda podprzestrzennych iteracji połączona z metodą kontynuacji). Założono cztery tłumiki rozmieszczone zgodnie z rysunkiem 7.11b). W przypadku zredukowanego problemu własnego przyjęto liczbę obliczanych wartości własnych  $\tilde{m} \in \{2, 4, 8, 16\}$ .

Tabela 7.5. Częstości drgań własnych płyty z przykładu 7.2 wyposażonej w cztery tłumiki rozmieszczone zgodnie z rysunkiem 7.11b), obliczone przy różnych rozmiarach  $\tilde{m}$  zredukowanego problemu własnego [111]

| Nr            | Częstości drgań $\omega_i$ [rad/s] |                                                                                                      |                 |                 |                  |
|---------------|------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------|-----------------|------------------|
|               | metoda kontynuacji                 | metoda podprzestrzennych iteracji ( $\tilde{m}$ – liczba wartości własnych obliczanych jednocześnie) |                 |                 |                  |
|               |                                    | $\tilde{m} = 2$                                                                                      | $\tilde{m} = 4$ | $\tilde{m} = 8$ | $\tilde{m} = 16$ |
| $\omega_1$    | 68,9153                            | 68,9153                                                                                              | 68,9153         | 68,9153         | 68,9153          |
| $\omega_2$    | 139,3845                           | 139,3844                                                                                             | 139,3845        | 139,3845        | 139,3845         |
| $\omega_3$    | 200,6002                           |                                                                                                      | 200,6002        | 200,6002        | 200,6002         |
| $\omega_4$    | 273,3658                           |                                                                                                      | 273,3658        | 273,3658        | 273,3658         |
| $\omega_5$    | 286,2479                           |                                                                                                      |                 | 286,2479        | 286,2479         |
| $\omega_6$    | 409,8326                           |                                                                                                      |                 | 409,8326        | 409,8326         |
| $\omega_7$    | 418,2174                           |                                                                                                      |                 | 418,2174        | 418,2174         |
| $\omega_8$    | 481,8350                           |                                                                                                      |                 | 481,8350        | 481,8350         |
| $\omega_9$    | 511,0209                           |                                                                                                      |                 |                 | 511,0209         |
| $\omega_{10}$ | 624,7774                           |                                                                                                      |                 |                 | 624,7774         |
| $\omega_{11}$ | 637,5490                           |                                                                                                      |                 |                 | 637,5490         |
| $\omega_{12}$ | 695,7385                           |                                                                                                      |                 |                 | 695,7385         |
| $\omega_{13}$ | 765,5882                           |                                                                                                      |                 |                 | 765,5882         |
| $\omega_{14}$ | 813,2956                           |                                                                                                      |                 |                 | 813,2956         |
| $\omega_{15}$ | 839,6478                           |                                                                                                      |                 |                 | 839,6478         |
| $\omega_{16}$ | 905,0382                           |                                                                                                      |                 |                 | 905,0382         |

W tabeli 7.6 zestawiono liczbę iteracji potrzebnych do obliczenia  $p$  wartości własnych przy założeniu, że wymiar zredukowanego problemu własnego wynosi  $\tilde{m}$  (zachodzi nierówność  $p \leq \tilde{m}$ ). Przyjęto rozmieszczenie tłumików na powierzchni płyty zgodnie z rysunkiem 7.11b). Przykładowo przy liczbie początkowych wartości własnych, potrzebnych do rozwiązania zadania, wynoszącej  $\tilde{m} = 8$  należy wykonać pięć iteracji w celu wyznaczenia sześciu częstości drgań własnych. Kryterium pozwalają-

cym na przerwanie procesu iteracyjnego jest wtedy spełnienie warunków zakończenia (7.85), (7.86) oraz (7.88) dla każdej z sześciu obliczanych częstości drgań własnych oraz odpowiadających im wektorów własnych.

Tabela 7.6. Liczba iteracji potrzebnych do obliczenia  $p$  częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 7.2 wyposażonej w cztery tłumiki rozmieszczone zgodnie z rysunkiem 7.11b), przy różnych rozmiarach  $\tilde{m}$  zredukowanego problemu własnego [111]

| Liczba obliczanych<br>częstości drgań $p$ | Liczba iteracji |                 |                 |                  |
|-------------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|------------------|
|                                           | $\tilde{m} = 2$ | $\tilde{m} = 4$ | $\tilde{m} = 8$ | $\tilde{m} = 16$ |
| 2                                         | 4               | 4               | 2               | 2                |
| 4                                         |                 | 12              | 3               | 2                |
| 6                                         |                 |                 | 5               | 2                |
| 8                                         |                 |                 | 15              | 2                |
| 16                                        |                 |                 |                 | 4                |

Podsumowując wyniki zestawione w tabelach 7.4–7.5, można stwierdzić, że wartości częstości drgań własnych otrzymane przy rozwiązywaniu pełnego lub zredukowanego problemu własnego (7.43) są identyczne. Redukcja rozmiaru zadania przy pomocy metody podprzestrzennych iteracji umożliwiła wyznaczenie z góry przyjętej liczby początkowych  $\tilde{m}$  częstości i postaci drgań, które następnie porównywano z odpowiednimi wynikami uzyskanymi, stosując wyłącznie metodę kontynuacji. Ponadto z danych zamieszczonych w tabeli 7.4 wynika, że zwiększenie liczby tłumików zamocowanych do płyty z dwóch do czternastu powoduje wzrost pierwszej i drugiej częstości drgań własnych odpowiednio o około 2,13% i 0,55%.

Na podstawie wyników zawartych w tabeli 7.6 można wyciągnąć wniosek, że przy wymiarze zredukowanego problemu własnego wynoszącym  $\tilde{m}$  nakład obliczeniowy znacznie zmniejsza się, obliczając wartości własne w liczbie  $p$  mniejszej od  $\tilde{m}$ . Przyjmując  $p = \tilde{m} = 4$  lub  $p = \tilde{m} = 8$ , liczba niezbędnych iteracji wzrasta trzykrotnie w porównaniu z sytuacją, gdy  $p = \tilde{m} - 2$ . Z kolei dla  $p = \tilde{m} = 16$  można zaobserwować dwukrotny wzrost liczby iteracji w odniesieniu do przypadku, gdy  $p = \tilde{m}/2$ .

Przy zastosowaniu metody podprzestrzennych iteracji konieczne jest wielokrotne rozwiązywanie nieliniowego problemu własnego w każdej iteracji obliczeń. Jednak wymiar macierzy wchodzących w skład tego problemu jest zredukowany w zależności od przyjętej liczby  $\tilde{m}$ , a zatem nakład obliczeniowy jest znacznie mniejszy w porównaniu z przypadkiem, gdy rozwiązywany jest problem własny z macierzami pełnego wymiaru.



## 8. Optymalizacja lokalizacji tłumików na powierzchni płyty

W poprzednim rozdziale skupiono się głównie na kwestii analizy dynamicznej prostokątnych płyt cienkich wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań. Niniejszy rozdział stanowi kontynuację tego zagadnienia, przy czym rozważono w nim zagadnienie optymalnego rozmieszczenia ustalonej liczby tłumików na powierzchni płyty. Jako kryterium doboru optymalnej lokalizacji przyjęto maksymalizację efektu tłumienia wybranej postaci drgań.

W niniejszej pracy zagadnienie wyznaczania optymalnego rozmieszczenia ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych rozpatrzono przy użyciu metaheurystycznego algorytmu optymalizacyjnego znanego pod nazwą metody roju cząstek (ang. *Particle Swarm Optimization Method*, PSO). Algorytmy tego typu można zastosować do rozwiązywania dowolnych problemów obliczeniowych. Umożliwiają one znalezienie przybliżonego optymalnego rozwiązania, a ich stosowanie jest szczególnie wskazane w przypadkach, gdy uzyskanie rozwiązania dokładnego wymagałoby zbyt wysokiego kosztu obliczeniowego [112].

Algorytm optymalizacji rojem cząstek (PSO) zaproponowali w 1995 roku Kennedy i Eberhart w pracy [64]. Zgodnie z [113] jest to „stochastyczny algorytm obliczeniowy naśladujący zachowanie przemieszczającego się stada ptaków. W celu znalezienia pożywienia każdy osobnik stada przemieszcza się z prędkością określoną na podstawie swoich własnych najlepszych poprzednich doświadczeń oraz najlepszych doświadczeń pozostałych osobników stada. Jednocześnie prędkości poruszania się dobierane są tak, żeby zachowany był dystans między poszczególnymi osobnikami”.

W pierwszej części rozdziału przedstawiono podstawy teoretyczne algorytmu PSO w odniesieniu do zagadnienia wyznaczania optymalnej lokalizacji tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty. Następnie zamieszczono przykłady numeryczne, w których analizowano płyty prostokątne o przyjętych z góry warunkach podparcia i liczbie tłumików na powierzchni. Wykorzystując wcześniej omówione zasady wyznaczania charakterystyk dynamicznych płyt z tłumikami przy użyciu MES (rozdział 7), w przykładach przeprowadzono badania związane z optymalizacją rozmieszczenia tłumików.

### 8.1. Podstawy teoretyczne metody PSO w zadaniu optymalizacji lokalizacji tłumików

W algorytmie PSO kluczową kwestią jest przyjęcie zbioru potencjalnych rozwiązań danego problemu. Zbiór taki nazywa się rojem, a pojedyncze rozwiązanie cząstką. Zatem przyjęty zbiór rozwiązań to rój cząstek. Niech  $n_d$  oznacza liczbę tłumików, które należy zamocować do powierzchni płyty. Założono, że tłumiki rozmieszczone są w sposób dyskretny, tzn. jedynie w węzłach wewnętrznych wcześniej zdefiniowanej siatki MES. Zatem każde określone w ten sposób położenie  $n_d$  tłumików stanowi potencjalne rozwiązanie zadania optymalizacyjnego i można je potraktować jako pojedynczą cząstkę roju. Sumaryczną liczbę cząstek  $n_p$  wchodzących w skład roju należy przyjąć jako wielkość daną do rozwiązywanego zadania. Z kolei zbiór  $n_p$  potencjalnych położení  $n_d$  tłumików stanowi tzw. otoczenie lub sąsiedztwo. Zatem każdej cząstce roju przyporządkowana jest pewna grupa innych cząstek, które stanowią jej sąsiadów. Liczbę otoczeń  $n_s$  również należy ustalić na początku zadania.

Każdą  $i$ -tą cząstkę roju ( $i = 1, 2, 3, \dots, n_p$ ), a więc zbiór  $n_d$  tłumików można opisać przy pomocy dwóch wektorów:

- wektor położenia

$$\mathbf{X}_i = [x_{i,1}, y_{i,1}, x_{i,2}, y_{i,2}, x_{i,3}, y_{i,3}, \dots, x_{i,n_d}, y_{i,n_d}], \quad (8.1)$$

- wektor prędkości

$$\mathbf{V}_i = [v_{x_{i,1}}, v_{y_{i,1}}, v_{x_{i,2}}, v_{y_{i,2}}, v_{x_{i,3}}, v_{y_{i,3}}, \dots, v_{x_{i,n_d}}, v_{y_{i,n_d}}], \quad (8.2)$$

gdzie każdy z powyższych wektorów składa się z  $2n_d$  współrzędnych. Para współrzędnych  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  oznacza położenie  $j$ -tego tłumika ( $j = 1, 2, 3, \dots, n_d$ ) wchodzącego w skład  $i$ -tej cząstki roju w globalnym układzie współrzędnych  $xOy$ , którego początek znajduje się w lewym dolnym narożu rozpatrywanej płyty. Z kolei para  $(v_{x_{i,j}}, v_{y_{i,j}})$  zawiera składowe wektora prędkości związanego z  $j$ -tym tłumikiem w  $i$ -tej cząstce roju. Zatem rozwiązanie problemu optymalizacyjnego dotyczy  $2n_d$ -wymiarowej przestrzeni.

W pierwszym etapie zadania optymalizacyjnego należy przyjąć liczbę otoczeń  $n_s$ , liczbę cząstek roju  $n_p$  w każdym otoczeniu oraz liczbę tłumików  $n_d$  stanowiących pojedynczą cząstkę roju. Poszukuje się optymalnego położenia zbioru  $n_d$  tłumików w węzłach wewnętrznych siatki MES dyskretyzującej powierzchnię płyty. Zatem każdy zbiór  $n_d$  punktów wybranych spośród wszystkich węzłów wewnętrznych siat-

ki MES wchodzi w skład przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań problemu. Proces poszukiwania rozwiązania optymalnego przebiega w sposób iteracyjny [113].

W kroku zerowym procesu iteracyjnego metody PSO wybiera się losowo w każdym z  $n_s$  otoczeń  $n_p$  potencjalnych rozwiązań problemu. Przyjęto dyskretyzację powierzchni badanej płyty przy pomocy siatki MES utworzonej przez  $m \times n$  jednakowych elementów skończonych o wymiarach  $h \times k$ . Numerację elementów i węzłów siatki MES ustalono zgodnie z rysunkiem 3.3. W celu określenia przestrzeni dopuszczalnych rozwiązań utworzono w środowisku Octave macierz pomocniczą o wymiarach  $3 \times (n-1)(m-1)$ , która w pierwszym wierszu zawiera numery węzłów wewnętrznych siatki MES, idąc kolejno poziomami od dołu do góry, a w każdym poziomie od strony lewej do prawej. Numeracja węzłów siatki na poziomie  $i$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, n-1$ , zawiera wartości:  $im+i+2, im+i+3, im+i+4, \dots, im+i+m$ . W drugim oraz trzecim wierszu tej macierzy występują współrzędne danego węzła, odpowiednio względem osi  $x$  oraz  $y$  globalnego układu współrzędnych. Macierz wygenerowano pod zmienną „XX” według poniższego algorytmu:

```
XX=zeros(3,(n-1)(m-1)); % zarezerwowanie pamięci na macierz
% pętla po kolejnych poziomach węzłów wewnętrznych siatki MES
for i=1:n-1
    % 1. wiersz macierzy XX - numery węzłów siatki na poziomie "i"
    XX(1,(i-1)*m+2-i:i*(m-1))=i*m+i+2:i*m+m+i;
    % 2. wiersz macierzy - współrzędne "x" węzłów
    XX(2,(i-1)*m+2-i:i*(m-1))=h:h:(m-1)*h;
    % 3. wiersz macierzy - współrzędne "y" węzłów
    XX(3,(i-1)*m+2-i:i*(m-1))=i*k;
endfor
```

Struktura wyżej opisanej macierzy jest następująca:

$$\begin{bmatrix} m+3 & m+4 & m+5 & \cdots & m+m+1 & 2m+4 & 2m+5 & \cdots & 2m+m+2 & \cdots \\ h & 2h & 3h & \cdots & (m-1)h & h & 2h & \cdots & (m-1)h & \cdots \\ k & k & k & \cdots & k & 2k & 2k & \cdots & 2k & \cdots \\ \cdots & (n-1)m+n+1 & (n-1)m+n+2 & \cdots & (n-1)m+m+n-1 & & & & & \\ \cdots & h & 2h & \cdots & (m-1)h & & & & & \\ \cdots & (n-1)k & (n-1)k & \cdots & (n-1)k & & & & & \end{bmatrix}. \quad (8.3)$$

W następnym etapie procedury obliczeniowej wyznacza się macierze o wymiarze  $n_d \times n_p$  zawierające w kolejnych kolumnach  $n_d$ -elementowe ciągi losowo wybranych

liczb całkowitych ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, (n-1)(m-1)\}$ . Liczba macierzy jest równa przyjętej liczbie otoczeń. Każdą taką macierz można wygenerować przy pomocy poniższego polecenia, posługując się generatorem całkowitych liczb losowych „randi”, dostępnym w środowisku Octave:

```
% utworzenie macierzy o wymiarze n_d x n_p zawierającej losowe liczby
% całkowite z przedziału {1,2,3,...,(n-1)(m-1)}
randi((n-1)*(m-1),n_d,n_p);
```

Na podstawie danych liczbowych występujących w wyżej utworzonych macierzach losowych pobierane są z macierzy pomocniczej (8.3) informacje<sup>1</sup> o odpowiadających numerach węzłów siatki MES i współrzędnych  $x$  oraz  $y$ . W ten sposób generowany jest ciąg tzw. macierzy otoczeniowych  $\{\mathbf{Ot}\}_l$  o numerach  $l \in \{1, 2, 3, \dots, n_s\}$ . Wymiar każdej z tych macierzy wynosi  $3n_d \times n_p$ , a  $i$ -ta kolumna ( $i = 1, 2, 3, \dots, n_p$ ) odpowiada  $i$ -tej części części roju oraz posiada następującą strukturę<sup>2</sup>:

$$\{\mathbf{Ot}(:, i)\}_l = \begin{bmatrix} \text{nr węzła MES dla 1 tłumika w } i\text{-tej części} \\ x_{i,1} \\ y_{i,1} \\ \text{nr węzła MES dla 2 tłumika w } i\text{-tej części} \\ x_{i,2} \\ y_{i,2} \\ \text{nr węzła MES dla 3 tłumika w } i\text{-tej części} \\ x_{i,3} \\ y_{i,3} \\ \vdots \\ \text{nr węzła MES dla ostatniego tłumika w } i\text{-tej części} \\ x_{i,n_d} \\ y_{i,n_d} \end{bmatrix}. \quad (8.4)$$

W sposób analogiczny zapisywane są w algorytmie wektory prędkości cząstek roju przy użyciu ciągu macierzy  $\{\mathbf{Vt}\}_l$ . Początkowe prędkości wszystkich cząstek przyjmowane są jako zerowe. Na zakończenie zerowego kroku algorytmu PSO wyznacza się wartości funkcji celu dla położenia  $n_d$  tłumików określonych w kolumnach (8.4)

<sup>1</sup> Każda wygenerowana losowo liczba całkowita odpowiada numerowi kolumny macierzy (8.3), a więc konkretnemu węzłowi siatki MES.

<sup>2</sup> Oznaczenie  $\mathbf{Ot}(:, i)$  dotyczy  $i$ -tej kolumny macierzy  $\mathbf{Ot}$ . W ten sposób w niniejszym rozdziale odnoszono się do wskazania konkretnej kolumny w danej macierzy.

macierzy otoczeniowych. Wartości te zapisywane są jako dodatkowy wiersz w macierzach  $\{\mathbf{Ot}\}_t$ . Jako funkcję celu przyjęto bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\gamma_1$  pierwszej postaci drgań, który oblicza się zgodnie ze wzorem (7.70) przedstawionym w podrozdziale 7.3.1. W każdym z otoczeń zapamiętywane jest najlepsze położenie poszczególnych cząstek oraz najkorzystniejsza lokalizacja cząstki w zakresie danego otoczenia. W zerowym kroku każde z wyznaczonych wstępnie położen cząstek jest traktowane jako najlepsze. Natomiast kolumna macierzy  $\{\mathbf{Ot}\}_t$ , dla której otrzymano największą wartość współczynnika  $\gamma_1$  zawiera informacje o najlepszym położeniu cząstki roju w rozpatrywanym otoczeniu.

Kolejne etapy procesu iteracyjnego są przyjmowane jako chwile umownego czasu. Krok zerowy rozpoczyna się w chwili  $t = 0$ , a każdy kolejny krok jest przesunięty w czasie w odniesieniu do kroku poprzedniego o przyrost  $\Delta t$ , którego wartość należy założyć. Przeważnie przyjmuje się  $\Delta t = 1$ . Zgodnie z [114] położenie  $i$ -tej cząstki roju w  $(t + 1)$ -szym kroku czasowym określone jest wzorem:

$$\mathbf{X}_i^{(t+1)} = \mathbf{X}_i^{(t)} + \mathbf{V}_i^{(t+1)} \Delta t, \quad (8.5)$$

gdzie  $\mathbf{V}_i^{(t+1)}$  oznacza prędkość  $i$ -tej cząstki w  $(t + 1)$ -szym kroku czasowym, którą wyznacza się ze wzoru:

$$\mathbf{V}_i^{(t+1)} = w \mathbf{V}_i^{(t)} + c_1 \mathbf{L}_{1,i}^{(t+1)} \frac{\mathbf{p}_i^{(t)} - \mathbf{X}_i^{(t)}}{\Delta t} + c_2 \mathbf{L}_{2,i}^{(t+1)} \frac{\mathbf{p}_g^{(t)} - \mathbf{X}_i^{(t)}}{\Delta t}. \quad (8.6)$$

We wzorze (8.6) przyjęto następujące oznaczenia na podstawie [65, 113, 114]:

- $\mathbf{L}_{1,i}^{(t+1)}, \mathbf{L}_{2,i}^{(t+1)}$  – macierze diagonalne o wymiarze  $2n_d \times 2n_d$ , zmieniające się w każdym kroku procesu iteracyjnego, zawierające na przekątnej głównej liczby losowe z przedziału  $[0, 1]$ ,
- $c_1, c_2$  – współczynniki uczenia (kognitywny i socjalny), tzn. współczynniki dążenia do najkorzystniejszego odpowiednio lokalnego i globalnego rozwiązania,
- $w$  – waga inercji lub miara bezwładności ruchu cząstki wpływająca bezpośrednio na bieżącą prędkość opartą na historii wcześniejszych prędkości,
- $\mathbf{p}_i^{(t)}$  – najlepsze położenie  $i$ -tej cząstki roju spośród wszystkich wcześniejszych chwil czasowych:  $0, 1, 2, \dots, t$ , odpowiadające największej wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\gamma_1$  pierwszej postaci drgań,
- $\mathbf{p}_g^{(t)}$  – najlepsza globalna pozycja zbioru  $n_d$  tłumików w zakresie całego roju w rozpatrywanym otoczeniu, wybrana spośród wszystkich wcześniejszych chwil czasowych:  $0, 1, 2, \dots, t$ .

Ze wzorów (8.5) oraz (8.6) wynika, że w kolejnych krokach czasowych procedury optymalizacyjnej każda cząstka z rozpatrywanego otoczenia przemieszcza się w kierunku nowego, lepszego położenia, któremu odpowiada większa wartość funkcji celu. W  $(t + 1)$ -szym kroku iteracji nowe położenie cząstki  $\mathbf{X}_i^{(t+1)}$  ustalane jest na podstawie jej poprzedniego położenia  $\mathbf{X}_i^{(t)}$  i poprzedniej prędkości  $\mathbf{V}_i^{(t)}$ , a także jej najlepszej znalezionej do tej pory pozycji  $\mathbf{p}_i^{(t)}$  oraz najlepszej dotychczasowej globalnej pozycji  $\mathbf{p}_g^{(t)}$  w zakresie całego roju [113, 114].

Dobór wartości współczynników:  $c_1, c_2, w$  ma istotne znaczenie w kwestii efektywności metody PSO. Przy ich pomocy można modyfikować działanie algorytmu. Wartości tych parametrów wpływają na zachowanie się poszczególnych cząstek roju, wielkość przestrzeni przeszukiwanej przez algorytm oraz czas zbieżności cząstek do optymalnego rozwiązania. Współczynniki uczenia  $c_1$  oraz  $c_2$  wskazują, w jak dużym stopniu kolejne położenie rozpatrywanej cząstki zależy od niej samej lub od całego roju. Im większa wartość współczynnika kognitywnego  $c_1$ , tym większa jest tendencja cząstki do oscylacji wokół swojej najlepszej pozycji. Z kolei wraz ze wzrostem wartości współczynnika socjalnego  $c_2$  cząstki są bardziej skłonne do grupowania się wokół najlepszego globalnego rozwiązania. Waga inercji  $w$  wpływa na zdolność cząstek do zachowania poprzedniej prędkości. Duże wartości tego współczynnika pozwalają szerzej aktualizować prędkości i tym samym przeszukiwać nowe rejony przestrzeni rozwiązań. Natomiast małe wartości powodują, że aktualizacja prędkości koncentruje się w najbliższych punktach przestrzeni [65, 112]. Zgodnie z pracą [65] wartości parametrów  $c_1, c_2$  oraz  $w$  powinny spełniać poniższe warunki:

$$0 < c_1 + c_2 < 4, \quad (8.7)$$

$$\frac{c_1 + c_2}{2} - 1 < w < 1. \quad (8.8)$$

W badaniach prowadzonych w niniejszej pracy nie nakłada się żadnych dodatkowych ograniczeń na funkcję celu, którą stanowi bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań. Rozwiązanie zadania optymalizacyjnego polega na znalezieniu współrzędnych położenia zbioru  $n_d$  tłumików, dla którego funkcja celu osiąga maksimum. Współrzędne otrzymane bezpośrednio w wyniku zastosowania metody PSO należy zmodyfikować, biorąc pod uwagę ograniczenie, iż tłumiki mogą być rozmieszczane wyłącznie w węzłach wewnętrznych siatki MES i nie powinny znaleźć się poza obrębem płyty. Ponadto wyklucza się przypadek końcowego położenia dwóch różnych tłumików wchodzących w skład tej samej cząstki roju w jednym węźle siatki MES.

W zadaniu optymalizacyjnym zastosowano dwa kryteria zakończenia procesu iteracyjnego. Zgodnie z pierwszym kryterium najlepsze globalne położenie cząstki w rozpatrywanym roju w pięciu kolejnych iteracjach nie powinno ulec zmianie. Wówczas zakłada się, że to położenie jest szukaną optymalną lokalizacją. Drugie kryterium nawiązuje do liczby iteracji i zgodnie z nim nie może ona przekroczyć pewnej z góry ustalonej wartości [76].

Algorytm wyznaczania optymalnego położenia ustalonej liczby tłumików na powierzchni płyty w ujęciu metody PSO można przedstawić w niżej opisanych etapach:

1. przyjęcie danych wejściowych dotyczących płyty oraz jej dyskretyzacji MES:
  - a) wymiary geometryczne płyty (długość, szerokość, grubość):  $A \times B \times H$  [m],
  - b) warunki podparcia płyty na każdej z krawędzi<sup>3</sup>,
  - c) stałe materiałowe płyty:
    - współczynnik Poissona:  $\nu$  [-],
    - gęstość objętościowa:  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>],
    - moduł Younga:  $E$  [Pa],
  - d) gęstość regularnej siatki MES:  $m \times n$ ,
2. utworzenie macierzy pomocniczej o wymiarach  $3 \times (m - 1)(n - 1)$  zawierającej numery węzłów wewnętrznych siatki MES, według wzoru (8.3), przy założeniu dyskretyzacji płyty z użyciem jednakowych elementów skończonych o wymiarach  $h \times k$ , gdzie  $h = A/m$  oraz  $k = B/n$ ,
3. wyznaczenie globalnej macierzy sztywności  $\mathbf{K}$  oraz globalnej macierzy bezwładności  $\mathbf{M}$  płyty z uwzględnieniem warunków brzegowych, zgodnie z zasadami przedstawionymi w podrozdziałach 3.2.1 i 4.1,
4. wyznaczenie macierzy tłumienia konstrukcyjnego  $\mathbf{C}$  płyty<sup>4</sup>, przy założeniu modelu tłumienia proporcjonalnego, jako odpowiednią kombinację liniową macierzy  $\mathbf{K}$  i  $\mathbf{M}$  według wzoru [30]:

$$\mathbf{C} = \frac{2\gamma_1\omega_1\omega_5}{\omega_1 + \omega_5} \mathbf{M} + \frac{2\gamma_1}{\omega_1 + \omega_5} \mathbf{K}, \quad (8.9)$$

gdzie  $\gamma_1$  – bezwymiarowy współczynnik tłumienia odpowiadający pierwszej postaci drgań własnych płyty oraz  $\omega_1$ ,  $\omega_5$  – odpowiednio pierwsza i piąta<sup>5</sup> częstość drgań własnych płyty,

<sup>3</sup> Przyjęto, że krawędź płyty może być swobodna, swobodnie podparta lub utwierdzona.

<sup>4</sup> Warunki brzegowe w macierzy  $\mathbf{C}$  należy uwzględnić w sposób analogiczny jak w przypadku macierzy bezwładności  $\mathbf{M}$ .

<sup>5</sup> Piątą częstość drgań własnych przyjęto jako ostatnią mającą istotny udział w drganiach konstrukcji.

5. przyjęcie danych wejściowych dotyczących tłumików lepkosprężystych:
  - a) liczba tłumików rozmieszczanych na powierzchni płyty:  $n_d$ ,
  - b) model tłumików na podstawie podrozdziału 7.1 i związane z nim wartości parametrów:  $k_0, c_0, k_j, c_j, \alpha$ ,
6. przyjęcie danych wejściowych do algorytmu PSO:
  - a) liczba otoczeń zawierających niezależne od siebie roje cząstek:  $n_s$ ,
  - b) liczba cząstek roju w każdym otoczeniu:  $n_p$ ,
  - c) parametry:  $c_1, c_2, w$  występujące we wzorach (8.5) oraz (8.6), spełniające warunki (8.7) oraz (8.8),
  - d) przyrost czasowy:  $\Delta t$ ,
  - e) maksymalna liczba iteracji  $n_{iter}$  w procedurze PSO,
  - f) funkcja celu – bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\gamma_1$ ,
7. wykonanie kroku zerowego algorytmu PSO:
  - a) wygenerowanie  $n_s$  macierzy losowych o wymiarach  $n_d \times n_p$  zawierających liczby całkowite ze zbioru  $\{1, 2, 3, \dots, (m-1)(n-1)\}$ ,
  - b) wygenerowanie, przy wykorzystaniu macierzy utworzonych w p. 2 oraz 7a),  $n_s$  macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_l$  ( $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ) o wymiarach  $3n_d \times n_p$  zawierających w kolejnych kolumnach informacje o współrzędnych wektora (8.1), a więc o początkowym położeniu poszczególnych cząstek roju (zbiorów  $n_d$  tłumików) w  $l$ -tym otoczeniu<sup>6</sup>,
  - c) wygenerowanie  $n_s$  macierzy  $\{\mathbf{Vt}^{(0)}\}_l$  ( $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ) o wymiarach  $3n_d \times n_p$  zawierających w kolejnych kolumnach informacje o współrzędnych wektora (8.2), a więc o początkowych prędkościach poszczególnych cząstek roju w  $l$ -tym otoczeniu<sup>7</sup>,
  - d) obliczenie wartości funkcji celu  $\gamma_1^{(0)}$  dla kolejnych cząstek roju na podstawie ich pozycji zapisanych w kolumnach macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_l$  oraz dołączenie wyznaczonych wartości jako końcowych elementów tych kolumn,
  - e) wybranie z każdej macierzy ciągu  $\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_l$  kolumn zawierających największe wartości funkcji celu oraz zapisanie tych kolumn jako ciągu wektorów  $\{\mathbf{Gt}^{(0)}\}_l$ , gdzie  $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,
  - f) wyznaczenie ciągu macierzy  $\{\mathbf{Pt}^{(0)}\}_l$  zawierających w kolejnych kolumnach najlepsze położenia poszczególnych cząstek roju w każdym z otoczeń<sup>8</sup> o numerze  $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ ,

<sup>6</sup> Pojedyncza kolumna każdej z macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_l$  przyjmuje postać (8.4).

<sup>7</sup> Przeważnie prędkości początkowe przyjmuje się jako zerowe.

<sup>8</sup> W kroku zerowym algorytmu zachodzi równość  $\{\mathbf{Pt}^{(0)}\}_l = \{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_l$ .

8. wykonanie kroku  $(t + 1)$ -szego algorytmu PSO ( $t = 0, 1, 2, \dots, n_{iter} - 1$ ):
- wybranie  $l$ -tego otoczenia zawierającego rój cząstek,
  - wybranie  $i$ -tej cząstki wchodzącej w skład roju w  $l$ -tym otoczeniu,
  - wyznaczenie diagonalnych macierzy  $\mathbf{L}_{1,i}^{(t+1)}$  oraz  $\mathbf{L}_{2,i}^{(t+1)}$  zawierających na przekątnej głównej liczby losowe z przedziału  $[0, 1]$ ,
  - wyznaczenie, przy pomocy wzoru (8.6), aktualnych składowych wektora prędkości  $\mathbf{V}_i^{(t+1)}$  na podstawie:
    - składowych wektora  $\mathbf{V}_i^{(t)}$  zawartych w  $i$ -tej kolumnie macierzy  $\{\mathbf{Vt}^{(t)}\}_l$ ,
    - składowych wektora  $\mathbf{p}_i^{(t)}$  zawartych w  $i$ -tej kolumnie macierzy  $\{\mathbf{Pt}^{(t)}\}_l$ ,
    - składowych wektora  $\mathbf{p}_g^{(t)}$  zawartych w wektorze  $\{\mathbf{Gt}^{(t)}\}_l$
 oraz zastąpienie macierzy  $\{\mathbf{Vt}^{(t)}\}_l$  macierzą  $\{\mathbf{Vt}^{(t+1)}\}_l$  zawierającą w  $i$ -tej kolumnie elementy wektora  $\mathbf{V}_i^{(t+1)}$ ,
  - wyznaczenie, przy pomocy wzoru (8.5), aktualnych składowych wektora położenia cząstki  $\mathbf{X}_i^{(t+1)}$  na podstawie:
    - składowych wektora  $\mathbf{X}_i^{(t)}$  zawartych w  $i$ -tej kolumnie macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(t)}\}_l$ ,
    - składowych wektora  $\mathbf{V}_i^{(t+1)}$  zawartych w  $i$ -tej kolumnie macierzy  $\{\mathbf{Vt}^{(t+1)}\}_l$
 oraz zastąpienie macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(t)}\}_l$  macierzą  $\{\mathbf{Ot}^{(t+1)}\}_l$  zawierającą w  $i$ -tej kolumnie elementy wektora  $\mathbf{X}_i^{(t+1)}$ ,
  - zmodyfikowanie współrzędnych  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n_d$ ) zawartych w  $i$ -tej kolumnie macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(t+1)}\}_l$ , w celu dopasowania ich do węzłów siatki MES, w następujący sposób<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned}
 x_{i,j} \leq h &\Rightarrow x_{i,j} = h, \\
 y_{i,j} \leq k &\Rightarrow y_{i,j} = k, \\
 x_{i,j} \geq (m-1)h &\Rightarrow x_{i,j} = (m-1)h, \\
 y_{i,j} \geq (n-1)k &\Rightarrow y_{i,j} = (n-1)k, \\
 h < x_{i,j} < (m-1)h &\Rightarrow x_{i,j} = \text{zaokr}\left(\frac{x_{i,j}}{h}\right) \cdot h, \\
 k < y_{i,j} < (n-1)k &\Rightarrow y_{i,j} = \text{zaokr}\left(\frac{y_{i,j}}{k}\right) \cdot k,
 \end{aligned}$$

- g) wyznaczenie numerów węzłów siatki MES odpowiadających wyznaczonym w p. 8f) współrzędnym  $(x_{i,j}, y_{i,j})$  według wzoru:

$$(x_{i,j}, y_{i,j}) \Rightarrow (\text{nr węzła MES}) = \frac{y_{i,j}}{k} \cdot m + \frac{x_{i,j}}{h} + \frac{y_{i,j}}{k} + 1 \quad (8.10)$$

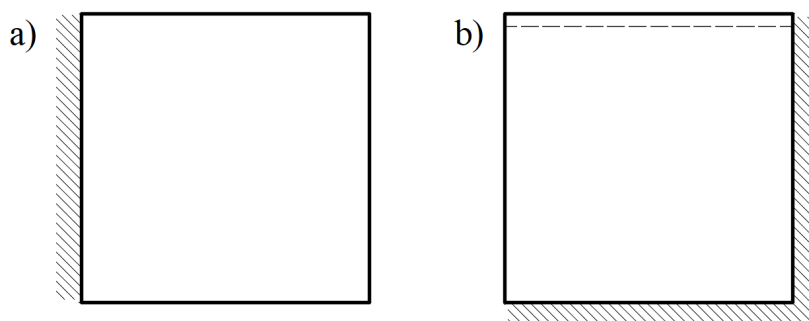
<sup>9</sup> Funkcja  $f$  określona na zbiorze  $\mathbb{R}$  wzorem  $f(x) = \text{zaokr}(x)$  oznacza przyporządkowanie liczbie rzeczywistej  $x$  jej zaokrąglenia do najbliższej liczby całkowitej zgodnie z matematycznymi regułami odnośnie zaokrąglania liczb rzeczywistych.

- oraz zmodyfikowanie  $i$ -tych kolumn w macierzach  $\{\mathbf{Ot}^{(t+1)}\}_l$  i  $\{\mathbf{Vt}^{(t+1)}\}_l$  przez wpisanie numerów węzłów siatki MES odpowiadających  $i$ -tej cząstce roju w chwili  $t + 1$ ,
- h) wyznaczenie aktualnej wartości bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\gamma_{1,i}^{(t+1)}$  dla lokalizacji  $n_d$  tłumików w węzłach siatki MES zapisanych w  $i$ -tej kolumnie macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(t+1)}\}_l$  i aktualizacja ostatniego elementu tej kolumny,
- i) wyznaczenie aktualnego ciągu macierzy  $\{\mathbf{Pt}^{(t+1)}\}_l$  i ciągu wektorów  $\{\mathbf{Gt}^{(t+1)}\}_l$ :
- założenie wstępne:  $\{\mathbf{Pt}^{(t+1)}\}_l = \{\mathbf{Pt}^{(t)}\}_l$  oraz  $\{\mathbf{Gt}^{(t+1)}\}_l = \{\mathbf{Gt}^{(t)}\}_l$ ,
  - jeśli  $\gamma_{1,i}^{(t+1)} > \gamma_{1,i}^{(t)}$ , to  $\{\mathbf{Pt}(:, i)^{(t+1)}\}_l = \{\mathbf{Ot}(:, i)^{(t+1)}\}_l$ ; w przeciwnym wypadku:  $\{\mathbf{Pt}(:, i)^{(t+1)}\}_l = \{\mathbf{Pt}(:, i)^{(t)}\}_l$ ,
  - jeśli  $\gamma_{1,i}^{(t+1)} > \{\mathbf{Gt}(3n_d + 1)^{(t)}\}_l$ , to  $\{\mathbf{Gt}^{(t+1)}\}_l = \{\mathbf{Ot}(:, i)^{(t+1)}\}_l$ ; w przeciwnym wypadku:  $\{\mathbf{Gt}^{(t+1)}\}_l = \{\mathbf{Gt}^{(t)}\}_l$ ,
- j) powtórzenie kroków 8b)–8i) dla kolejnych cząstek wchodzących w skład  $l$ -tego otoczenia, tj. dla  $i = 1, 2, 3, \dots, n_p$ ,
- k) powtórzenie kroków 8a)–8j) dla kolejnych otoczeń zawierających roje cząstek, tj. dla  $l = 1, 2, 3, \dots, n_s$ .
9. wykonanie p. 8 aż do osiągnięcia maksymalnej założonej liczby iteracji, tj. dla  $t + 1 = 1, 2, 3, \dots, n_{iter}$  lub do momentu stwierdzenia braku zmian najkorzystniejszego globalnego położenia cząstki w zakresie całego roju w pięciu kolejnych iteracjach,
10. zwrócenie najlepszego rozwiązania w każdym z  $n_s$  otoczeń w postaci ciągu wektorów  $\{\mathbf{Gt}^{(n_{iter})}\}_l$ ,
11. zwrócenie rozwiązania optymalnego w postaci wektora z ciągu  $\{\mathbf{Gt}^{(n_{iter})}\}_l$  zawierającego w ostatnim elemencie największą wartość funkcji celu.

Jak wspomniano wcześniej, metoda PSO pozwala otrzymać rozwiązanie zbliżone do optymalnego. Zatem w celu uzyskania wiarygodnych wyników zaleca się, szczególnie w bardziej złożonych zagadnieniach optymalizacyjnych, przyjmowanie więcej niż jednego otoczenia. Wskazane jest również wykonanie powyższego algorytmu dla różnych wariantów początkowych położenia cząstek w każdym z otoczeń. W opisanych w kolejnym podrozdziale przykładach numerycznych pokazano, że dobór początkowych lokalizacji  $n_p$ -elementowych zbiorów  $n_d$  tłumików ma istotny wpływ na finalny wynik zadania optymalizacyjnego. Jednak rozwiązania otrzymane końcowo dla każdego otoczenia oraz dla każdej wstępnie losowo przyjętej lokalizacji cząstek roju powinny być do siebie zbliżone, aby można było stwierdzić o poprawności wyżej przedstawionego algorytmu PSO.

## 8.2. Przykłady optymalizacji lokalizacji tłumików

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wyniki badań numerycznych, w których zastosowano optymalizację metodą roju cząstek (PSO). Analizie poddano kwadratowe płyty izotropowe o dwóch różnych schematach podparcia przedstawionych na rysunku 8.1. Pierwsza z badanych płyt charakteryzuje się schematem wspornikowym, natomiast druga płyta jest utwierdzona przy krawędzi dolnej i prawej oraz swobodnie podparta przy krawędzi górnej. Długość boku badanych płyt wynosi 2,0 m, natomiast grubość przyjęto równą 0,01 m. Materiał, z którego wykonano płyty charakteryzuje się modułem Younga  $E = 205$  GPa, współczynnikiem Poissona  $\nu = 0,3$  oraz gęstością objętościową  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>.



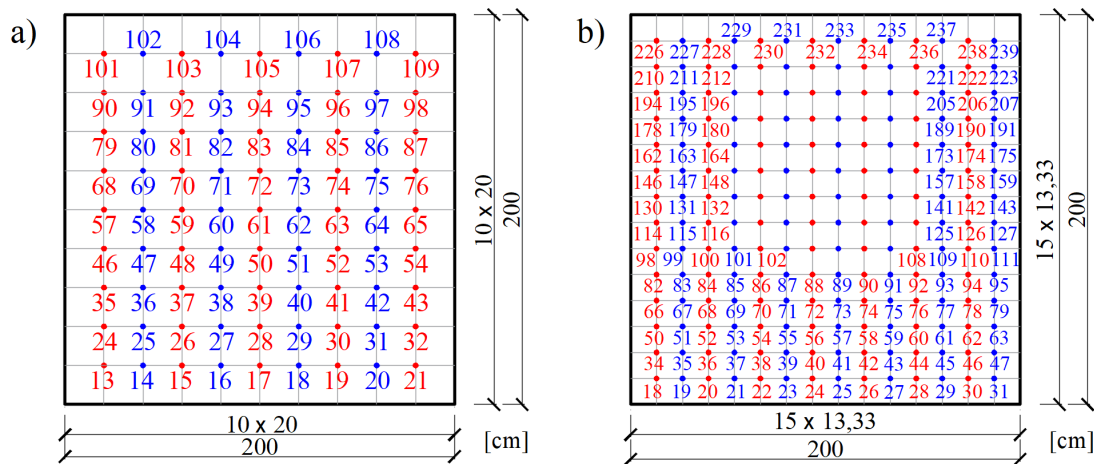
Rysunek 8.1. Schematy podparcia płyt analizowanych w podrozdziale 8.2: płyta wspornikowa (a), płyta utwierdzona na dwóch sąsiednich krawędziach i swobodnie podparta na trzeciej krawędzi (b)

Zadanie optymalizacyjne polega na rozmieszczeniu ustalonej liczby tłumików lepko-sprężystych na powierzchni badanych płyt tak, aby uzyskać maksymalny efekt tłumienia pierwszej postaci drgań. Przyjęto, podobnie jak w rozdziale 7, że tłumiki zamocowano jednym końcem do płyty, a drugim – do sztywnego podłoża. Wszystkie tłumiki występujące w obrębie danej płyty są jednakowe, a ich model i parametry przyjęto identyczne jak w przykładzie 7.1. Tłumiki opisano zatem uogólnionym modelem Maxwella zgodnie ze schematem przedstawionym na rysunku 7.7. Parametry charakteryzujące tłumiki ustalono w temperaturze referencyjnej  $T_0 = 0,2^\circ\text{C}$ , a ich wartości podano w przykładzie 7.1. W zadaniu nie uwzględniono wpływu temperatury, tzn. założono, że temperatura otoczenia jest równa temperaturze referencyjnej.

W przykładach opisanych w podrozdziale przyjęto następujące założenia [76]:

- dyskretyzacja powierzchni płyt – przy pomocy siatek MES o gęstości  $10 \times 10$  lub  $15 \times 15$  (rysunek 8.2),

- funkcja celu – bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań,
- możliwa lokalizacja tłumików – węzły wewnętrzne przyjętej siatki MES,
- cel zadania – wyznaczenie optymalnego rozmieszczenia tłumików odpowiadającego maksimum funkcji celu,
- początkowe prędkości cząstek roju – zerowe,
- przyrost czasowy między poszczególnymi iteracjami:  $\Delta t = 1$ ,
- wartości współczynników uczenia (kognitywny i socjalny):  $c_1 = c_2 = 1,0$ ,
- wartość wagi inercji:  $w = 0,75$ ,
- maksymalna liczba iteracji w algorytmie PSO:  $n_{iter} = 15$ .



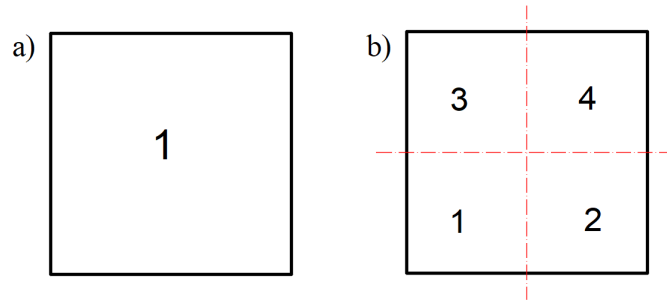
Rysunek 8.2. Dyskretyzacja siatkami MES płyt analizowanych w podrozdziale 8.2 wraz z numeracją węzłów wewnętrznych: siatka  $10 \times 10$  (a), siatka  $15 \times 15$  (b)

**Przykład 8.1.** [76] *Płyta wspornikowa wyposażona w jeden tłumik lepkościowy*

Celem niniejszego przykładu jest optymalizacja lokalizacji jednego tłumika lepkościowego na powierzchni płyty wspornikowej o schemacie podparcia przedstawionym na rysunku 8.1a). W modelu płyty przyjęto dyskretyzację przy pomocy siatki MES o gęstości  $10 \times 10$  oraz numeracji pokazanej na rysunku 8.2a).

W przykładzie rozpatrzono dwa przypadki otoczeń zawierających cząstki roju:

1. jedno otoczenie obejmujące całą powierzchnię płyty zgodnie z rysunkiem 8.3a) oraz cztery potencjalne położenia cząstek roju przyjęte w sposób losowy, tzn.  $n_s = 1$ ,  $n_p = 4$ ,
2. cztery otoczenia w obrębie płyty ustalone zgodnie z rysunkiem 8.3b) oraz cztery potencjalne położenia cząstek roju przyjęte w sposób losowy w każdym z otoczeń, tzn.  $n_s = 4$ ,  $n_p = 4$ .



Rysunek 8.3. Przyjęte otoczenia zawierające cząstki roju w obrębie płyty analizowanej w przykładzie 8.1: jedno otoczenie na całej powierzchni płyty (a), cztery otoczenia w poszczególnych ćwiartkach płyty (b)

Na powierzchni płyty należy zlokalizować jeden tłumik ( $n_d = 1$ ), a więc utożsamiany jest on z pojedynczą cząstką roju charakteryzowaną przez dwie współrzędne określające jej położenie w obrębie płyty. Wektory położenia i prędkości  $i$ -tej cząstki roju określone wzorami ogólnymi (8.1) oraz (8.2) przyjmują postacie:

$$\mathbf{X}_i = [x_{i,1}, y_{i,1}], \quad (8.11)$$

$$\mathbf{V}_i = [v_{x_{i,1}}, v_{y_{i,1}}]. \quad (8.12)$$

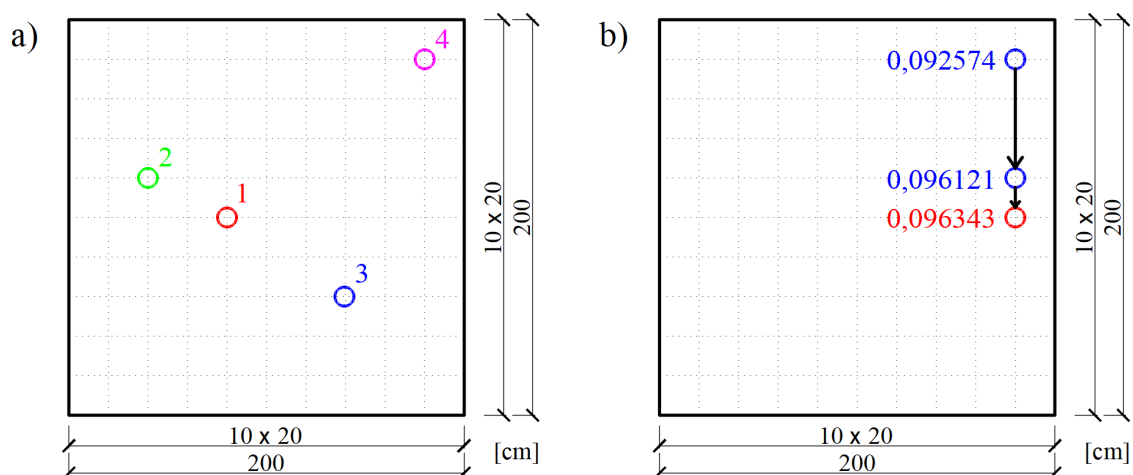
Na rysunku 8.4a) przedstawiono początkowy, losowy wybór czterech cząstek roju (czterech tłumików) na powierzchni płyty dla pierwszego rozważanego przypadku, tj. przy założeniu jednego otoczenia. Rysunek sporządzono na podstawie wygenerowanej w środowisku Octave macierzy otoczeniowej  $\mathbf{Ot}^{(0)}$  o wymiarach  $3 \times 4$ , przyjmującej poniższą postać:

$$\mathbf{Ot}^{(0)} = \begin{bmatrix} 60 & 69 & 41 & 109 \\ 0,8 & 0,4 & 1,4 & 1,8 \\ 1,0 & 1,2 & 0,6 & 1,8 \end{bmatrix}, \quad (8.13)$$

gdzie w kolejnych kolumnach występują numery węzłów siatki MES odpowiadające położeniom poszczególnych tłumików z rysunku 8.4a) oraz wyrażone w metrach współrzędne  $x$  i  $y$  tych lokalizacji w globalnym układzie współrzędnych związanym z płytą.

Macierz (8.13) poszerzona o wartości funkcji celu (bezwymiarowy współczynnik tłumienia  $\gamma_1$ ) posiada strukturę:

$$\mathbf{Ot}^{(0)} = \begin{bmatrix} 60 & 69 & 41 & 109 \\ 0,8 & 0,4 & 1,4 & 1,8 \\ 1,0 & 1,2 & 0,6 & 1,8 \\ 0,020839 & 0,015461 & 0,052576 & 0,092574 \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$



Rysunek 8.4. Schemat optymalizacji położenia tłumika dla płyty wspornikowej rozważanej w przykładzie 8.1 przy założeniu jednego otoczenia na powierzchni płyty: róż cząstek wybrany losowo w kroku zerowym iteracji (a), najlepsze położenia cząstek w poszczególnych iteracjach algorytmu PSO (b) [76]

Zatem we wstępnie przyjętym roju cząstek najbardziej korzystne położenie odpowiada tłumikowi nr 4 występującemu w węźle nr 109, ponieważ z tą lokalizacją związana jest największa wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\gamma_1 = 0,092574$ . Wektor  $\mathbf{Gt}^{(0)}$  zawierający dane o najlepszym położeniu tłumika w kroku zerowym algorytmu przyjmuje postać:

$$\mathbf{Gt}^{(0)} = \begin{bmatrix} 109 \\ 1,8 \\ 1,8 \\ 0,092574 \end{bmatrix}, \quad (8.15)$$

czyli jest to wektor składający się z elementów czwartej kolumny macierzy (8.14).

Na rysunku 8.4b) przedstawiono najkorzystniejsze położenia tłumików wchodzących w skład 4-elementowego roju w poszczególnych iteracjach metody PSO. Przy położeniach tłumików podano wartości odpowiadających im funkcji celu. Kolorem czerwonym zaznaczono najlepszą znaną pozycję tłumika po zakończeniu algorytmu. Występuje ona w węźle nr 65 siatki MES i odpowiada jej wartość bezwymiarowego współczynnika tłumienia  $\gamma_1 = 0,096343$ .

W drugim wariancie zadania optymalizacyjnego rozważono cztery otoczenia zgodnie z rysunkiem 8.3b). W zerowym kroku algorytmu PSO wylosowano, przy użyciu procedur opracowanych w środowisku Octave, początkowe położenia cząstek roju

w poszczególnych otoczeniach. Odpowiednią informację odczytano z ciągu macierzy  $\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_l$  przy  $l = 1, 2, 3, 4$ . Otrzymano następujące wyniki losowania:

$$\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_1 = \begin{bmatrix} 26 & 38 & 60 & 36 \\ 0,6 & 0,8 & 0,8 & 0,4 \\ 0,4 & 0,6 & 1,0 & 0,6 \\ 0,016958 & 0,020720 & 0,020839 & 0,015453 \end{bmatrix}, \quad (8.16)$$

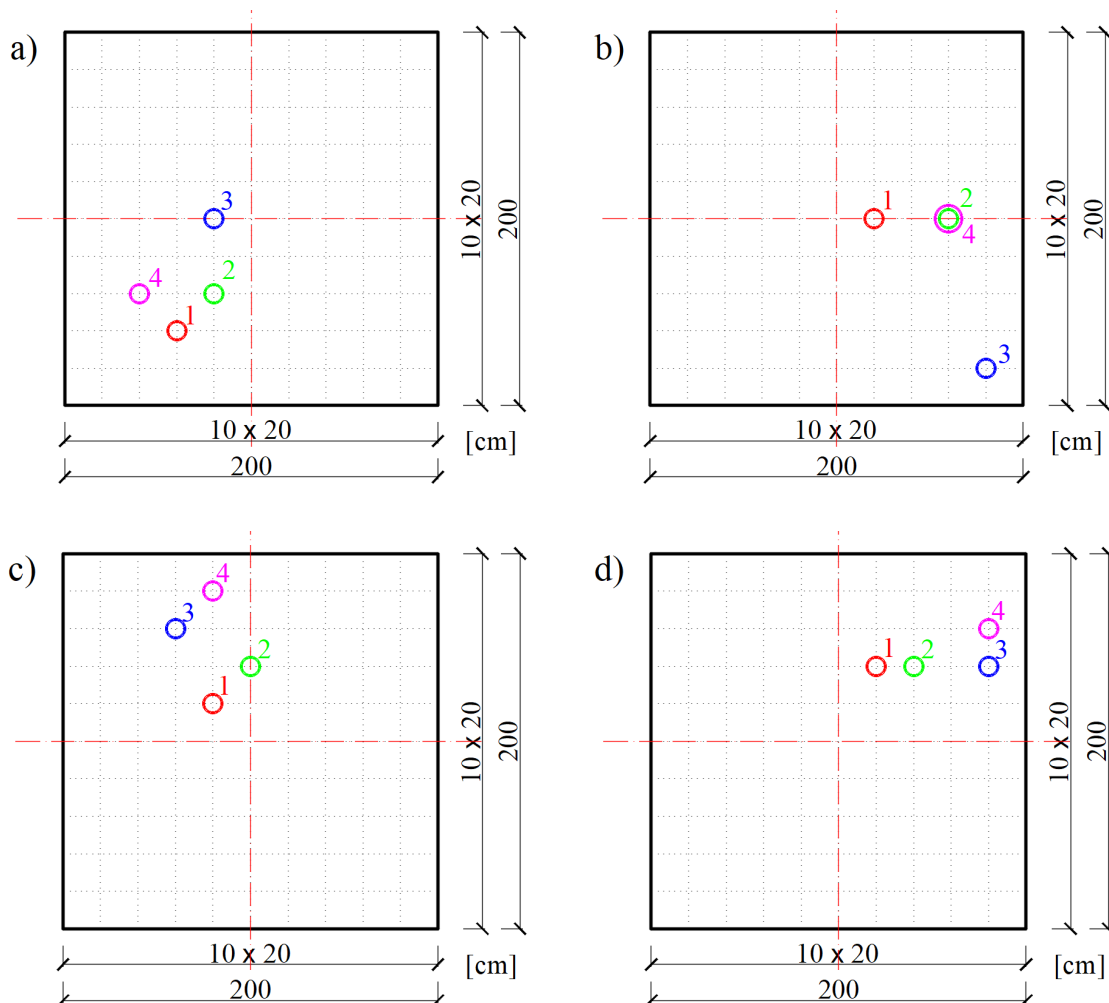
$$\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_2 = \begin{bmatrix} 62 & 64 & 21 & 64 \\ 1,2 & 1,6 & 1,8 & 1,6 \\ 1,0 & 1,0 & 0,2 & 1,0 \\ 0,038233 & 0,072462 & 0,092574 & 0,072462 \end{bmatrix}, \quad (8.17)$$

$$\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_3 = \begin{bmatrix} 71 & 83 & 92 & 104 \\ 0,8 & 1,0 & 0,6 & 0,8 \\ 1,2 & 1,4 & 1,6 & 1,8 \\ 0,020811 & 0,027414 & 0,016958 & 0,020227 \end{bmatrix}, \quad (8.18)$$

$$\{\mathbf{Ot}^{(0)}\}_4 = \begin{bmatrix} 84 & 85 & 87 & 98 \\ 1,2 & 1,4 & 1,8 & 1,8 \\ 1,4 & 1,4 & 1,4 & 1,6 \\ 0,037867 & 0,052576 & 0,095447 & 0,094286 \end{bmatrix}. \quad (8.19)$$

Początkowe rozmieszczenie cząstek roju, wynikające z danych zawartych w powyższych macierzach, pokazano graficznie na rysunku 8.5. Z kolei na rysunku 8.6 przedstawiono najkorzystniejsze lokalizacje tłumików należących do 4-elementowego roju w kolejnych otoczeniach oraz w poszczególnych iteracjach metody PSO. Przy położeniach tłumików podano wartości odpowiadających im funkcji celu. Kolorem czerwonym zaznaczono najlepszą znaną pozycję tłumików w każdym z otoczeń po zakończeniu algorytmu. Występuje ona dla każdego przypadku w węźle nr 65 siatki MES, jak to miało miejsce dla wcześniejszej sytuacji z jednym otoczeniem na powierzchni płyty.

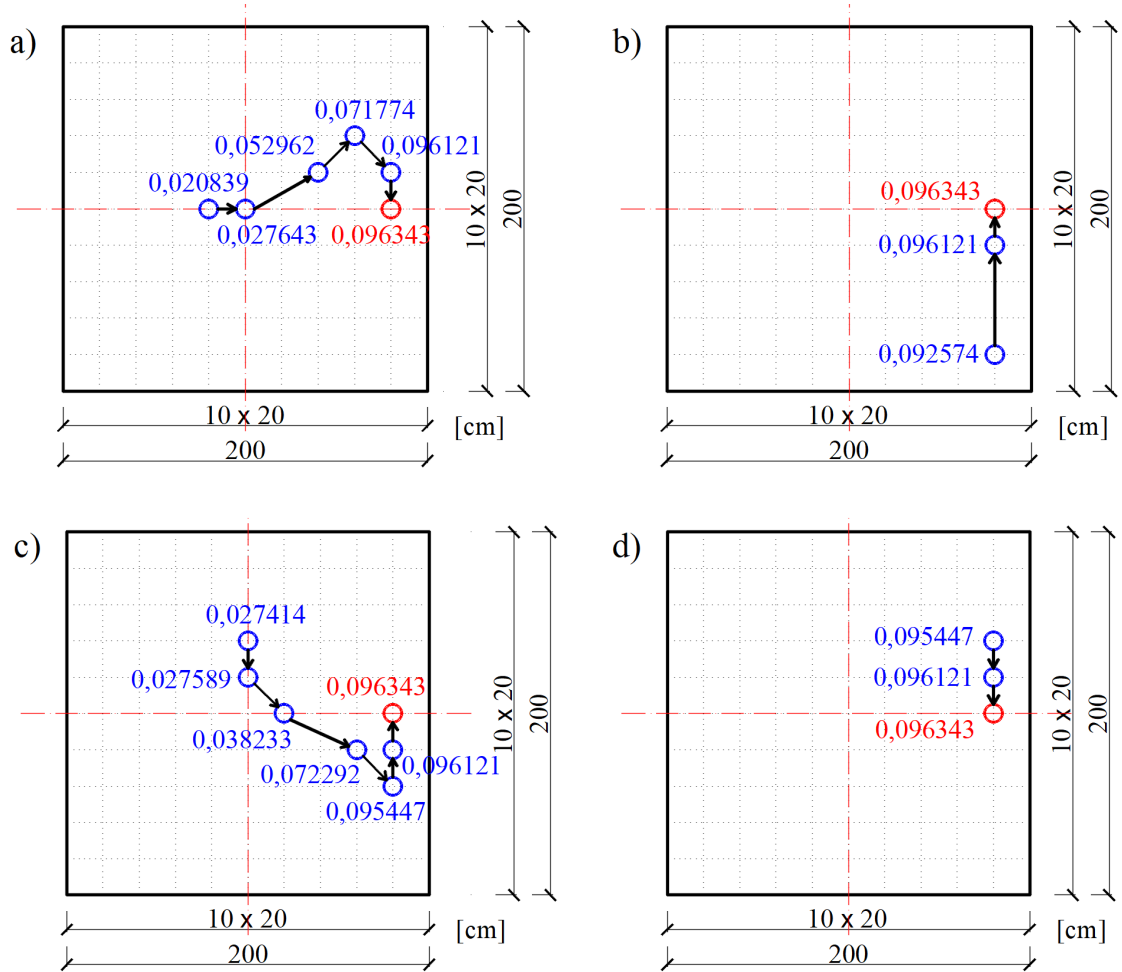
Podsumowując niniejszy przykład, można dojść do wniosku, że optymalna pozycja jednego tłumika znajduje się w pobliżu środka swobodnej krawędzi płyty, niezależnie od wyboru liczby otoczeń. Wynika stąd kolejny wniosek, że założona funkcja celu nie posiada lokalnych ekstremów i najkorzystniejsze położenie tłumika w każdej iteracji algorytmu PSO zmierza w kierunku ekstremum globalnego dla każdego założonego otoczenia.



Rysunek 8.5. Rój cząstek wybrany losowo w kroku zerowym iteracji PSO dla płyty wspornikowej rozważanej w przykładzie 8.1 przy założeniu czterech otoczeń na powierzchni płyty zgodnie z rysunkiem 8.3b): w otoczeniu nr 1 (a), w otoczeniu nr 2 (b), w otoczeniu nr 3 (c), w otoczeniu nr 4 (d) [76]

Z analizy przebiegu algorytmu wynika, że liczba niezbędnych iteracji metody PSO do chwili osiągnięcia pożądanego rozwiązania jest największa dla otoczeń 1 i 3 (odpowiednio 7 i 10 iteracji), a najmniejsza dla otoczeń 2 i 4 (odpowiednio 4 i 6 iteracji). Jest to związane z tym, że otoczenia 1 i 3 są bardziej oddalone od miejsca optymalnego położenia tłumika w porównaniu z otoczeniami 2 i 4. Zatem wybór wstępnej lokalizacji cząstek roju ma zasadniczy wpływ na liczbę iteracji algorytmu i tym samym na czas obliczeń.

Ostatecznie jako rozwiązanie rozważanego zadania optymalizacyjnego przyjęto pozycję tłumika w węźle wewnętrznym siatki MES znajdującym się najbliżej środka krawędzi swobodnej rozważanej płyty wspornikowej. Optymalne położenie tłumika



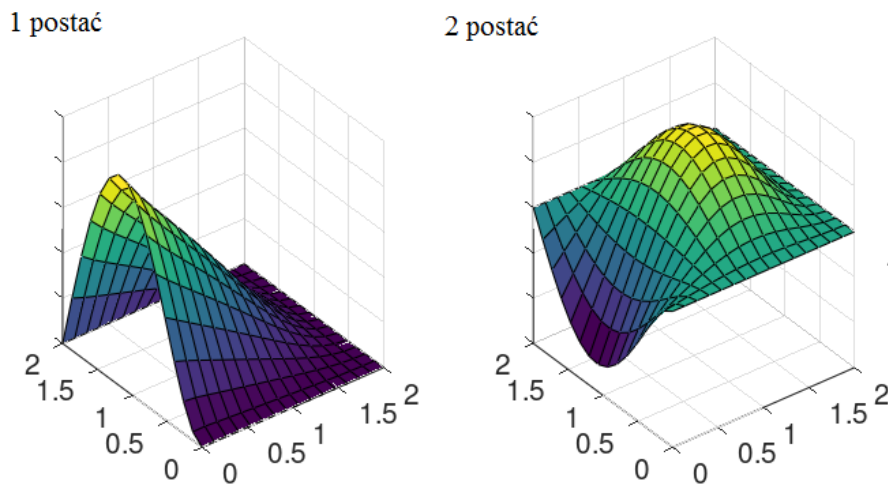
Rysunek 8.6. Schemat optymalizacji położenia tłumika dla płyty wspornikowej rozważanej w przykładzie 8.1 przy założeniu czterech otoczeń na powierzchni płyty – najlepsze położenia cząstek w poszczególnych iteracjach algorytmu PSO: dla otoczenia nr 1 (a), dla otoczenia nr 2 (b), dla otoczenia nr 3 (c), dla otoczenia nr 4 (d) [76]

w takiej lokalizacji wynika z faktu występowania przy swobodnej krawędzi ekstremalnych przemieszczeń na wykresie pierwszej postaci drgań płyty wspornikowej nie posiadającej tłumików. Drgania swobodne płyty utwardzonej wzdłuż jednej krawędzi, znajdującej się w próżni, analizowano w przykładzie 4.2, a odpowiednie postacie drgań przedstawiono graficznie na rysunku 4.5.

### Przykład 8.2. [76] Płyta wyposażona w cztery tłumiki lepkosprężyste

W przykładzie wyznaczono optymalne rozmieszczenie czterech tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty o schemacie podparcia przedstawionym na rysunku 8.1b). Tego rodzaju warunki brzegowe zostały przyjęte w celu utworzenia problemu o charakterze niesymetrycznym, w którym optymalne rozmieszczenie tłumików

nie jest przewidywalne. W modelu płyty przyjęto dyskretyzację przy pomocy siatki MES o gęstości  $15 \times 15$  z numeracją węzłów pokazaną na rysunku 8.2b). Z kolei na rysunku 8.7 przedstawiono dwie pierwsze postaci drgań własnych rozważanej płyty w sytuacji, gdy płyta znajduje się w próżni oraz nie jest wyposażona w tłumiki lepkosprężyste.



Rysunek 8.7. Wykresy dwóch pierwszych postaci drgań własnych nietłumionych dla płyty o schemacie podparcia według rysunku 8.1b), wygenerowane w programie Octave

Przyjęto, że na powierzchni płyty rozmieszczone są cztery tłumiki ( $n_d = 4$ ). Zatem każda pojedyncza cząstka roju charakteryzowana jest przez osiem współrzędnych określających położenie poszczególnych tłumików wchodzących w skład tej cząstki. Wektory położenia i prędkości  $i$ -tej cząstki roju, określone wzorami ogólnymi (8.1) oraz (8.2), można zapisać następująco:

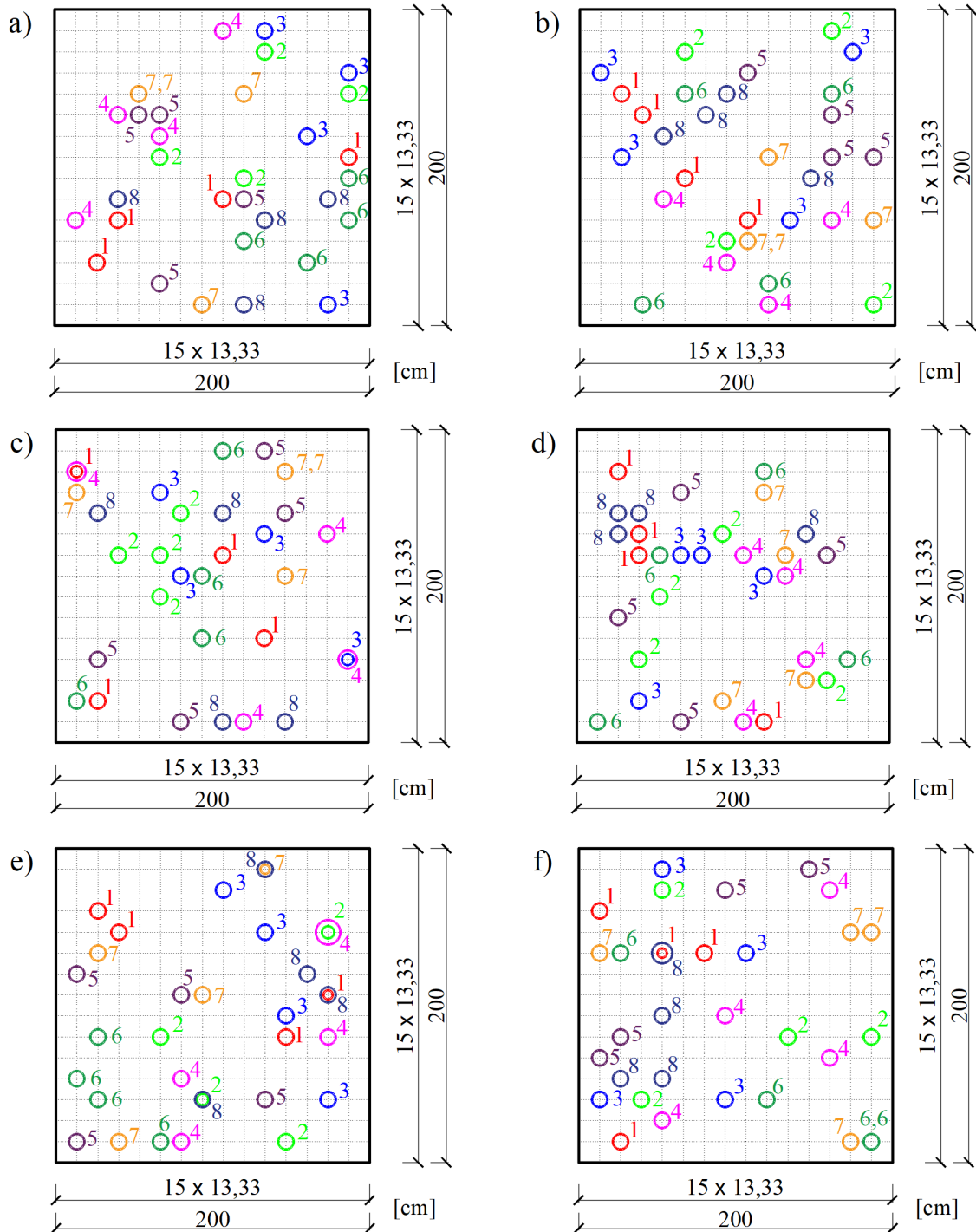
$$\mathbf{X}_i = [x_{i,1}, y_{i,1}, x_{i,2}, y_{i,2}, x_{i,3}, y_{i,3}, x_{i,4}, y_{i,4}], \quad (8.20)$$

$$\mathbf{V}_i = [v_{x_{i,1}}, v_{y_{i,1}}, v_{x_{i,2}}, v_{y_{i,2}}, v_{x_{i,3}}, v_{y_{i,3}}, v_{x_{i,4}}, v_{y_{i,4}}]. \quad (8.21)$$

W rozważanym przykładzie przyjęto dwa otoczenia na powierzchni płyty oraz osiem potencjalnych położów cząstek roju (grup czterech tłumików) w każdym otoczeniu, a zatem  $n_s = 2$  oraz  $n_p = 8$ . W odróżnieniu od poprzedniego przykładu, nie przyjęto ścisłego podziału powierzchni płyty w celu wyznaczenia otoczeń. Cząstki roju wchodzące w skład każdego z dwóch otoczeń są więc dobierane dowolnie.

Na rysunku 8.8 przedstawiono początkowy, losowy wybór ośmiu cząstek roju na powierzchni płyty. Wykonano trzy niezależne losowania dla każdego z dwóch otoczeń, a zatem w sumie otrzymano sześć początkowych różnych lokalizacji ośmiu

cząstek roju. Na rysunkach każdą 4-elementową cząstkę oznaczono innym kolorem i opatrzono numerem z zakresu od 1 do 8.



Rysunek 8.8. Rój cząstek wybrany losowo w zerowym kroku metody PSO dla płyty rozwiązywanej w przykładzie 8.2, zakładając dwa otoczenia na jej powierzchni: w otoczeniu nr 1 (a) oraz nr 2 (b) przy losowaniu nr 1, w otoczeniu nr 1 (c) oraz nr 2 (d) przy losowaniu nr 2, w otoczeniu nr 1 (e) oraz nr 2 (f) przy losowaniu nr 3 [76]

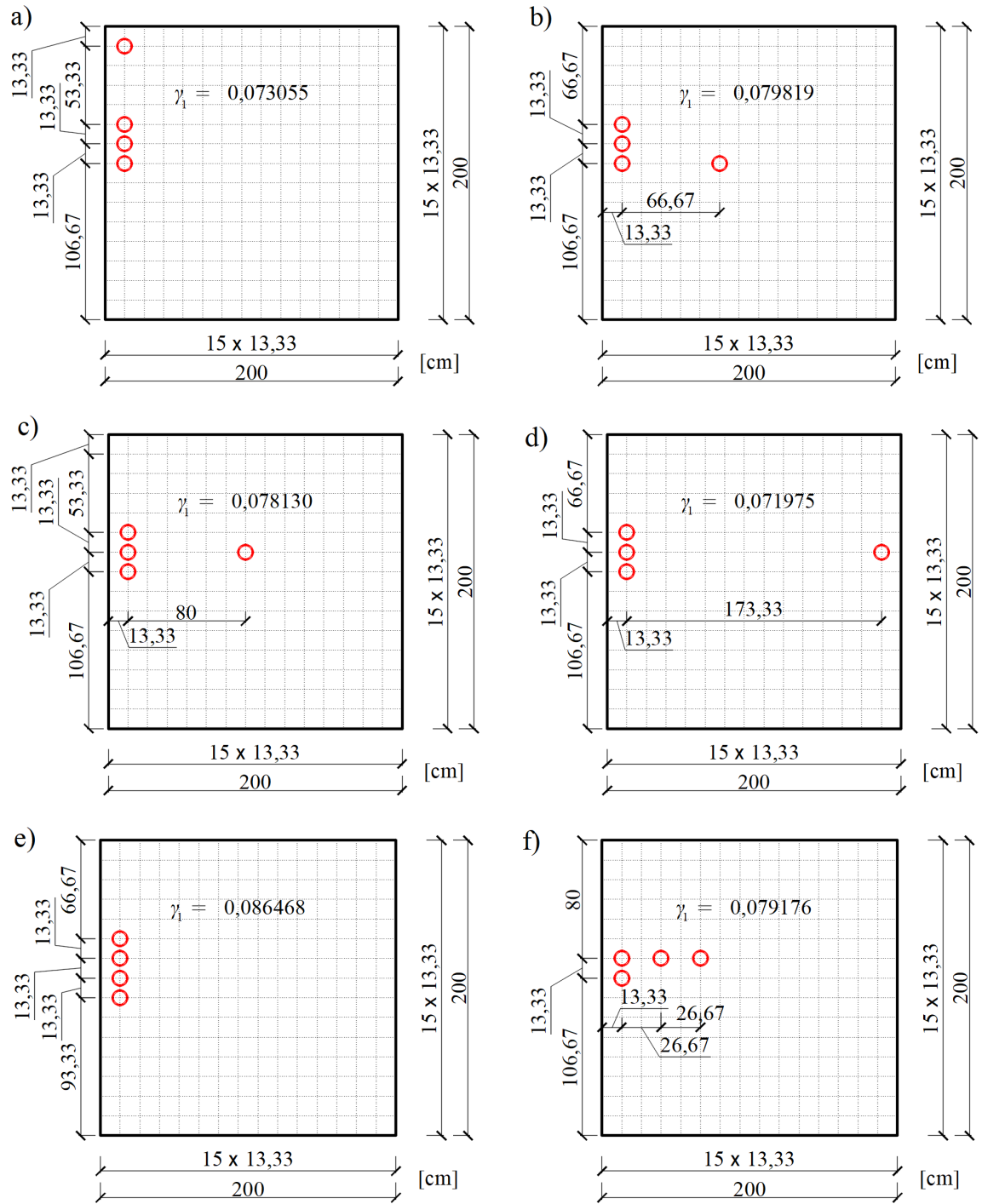
Na rysunku 8.9 przedstawiono końcowe rozmieszczenia zbioru czterech tłumików po zakończeniu algorytmu PSO dla dwóch otoczeń i trzech różnych losowań cząstek roju w każdym otoczeniu. Podano też otrzymane wartości funkcji celu  $\gamma_1$  (bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań).

Otrzymane wyniki pozwalają sformułować wniosek, że po wykonaniu 15 iteracji algorytmu PSO lokalizacje czterech tłumików na powierzchni płyty są różne dla każdego z dwóch otoczeń, przy trzech losowaniach cząstek roju w każdym otoczeniu. Zatem wstępny dobór położenia cząstek roju ma wpływ na dokładność wyników końcowych. W zadaniach bardziej złożonych, gdzie rozmieszcza się więcej niż jeden tłumik, zaleca się więc dobór kilku otoczeń oraz wykonanie kilku losowań początkowych pozycji tłumików. Wówczas z otrzymanego zbioru końcowych wyników należy wybrać ten, który odpowiada nakorzystniejszej wartości funkcji celu.

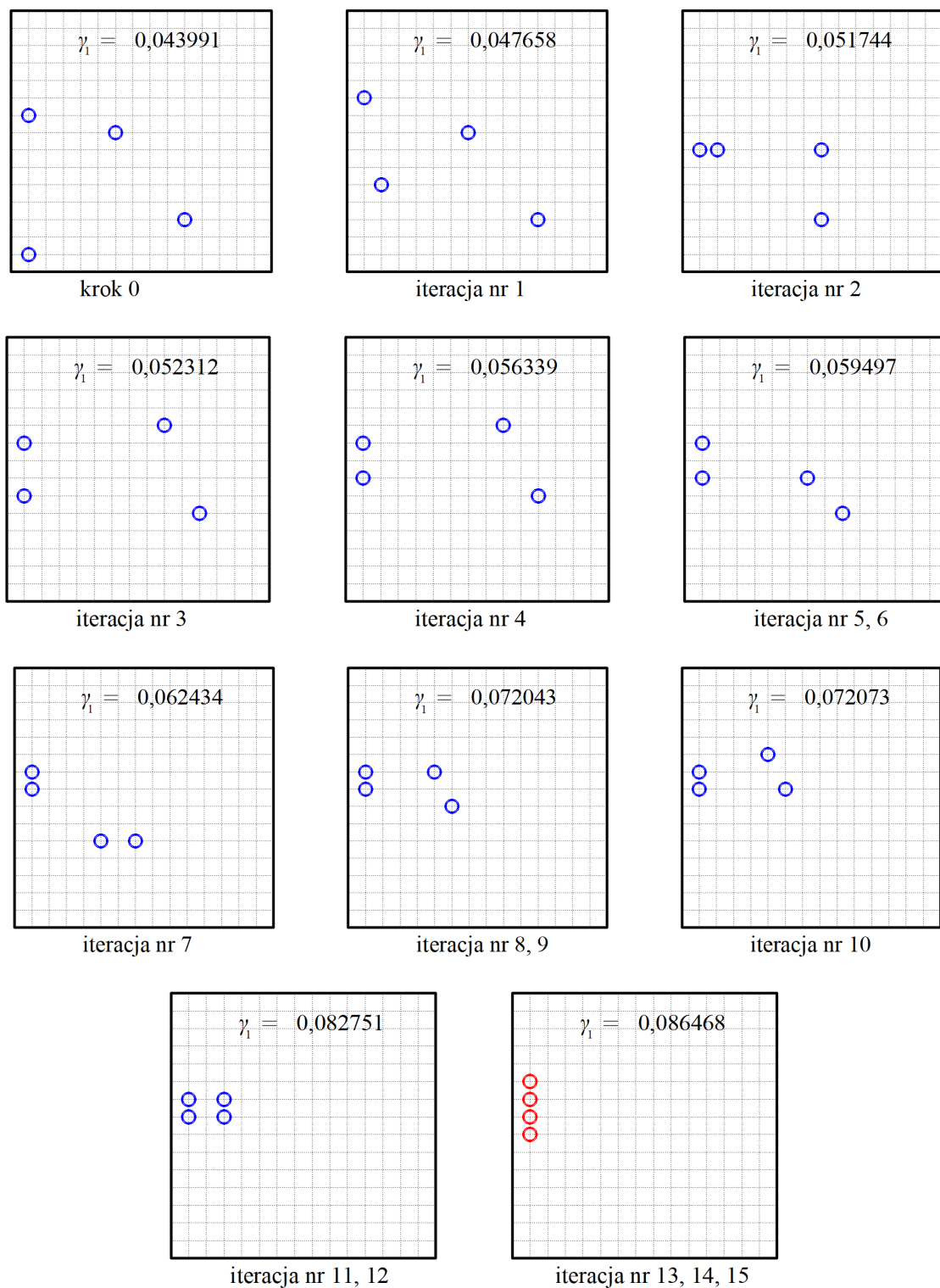
W rozważanym przykładzie przyjęto rozmieszczenie tłumików z rysunku 8.9e) jako optymalne. Odpowiada mu wartość funkcji celu  $\gamma_1 = 0,086468$ . Na rysunku 8.10 przedstawiono najkorzystniejsze położenia cząstek roju otrzymane w kolejnych iteracjach algorytmu PSO dla tego przypadku, tzn. przy wstępnym losowaniu nr 3 cząstek wchodzących w skład otoczenia nr 1. Dla poszczególnych lokalizacji tłumików odpowiadających kolejnym iteracjom podano wartości funkcji celu, które rosną wraz ze wzrostem numeru iteracji. Warto zwrócić uwagę na fakt, że najlepsza pozycja cząstki w konkretnej iteracji wybierana jest spośród najkorzystniejszych lokalizacji uzyskanych przez cząstki roju we wszystkich zrealizowanych krokach czasowych. Zatem dla kilku sąsiednich iteracji (np. 5 i 6) najlepsza pozycja cząstki w zakresie całego roju może pozostać niezmienną. Z rysunku 8.10 wynika, że optymalne położenie czterech tłumików otrzymano po wykonaniu 13 iteracji algorytmu PSO.

Analizując lokalizacje tłumików zestawione na rysunku 8.9, można wyciągnąć wniosek, że optymalne położenie trzech tłumików, które jest powtarzalne w większości otrzymanych wyników, występuje w okolicy ekstremum na wykresie pierwszej postaci drgań nietłumionych płyty (rysunek 8.7).

Na zakończenie niniejszego przykładu zbadano wpływ optymalnej lokalizacji czterech tłumików na wartości charakterystyk dynamicznych rozważanej płyty. Wyniki badań zestawiono w tabeli 8.1, gdzie podano cztery pierwsze częstości drgań własnych dla płyty nie posiadającej tłumików oraz wyposażonej w tłumiki rozmieszczone zgodnie z optymalną lokalizacją pokazaną na rysunku 8.9e). Obliczenia numeryczne w przypadku braku tłumików przeprowadzono przy zastosowaniu MES oraz siatki  $15 \times 15$ , na podstawie zasad opisanych w rozdziale 4. Z tabeli wynika, że udział czterech tłumików zgodnie z optymalnym rozmieszczeniem powoduje



Rysunek 8.9. Optymalne położenie czterech tłumików dla płyty rozważanej w przykładzie 8.2, zakładając dwa otoczenia na jej powierzchni: dla otoczenia nr 1 (a) oraz nr 2 (b) przy wstępnym losowaniu nr 1, dla otoczenia nr 1 (c) oraz nr 2 (d) przy wstępnym losowaniu nr 2, dla otoczenia nr 1 (e) oraz nr 2 (f) przy wstępnym losowaniu nr 3 [76]



Rysunek 8.10. Schemat optymalizacji położenia czterech tłumików na powierzchni płyty z przykładu 8.2 – najkorzystniejsze lokalizacje cząstek w poszczególnych iteracjach algorytmu PSO dla wstępnego losowania nr 3 cząstek w otoczeniu nr 1

wzrost pierwszej częstości drgań własnych o około 7,5%. Dla kolejnych trzech częstości ten procentowy wzrost wynosi odpowiednio około: 2,15%, 0,35% oraz 0,15%. Celem niniejszego zadania optymalizacyjnego było zmaksymalizowanie efektu tłumienia pierwszej postaci drgań własnych płyty, a zatem dla pozostałych postaci nie zaszła istotna zmiana wartości charakterystyk dynamicznych.

Tabela 8.1. Wartości częstości drgań własnych dla płyty z przykładu 8.2 w przypadku braku tłumików oraz w przypadku wyposażenia w cztery tłumiki zgodnie z optymalną lokalizacją przedstawioną na rysunku 8.9e) [76]

| Częstości drgań własnych $\omega$ [rad/s] dla siatki MES $15 \times 15$ |                    |                                 |
|-------------------------------------------------------------------------|--------------------|---------------------------------|
| Nr                                                                      | Płyta bez tłumików | Płyta z tłumikami wg rys. 8.9e) |
| 1                                                                       | 67,802             | 72,896                          |
| 2                                                                       | 138,812            | 141,802                         |
| 3                                                                       | 200,449            | 201,151                         |
| 4                                                                       | 273,269            | 273,679                         |

Podsumowując powyższe przykłady numeryczne, warto przedstawić kilka uwag końcowych. Jak wspomniano w podrozdziale 8.1, wybór parametrów charakterystycznych dla metody PSO, tj. współczynników kognitywnego  $c_1$  i socjalnego  $c_2$  oraz wagi inercji  $w$  ma istotny wpływ na końcowe rezultaty rozważanego zadania optymalizacyjnego. W rozpatrywanym zagadnieniu doboru optymalnego rozmieszczenia tłumików na powierzchni płyty najkorzystniejszym przypadkiem okazało się przyjęcie jednakowych wartości współczynników  $c_1$  i  $c_2$ , równych jedności. Oznacza to, że prędkość danej cząstki roju zależy w podobnym stopniu od jej samej oraz od całego roju. Na podstawie autorskich badań stwierdzono, że przyjmowanie jednego ze współczynników uczenia znacznie odbiegającego od drugiego zaskutkowało mniej satysfakcjonującymi wynikami końcowymi zadań optymalizacyjnych. Ponadto korzystniejsze było przyjmowanie wartości wagi inercji bliższej jedności ze względu na większe możliwości aktualizacji prędkości cząstki, stąd w rozważanych przykładach przyjęto tą wartość równą 0,75.

W niniejszej pracy przyjęto bezwymiarowy współczynnik tłumienia pierwszej postaci drgań płyty ( $\gamma_1$ ) jako funkcję celu w zadaniu optymalizacyjnym. Maksymalizacja wartości tej funkcji pozwoliła otrzymać optymalną lokalizację położenia ustalonej liczby tłumików na powierzchni płyty i tym samym osiągnąć największy efekt tłumienia jej pierwszej postaci drgań. Jednak w procesie iteracyjnym metody PSO zachodziła konieczność wielokrotnego obliczania wartości współczynnika  $\gamma_1$ .

Z uwagi na to, że algorytm obliczania wartości  $\gamma_1$  jest również iteracyjny (metoda kontynuacji), stąd końcowe wyniki algorytmu PSO otrzymano kosztem znacznego czasu obliczeniowego. Zatem aby zwiększyć szybkość procedury obliczeniowej PSO, należałoby rozważyć przyjęcie innej funkcji celu.

W przykładzie 8.2 wykazano, że przyjęcie optymalnej lokalizacji układu czterech tłumików spowodowało wzrost wartości pierwszej częstości drgań własnych płyty w porównaniu z przypadkiem, gdy pozbawiona jest ona tłumików. Zmiana ta nie była jednak znacząca. W celu uzyskania większego wzrostu tej charakterystyki dynamicznej należałoby przyjąć większą liczbę tłumików na powierzchni płyty lub dokonać zmiany ich parametrów. Jako przyczynę wzrostu częstości drgań własnych płyty na skutek obecności tłumików można wskazać zwiększenie sztywności układu ze względu na występowanie elementu sprężystego w tłumikach.

## 9. Analiza dynamiczna płyt prostokątnych w ujęciu probabilistycznym

Dynamikę płyt prostokątnych Kirchhoffa-Love'a, stanowiącą główny przedmiot badań w niniejszej pracy, do tej pory opisywano przy pomocy modelu o charakterze deterministycznym. Zatem zakładano, że wszystkie niezbędne parametry (geometryczne, materiałowe) służące do opisu modelu przyjmują wartości liczbowe określone w sposób jednoznaczny. Jednak w rzeczywistych warunkach wiele parametrów projektowych ma charakter losowy, co oznacza, że ich wartości zmieniają się zależnie od zaistniałych zdarzeń losowych. Parametr projektowy będący funkcją, która każdemu zdarzeniu z pewnego zbioru przyporządkowuje wartość liczbową, nazywa się zmienną losową. Model obliczeniowy płyty, w którym wybrane parametry projektowe, np. długość boku płyty czy moduł Younga materiału zakłada się jako zmienne losowe, nazywa się modelem o charakterze probabilistycznym.

W niniejszym rozdziale przeprowadzono analizę dynamiczną płyt w ujęciu probabilistycznym (losowym). Polega ona na badaniu wpływu losowości wybranych parametrów projektowych na wartości charakterystyk dynamicznych elementu konstrukcyjnego, przeważnie częstości drgań własnych. Głównym celem tak prowadzonej analizy jest znalezienie parametru projektowego, którego niewielka zmiana ma istotny wpływ na odpowiedź dynamiczną konstrukcji. Prowadzone badania można podzielić na dwa etapy [115]:

1. analiza deterministyczna – wyznaczenie charakterystyk dynamicznych płyt na podstawie skończonego zbioru wartości wybranego parametru projektowego, przyjmowanego jako zmienna losowa,
2. analiza probabilistyczna – wyznaczenie, przy pomocy zbioru danych deterministycznych utworzonego w etapie pierwszym, charakterystyk probabilistycznych (np. wartość oczekiwana, wariancja, skośność, kurtoza) dla wybranej częstości drgań własnych będącej funkcją rozpatrywanego, zmiennego losowo parametru projektowego.

W pierwszym etapie badań, a więc na poziomie analizy deterministycznej, zastosowano następujące metody numeryczne:

- metoda elementów skończonych – w celu utworzenia dyskretnego modelu płyty i opisu jej deformacji<sup>1</sup>,
- metoda podprzestrzennych iteracji w połączeniu z metodą kontynuacji – w celu rozwiązania nieliniowego problemu własnego opisującego ruch płyty wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań.

W drugim etapie badań, a więc w analizie probabilistycznej, użyto następujących metod:

- metoda najmniejszych kwadratów (ang. *the least square method*, LSM) – w celu wyznaczenia wielomianów aproksymujących zależność funkcyjną częstości drgań własnych od wybranych parametrów projektowych płyty,
- stochastyczna metoda elementów skończonych – w celu wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych na podstawie skończonej liczby obliczeń deterministycznych wykonanych przy zastosowaniu metody elementów skończonych<sup>1</sup>.

Wykonując obliczenia probabilistyczne w ujęciu wyżej opisanej stochastycznej metody elementów skończonych, można użyć trzech alternatywnych technik obliczeniowych:

- metoda półanalityczna (ang. *semi-analytical method*, SAM) – wykorzystująca całkowe definicje charakterystyk probabilistycznych oraz aproksymację funkcji częstości drgań własnych przy pomocy wielomianów,
- uogólniona metoda perturbacji stochastycznej (ang. *generalized stochastic perturbation technique*, SPT) – wykorzystująca całkowe definicje charakterystyk probabilistycznych oraz rozwinięcie funkcji częstości drgań własnych w szereg Taylora,
- metoda symulacyjna Monte-Carlo (ang. *Monte-Carlo simulations*, MCS) – wykorzystująca znane ze statystyki estymatory wyznaczanych charakterystyk probabilistycznych [77].

Badania numeryczne opisane w dalszej części niniejszego rozdziału przeprowadzono przy pomocy dwóch rodzajów oprogramowania. Do analizy deterministycznej zastosowano algorytmy opracowane w środowisku Octave/Matlab, natomiast w analizie probabilistycznej użyto procedury obliczeniowe przygotowane w środowisku Maple.

---

<sup>1</sup> W przykładzie 9.3, opisanym w niniejszym rozdziale, obliczenia deterministyczne zostały wykonane również alternatywnie przy zastosowaniu metody różnic skończonych. W celu uwzględnienia obecności płynu otaczającego analizowany układ płyt użyto metodę elementów brzegowych.

## 9.1. Wprowadzenie teoretyczne do analizy probabilistycznej

W niniejszym podrozdziale opisano podstawowe założenia przyjęte do analizy dynamicznej płyt w ujęciu probabilistycznym. Celem prowadzonej analizy jest wyznaczenie charakterystyk probabilistycznych, takich jak wartość oczekiwana, współczynnik wariancji, kurtoza czy skośność, dla wybranych częstości drgań własnych płyt. W zależności od rodzaju rozważanego zadania częstości drgań własnych stanowią funkcje pewnych parametrów projektowych, które przyjmowane są jako zmienne losowe. Tymi parametrami projektowymi mogą być np. dane geometryczne płyty lub układu płyt (długość boku płyty, grubość płyty, odległość między dwiema płytami stanowiącymi układ), dane materiałowe (moduł Younga, współczynnik Poissona, gęstość materiału), a także parametry tłumików lepkosprężystych (w przypadku gdy płyta jest wyposażona w urządzenia pasywnej redukcji drgań).

W dalszym ciągu przyjęto, że częstości drgań własnych płyty z tłumikami lepkosprężystymi (lub układu płyt zanurzonych w płynie) są zależne od  $p$  parametrów projektowych oraz  $j$ -ty parametr projektowy  $v_j$ , gdzie  $j = 1, 2, 3, \dots, p$ , jest zmienną losową o normalnym (gaussowskim) rozkładzie prawdopodobieństwa charakteryzowanym przez funkcję gęstości:

$$g_{v_j}(x) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \quad (9.1)$$

Rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej  $v_j$  można więc opisać przy pomocy dwóch parametrów:

- wartość średnia  $\mu$  – element środkowy przyjętego skończonego zbioru wartości zmiennej losowej (przy założeniu, że elementy zbioru są uporządkowane rosnąco),
- odchylenie standardowe  $\sigma = \alpha\mu$ , gdzie  $\alpha$  to tzw. współczynnik zmienności (współczynnik wariancji, niepewność wejściowa) zmiennej losowej przyjmujący wartości w zakresie 0%–25%.

W podejściu probabilistycznym dla  $j$ -tego parametru projektowego  $v_j$  zakłada się zbiór  $N$  wartości, które ten parametr może przyjmować. Przyjmuje się ponadto, że elementy tego zbioru uporządkowane są rosnąco i można go zapisać w następujący sposób:

$$\Upsilon_j = \left\{ v_j^{(1)}, v_j^{(2)}, v_j^{(3)}, \dots, v_j^{(N)} \right\}. \quad (9.2)$$

Każdej z wartości parametru  $v_j^{(k)}$  przyjętej ze zbioru (9.2) odpowiada  $i$ -ta częstość drgań własnych  $\omega_{i,j}^{(k)}$ , którą wyznacza się zgodnie z metodologią MES (lub MRS)

opisaną w poprzednich rozdziałach niniejszej pracy. Można zatem utworzyć zbiór par:

$$\left\{ \left( v_j^{(k)}, \omega_{i,j}^{(k)} \right) : k = 1, 2, 3, \dots, N \right\}. \quad (9.3)$$

Na podstawie dyskretnego zbioru punktów (9.3) określa się następnie funkcję ciągłą aproksymującą zależność  $i$ -tej częstości drgań własnych  $\omega_i$  od  $j$ -tego parametru projektowego  $v_j$ . Przyjęto tą funkcję jako wielomian  $n$ -tego stopnia postaci:

$$\omega_{i,j} = \omega_i(v_j) = C_{i,0} + C_{i,1}v_j + C_{i,2}v_j^2 + \dots + C_{i,n}v_j^n, \quad (9.4)$$

przy czym stopień  $n$  wielomianu należy założyć. Współczynniki powyższego wielomianu można wyznaczyć przy zastosowaniu algorytmu metody najmniejszych kwadratów opracowanego np. w środowisku Maple.

W dalszych rozważaniach wzięto pod uwagę następujące parametry projektowe, od których zależy częstość drgań własnych płyty wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań lub układu płyt zanurzonych całkowicie w płynie:

- parametry charakteryzujące geometrię płyty lub układu płyt:
  - wymiary pojedynczej płyty:  $A \times B \times H$ ,
  - odległość między płytami stanowiącymi układ:  $c$ ,
- parametry charakteryzujące materiał, z którego wykonana jest płyta lub ośrodek zewnętrzny:
  - moduł Younga:  $E$ ,
  - współczynnik Poissona:  $\nu_p$ ,
  - gęstość materiału:  $\rho_p$ ,
  - gęstość cieczy otaczającej płytę:  $\rho_c$ ,
- stałe charakteryzujące tłumiki lepkosprężyste, które zamocowane są do płyty:
  - stała elementu sprężystego:  $k_0$ ,
  - stałe charakteryzujące (ułamkowy) element Maxwella:  $k_d, c_d, \alpha_d$ ,
  - temperatura referencyjna:  $T_0$ ,
- temperatura otoczenia płyty:  $T$ .

Zależność funkcyjną  $i$ -tej częstości drgań własnych od powyższych parametrów projektowych można więc zapisać następująco:

- dla pojedynczej płyty z lepkosprężystymi tłumikami drgań:

$$\omega_i = \omega_i(\mathbf{v}_1) = \omega_i(A, B, H, E, \nu_p, \rho_p, k_0, k_d, c_d, \alpha_d, T_0, T), \quad (9.5)$$

- dla układu dwóch identycznych płyt zanurzonych w płynie:

$$\omega_i = \omega_i(\mathbf{v}_2) = \omega_i(A, B, H, c, E, \nu_p, \rho_p, \rho_c), \quad (9.6)$$

gdzie  $\mathbf{v}_1$  oraz  $\mathbf{v}_2$  oznaczają wektory zawierające zmienne projektowe dla każdego z dwóch powyższych przypadków.

Każdy parametr projektowy zawarty w wektorze  $\mathbf{v}_1$  lub  $\mathbf{v}_2$  może zostać przyjęty jako zmienna losowa, od której zależy rozpatrywana  $i$ -ta częstość drgań własnych. Jednak w wielu przypadkach losowość danego parametru projektowego jest mało znacząca w odniesieniu do wartości częstości drgań własnych. Zatem istotny element prowadzonej analizy probabilistycznej stanowi wyznaczenie takiego parametru projektowego, którego niewielka zmiana znacząco wpływa na obserwowane wartości charakterystyk dynamicznych. Dla każdego parametru projektowego wyznaczyć można tzw. znormalizowany gradient wrażliwości wyrażony wzorem:

$$\frac{\Delta\omega_i}{\Delta v_j} = \left( \frac{\partial\omega_i}{\partial v_j} \right)_{\bar{v}_j} \cdot \frac{\bar{v}_j}{\bar{\omega}_i}, \quad (9.7)$$

gdzie  $\bar{v}_j$  oznacza wartość średnią parametru projektowego  $v_j$ , przyjmowaną jako element środkowy założonego zbioru wartości (9.2). Natomiast  $\bar{\omega}_i$  oznacza  $i$ -tą częstość drgań własnych odpowiadającą wartości  $\bar{v}_j$ . Pochodną cząstkową zawartą we wzorze (9.7) wyznacza się przy założeniu, że  $i$ -ta częstość drgań własnych związana jest z  $j$ -tym parametrem projektowym zależnością wielomianową (9.4). Parametry projektowe występujące we wzorze (9.5) lub (9.6), dla których znormalizowany gradient wrażliwości przyjmuje największą wartość dodatnią oraz największą wartość ujemną należy uwzględnić w dalszej analizie probabilistycznej. Zakłada się, że ich losowość jest istotna w procesie wyznaczania częstości drgań własnych rozważanego układu.

Dla parametru projektowego  $v_j$  mającego znaczący wpływ na  $i$ -tą częstość drgań własnych  $\omega_i$  można wyznaczyć następujące charakterystyki probabilistyczne [77]:

- wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(\omega_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^n C_{i,k} v_j^k g_{v_j}(x) dx, \quad (9.8)$$

- wariancja:

$$\sigma^2(\omega_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n C_{i,k} v_j^k - \mathbb{E}(\omega_i) \right)^2 g_{v_j}(x) dx, \quad (9.9)$$

- współczynnik zmienności:

$$\alpha(\omega_i) = \left| \frac{\sqrt{\sigma^2(\omega_i)}}{\mathbb{E}(\omega_i)} \right| = \left| \frac{\sigma(\omega_i)}{\mathbb{E}(\omega_i)} \right|, \quad (9.10)$$

- $m$ -ty moment centralny:

$$\mu_m(\omega_i) = \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{k=1}^n C_{i,k} v_j^k - \mathbb{E}(\omega_i) \right)^m g_{v_j}(x) dx, \quad (9.11)$$

- skośność:

$$\beta(\omega_i) = \frac{\mu_3(\omega_i)}{\sigma^3(\omega_i)}, \quad (9.12)$$

- kurtoza:

$$\kappa(\omega_i) = \frac{\mu_4(\omega_i)}{\sigma^4(\omega_i)}. \quad (9.13)$$

W wyżej przedstawionych całkowych definicjach charakterystyk probabilistycznych funkcja  $g_{v_j}(x)$  oznacza gęstość prawdopodobieństwa losowej zmiennej projektowej  $v_j$ . Z kolei symbolem  $C_{i,k}$  oznaczono współczynniki wielomianu (9.4) aproksymującego zależność częstości drgań własnych od parametru projektowego. Funkcję gęstości zmiennej losowej  $v_j$  przyjmuje się jak dla rozkładu normalnego, a więc ze wzoru (9.1). Jeden z parametrów tego rozkładu jest zależny od tzw. niepewności wejściowej  $\alpha$ , która może się zmieniać w pewnym ustalonym zakresie. Stąd charakterystyki probabilistyczne (9.8)–(9.13) wyznacza się jako funkcje zmiennej niezależnej  $\alpha$  i przedstawia w postaci graficznej.

Informację o stopniu wrażliwości częstości drgań własnych płyty lub układu płyt na losowość parametru projektowego można uzyskać na podstawie wartości gradientu wrażliwości (9.7), jak również bezpośrednio przez znajomość charakterystyk (9.8)–(9.13). Wartość oczekiwana pozwala określić tendencję centralną zmiennej losowej i jest to podstawowa charakterystyka, na podstawie której można wyznaczyć wartość badanej częstości drgań własnych będącej funkcją losowego parametru projektowego. Wariancja stanowi miarę rozproszenia badanej zmiennej losowej wokół wartości średniej, natomiast współczynnik zmienności jest względną miarą tego rozproszenia. Wariancja oraz współczynnik zmienności pozwalają ocenić, w jakim stopniu zmienność parametru projektowego wpływa na zmienność zależnej od niego częstości drgań. Skośność oraz kurtoza są charakterystykami określającymi, jak bardzo rozkład częstości drgań odbiega od rozkładu normalnego. Skośność stanowi miarę asymetrii tego rozkładu, natomiast kurtoza jest miarą jego koncentracji i spłaszczenia<sup>2</sup>.

<sup>2</sup> zob. [https://mfiles.pl/pl/index.php/Miary\\_asymetrii](https://mfiles.pl/pl/index.php/Miary_asymetrii),  
<https://obliczeniastatystyczne.pl/statystyka-podstawowe-pojecia>

Charakterystyki probabilistyczne rozpatrywanej częstości drgań wyznacza się na podstawie definicji całkowych (9.8)–(9.13) w metodzie półanalizycznej (SAM) oraz w uogólnionej metodzie perturbacji stochastycznej (SPT). W metodzie SAM korzysta się bezpośrednio z zależności wielomianowej (9.4) częstości drgań od parametru projektowego. W metodzie SPT natomiast tą zależność rozwija się w odpowiedni szereg Taylora wokół wartości oczekiwanej, co bardziej szczegółowo opisano np. w pracy [77]. W metodzie Monte-Carlo (MCS) wykorzystywane są stosowane w statystyce estymatory wartości oczekiwanej, wariancji oraz centralnych momentów probabilistycznych:

- wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(\omega_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_i \left( v_j^{(k)} \right), \quad (9.14)$$

- wariancja:

$$\sigma^2(\omega_i) = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N \left[ \omega_i \left( v_j^{(k)} \right) - \mathbb{E}(\omega_i) \right]^2, \quad (9.15)$$

- $m$ -ty moment centralny:

$$\mu_m(\omega_i) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \left[ \omega_i \left( v_j^{(k)} \right) - \mathbb{E}(\omega_i) \right]^m. \quad (9.16)$$

We wzorach (9.14)–(9.16) symbolem  $N$  oznaczono liczbę wygenerowanych losowo wartości parametru projektowego  $v_j$  zgodnie z rozkładem normalnym o znanej wartości średniej  $\mu$  oraz odchyleniu standardowym  $\sigma = \alpha\mu$ , przy czym wartości  $\alpha$  przyjęto ze zbioru dyskretnego  $\{0,025, 0,05, 0,075, \dots, 0,25\}$ .

Po otrzymaniu charakterystyk probabilistycznych dla częstości drgań własnych możliwe jest wyznaczenie wielkości, które pozwalają ocenić bezpieczeństwo układu polegające np. na uniknięciu zjawiska rezonansu. Wielkości te obejmują:

- miarę niezawodności pierwszego rzędu (ang. *First Order Reliability Measure, FORM*):

$$\beta_{FORM} = \frac{\mathbb{E}(\omega_i) - \mathbb{E}\left(\frac{3}{4}\omega_i\right)}{\sigma\left(\omega_i - \frac{3}{4}\omega_i\right)}, \quad (9.17)$$

- entropię względną obliczaną na podstawie teorii Bhattacharyya:

$$H(\omega_i) = \frac{1}{4} \frac{(\mathbb{E}(\omega_i) - \mathbb{E}\left(\frac{3}{4}\omega_i\right))^2}{\sigma^2(\omega_i) + \sigma^2\left(\frac{3}{4}\omega_i\right)} + \frac{1}{2} \ln \left( \frac{\sigma^2(\omega_i) + \sigma^2\left(\frac{3}{4}\omega_i\right)}{2\sigma(\omega_i) \cdot \sigma\left(\frac{3}{4}\omega_i\right)} \right), \quad (9.18)$$

- miarę bezpieczeństwa wyznaczaną przy pomocy entropii względnej:

$$\beta_H = \frac{1}{2} \sqrt{H(\omega_i)}. \quad (9.19)$$

Niezawodność badanego układu wzrasta wraz ze wzrostem wskaźnika bezpieczeństwa (9.17) lub (9.19). Przedstawione wyżej wskaźniki obliczane są na podstawie wartości oczekiwanej oraz odchylenia standardowego  $i$ -tej częstości drgań własnych. Tego typu miary bezpieczeństwa są powszechnie stosowane podczas badania problemów zawierających elementy losowe.

## 9.2. Przykłady numeryczne zastosowania analizy probabilistycznej

W niniejszym podrozdziale przedstawiono kilka przykładów zastosowania wyżej opisanych metod probabilistycznych podczas wykonywania analizy dynamicznej płyt. W dwóch pierwszych przykładach rozpatrzono płyty wyposażone w lepkosprężyste tłumiki drgań. W przykładzie trzecim natomiast analizie poddano układ dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie. We wszystkich przykładach<sup>3</sup> zastosowano następującą kolejność postępowania:

### 1. analiza dynamiczna w ujęciu deterministycznym

- a) przyjęcie charakterystyk dynamicznych wyznaczanych w kontekście analizy losowej, np. kilka początkowych częstości drgań własnych badanych układów,
- b) przyjęcie parametrów projektowych mających wpływ na wartości wyznaczanych charakterystyk dynamicznych i potraktowanie ich jako zmienne losowe,
- c) ustalenie dla każdego parametru projektowego  $v_j$  skończonego zbioru jego wartości (9.2),
- d) obliczenie szukanej charakterystyki dynamicznej, przyjmując kolejno każdą z możliwych wartości rozpatrywanego  $j$ -tego parametru projektowego  $v_j$  oraz ustalone wartości średnie pozostałych parametrów projektowych, zgodnie z metodologią opisaną w poprzednich rozdziałach niniejszej pracy,
- e) określenie postaci funkcji wielomianowych (9.4) aproksymujących zależność charakterystyki dynamicznej od badanego parametru projektowego przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów,
- f) wyznaczenie parametrów projektowych istotnych przy analizie probabilistycznej na podstawie wartości znormalizowanego gradientu wrażliwości (9.7),

---

<sup>3</sup> Stosowane w przykładach procedury obliczeniowe korzystające z metody najmniejszych kwadratów oraz metod probabilistycznych SPT i MCS opracował w środowisku Maple prof. dr hab. inż. M. Kamiński. Algorytmy korzystające z metody podprzestrzennych iteracji (przykład 9.2) opracowała w środowisku Matlab dr hab. inż. M. Łasecka-Plura. Pozostałe algorytmy użyte w przykładach numerycznych zamieszczonych w niniejszym rozdziale są autorskimi procedurami obliczeniowymi.

## 2. analiza dynamiczna w ujęciu probabilistycznym

- a) sporządzenie wykresów zależności wybranych momentów losowych (wartość oczekiwana, współczynnik zmienności, skośność, kurtoza) od niepewności wejściowej  $\alpha$ , dla badanych charakterystyk dynamicznych, po wcześniejszym przyjęciu parametrów projektowych istotnych w analizie losowej,
- b) obliczenie, dla wybranych parametrów projektowych, miar niezawodności według wzorów (9.17) lub (9.19) oraz przedstawienie w postaci graficznej zależności tych miar od niepewności wejściowej  $\alpha$ .

W przykładzie 9.1 pominięto p. 2b), tzn. wyznaczanie miar niezawodności badanego układu. W przykładach 9.2 oraz 9.3 pominięto p. 1f) i istotne parametry projektowe ustalono na podstawie analizy wyników otrzymanych w p. 1d).

**Przykład 9.1.** [86] *Analiza probabilistyczna płyty prostokątnej wyposażonej w lepko-sprężyste tłumiki drgań opisane modelem klasycznym*

W niniejszym przykładzie analizie probabilistycznej poddano kwadratową płytę wspornikową wyposażoną w trzy lepko-sprężyste tłumiki drgań zamocowane przy jej swobodnej krawędzi. Płytę tego typu rozpatrywano w przykładzie 7.1, a jej schemat ze wskazaniem sposobu zamocowania płyty oraz rozmieszczenia tłumików pokazano na rysunku 7.6.

Analizę losową przeprowadzono dla pięciu pierwszych częstości drgań własnych badanej płyty. Przyjęto, że wyznaczane charakterystyki dynamiczne są zależne od następujących zmiennych projektowych:

- a) parametry geometryczne płyty:
  - długość boku płyty
    - wartość średnia:  $\bar{A} = \bar{B} = 2,0$  m,
    - zbiór wartości parametru:  $A = B \in \{1,0, 1,2, 1,4, \dots, 3,0\}$  m,
  - grubość płyty
    - wartość średnia:  $\bar{H} = 0,01$  m,
    - zbiór wartości parametru:  $H \in \{0,002, 0,004, 0,006, \dots, 0,02\}$  m,
- b) parametry materiałowe płyty:
  - moduł Younga
    - wartość średnia:  $\bar{E} = 205$  GPa,
    - zbiór wartości parametru:  $E \in \{180, 185, 190, \dots, 230\}$  GPa,
  - współczynnik Poissona
    - wartość średnia:  $\bar{\nu} = 0,3$ ,

- zbiór wartości parametru:  $\nu \in \{0,1, 0,14, 0,18, \dots, 0,5\}$ ,
- gęstość materiału płyty
  - wartość średnia:  $\bar{\rho} = 7850 \text{ kg/m}^3$ ,
  - zbiór wartości parametru:  $\rho \in \{7350, 7450, 7550, \dots, 8350\} \text{ kg/m}^3$ ,
- c) parametry tłumików zamocowanych do płyty:
  - sztywność elementu sprężystego
    - wartość średnia:  $\bar{k}_0 = 108,56 \text{ N/m}$ ,
    - zbiór wartości parametru:
 
$$k_0 \in \{60, 70, 80, 90, 100, 108,56, 120, 130, 140, 150, 160\} \text{ N/m},$$
  - parametr sztywności elementu Maxwella
    - wartość średnia:  $\bar{k}_1 = 19968,09 \text{ N/m}$ ,
    - zbiór wartości parametru:
 
$$k_1 \in \{14500, 15500, 16500, 17500, 18500, 19968,09, 20500, 21500, 22500, 23500\} \text{ N/m},$$
  - parametr lepkości elementu Maxwella
    - wartość średnia:  $\bar{c}_1 = 229,63 \text{ Ns/m}$ ,
    - zbiór wartości parametru:
 
$$c_1 \in \{130, 150, 170, 190, 210, 229,63, 250, 270, 290, 310, 330\} \text{ Ns/m},$$
- d) temperatura:
  - referencyjna, w której określono parametry tłumików
    - wartość średnia:  $\bar{T}_0 = 0,2^\circ\text{C}$ ,
    - zbiór wartości parametru:  $T_0 \in \{0, 0,04, 0,08, 0,12, \dots, 0,36, 0,4\}^\circ\text{C}$ ,
  - temperatura otoczenia płyty
    - wartość średnia:  $\bar{T} = 0,2^\circ\text{C}$ ,
    - zbiór wartości parametru:  $T \in \{0, 0,04, 0,08, 0,12, \dots, 0,36, 0,4\}^\circ\text{C}$ .

W powyższym zestawieniu podano przyjęte wartości średnie parametrów projektowych, które oznaczono z użyciem nadkreślenia. Ponadto określono skończony zbiór wartości, które dany parametr jako zmienna losowa może przyjmować.

Dla każdego parametru projektowego wykonano serię obliczeń deterministycznych. W każdej serii przyjmowano kolejne wartości danego parametru projektowego z ustalonego zbioru oraz wartości średnie pozostałych parametrów. Następnie wyznaczono pięć pierwszych częstości drgań własnych zgodnie z wcześniej omówioną metodologią MES dla płyt z tłumikami drgań.

W tabelach 9.1 oraz 9.2 podano przykładowe wyniki obliczeń deterministycznych, w których jako zmienne losowe przyjęto parametry geometryczne płyty – odpowied-

nio długość jej boku oraz grubość. Powierzchnię środkową płyty zdyskretyzowano przy pomocy siatki MES o gęstości  $14 \times 14$ .

Tabela 9.1. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 9.1 otrzymane przy założeniu długości  $A$  jej krawędzi jako zmiennej losowej

| Dł. boku<br>$A$ [m] | Częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s] |            |            |            |            |
|---------------------|---------------------------------------------|------------|------------|------------|------------|
|                     | $\omega_1$                                  | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ |
| 1,0                 | 65,482                                      | 143,389    | 332,561    | 427,979    | 483,396    |
| 1,2                 | 44,624                                      | 101,006    | 231,711    | 299,237    | 336,993    |
| 1,4                 | 31,680                                      | 74,618     | 170,747    | 221,348    | 248,576    |
| 1,6                 | 23,544                                      | 56,993     | 131,025    | 170,530    | 191,038    |
| 1,8                 | 18,219                                      | 44,697     | 103,661    | 135,441    | 151,436    |
| 2,0                 | 14,553                                      | 35,864     | 83,993     | 110,127    | 122,968    |
| 2,2                 | 11,917                                      | 29,367     | 69,382     | 91,228     | 101,786    |
| 2,4                 | 9,954                                       | 24,477     | 58,240     | 76,729     | 85,586     |
| 2,6                 | 8,450                                       | 20,716     | 49,559     | 65,362     | 72,915     |
| 2,8                 | 7,271                                       | 17,765     | 42,671     | 56,292     | 62,823     |
| 3,0                 | 6,329                                       | 15,408     | 37,119     | 48,950     | 54,660     |

Tabela 9.2. Wartości częstości drgań własnych płyty z przykładu 9.1 otrzymane przy założeniu jej grubości  $H$  jako zmiennej losowej

| Grubość<br>$H$ [m] | Częstości drgań własnych $\omega_i$ [rad/s] |            |            |            |            |
|--------------------|---------------------------------------------|------------|------------|------------|------------|
|                    | $\omega_1$                                  | $\omega_2$ | $\omega_3$ | $\omega_4$ | $\omega_5$ |
| 0,002              | 0,635                                       | 11,508     | 15,431     | 30,221     | 34,881     |
| 0,004              | 1,840                                       | 28,727     | 38,036     | 57,547     | 60,712     |
| 0,006              | 7,415                                       | 28,785     | 51,939     | 73,347     | 78,587     |
| 0,008              | 12,288                                      | 30,400     | 67,899     | 90,909     | 100,225    |
| 0,01               | 14,553                                      | 35,864     | 83,993     | 110,127    | 122,968    |
| 0,012              | 17,061                                      | 41,940     | 100,169    | 130,000    | 146,132    |
| 0,014              | 19,647                                      | 48,208     | 116,410    | 150,215    | 169,528    |
| 0,016              | 22,268                                      | 54,558     | 132,699    | 170,641    | 193,072    |
| 0,018              | 24,906                                      | 60,952     | 149,026    | 191,209    | 216,714    |
| 0,02               | 27,555                                      | 67,374     | 165,381    | 211,876    | 240,423    |

Na podstawie obliczeń deterministycznych wykonanych dla kolejnych zmiennych projektowych wyznaczono w środowisku Maple, przy użyciu metody najmniejszych

kwadratów, wielomiany aproksymujące zależność między  $i$ -tą częstotliwością drgań własnych  $\omega_i$  oraz  $j$ -tym parametrem projektowym  $v_j$ . Wielomiany te mają postać (9.4), gdzie stopień  $n$  wielomianu należy wstępnie przyjąć. Przykładowo dla danych dyskretnych podanych w tabelach 9.1 oraz 9.2 otrzymane wielomiany przedstawiają się następująco:

- dla zmiennej losowo długości  $A$  boku płyty:

$$\omega_1(A) = 9,666A^4 - 92,834A^3 + 336,646A^2 - 555,769A + 367,571, \quad (9.20)$$

$$\omega_2(A) = 17,870A^4 - 171,891A^3 + 627,881A^2 - 1055,285A + 724,306, \quad (9.21)$$

$$\omega_3(A) = 46,770A^4 - 444,788A^3 + 1599,673A^2 - 2633,789A + 1763,343, \quad (9.22)$$

$$\omega_4(A) = 59,790A^4 - 568,288A^3 + 2042,458A^2 - 3361,742A + 2254,036, \quad (9.23)$$

$$\omega_5(A) = 68,213A^4 - 648,462A^3 + 2330,546A^2 - 3833,383A + 2564,518, \quad (9.24)$$

- dla zmiennej losowo grubości  $H$  płyty:

$$\begin{aligned} \omega_1(H) = & -2,025 \cdot 10^{11}H^5 + 1,186 \cdot 10^4H^4 - 2,551 \cdot 10^8H^3 + \\ & + 2,418 \cdot 10^6H^2 - 7824,962H + 8,356, \end{aligned} \quad (9.25)$$

$$\begin{aligned} \omega_2(H) = & -7,291 \cdot 10^{13}H^6 + 5,382 \cdot 10^{12}H^5 - 1,578 \cdot 10^{11}H^4 + \\ & + 2,322 \cdot 10^9H^3 - 1,767 \cdot 10^7H^2 + 65948,422H - 65,891, \end{aligned} \quad (9.26)$$

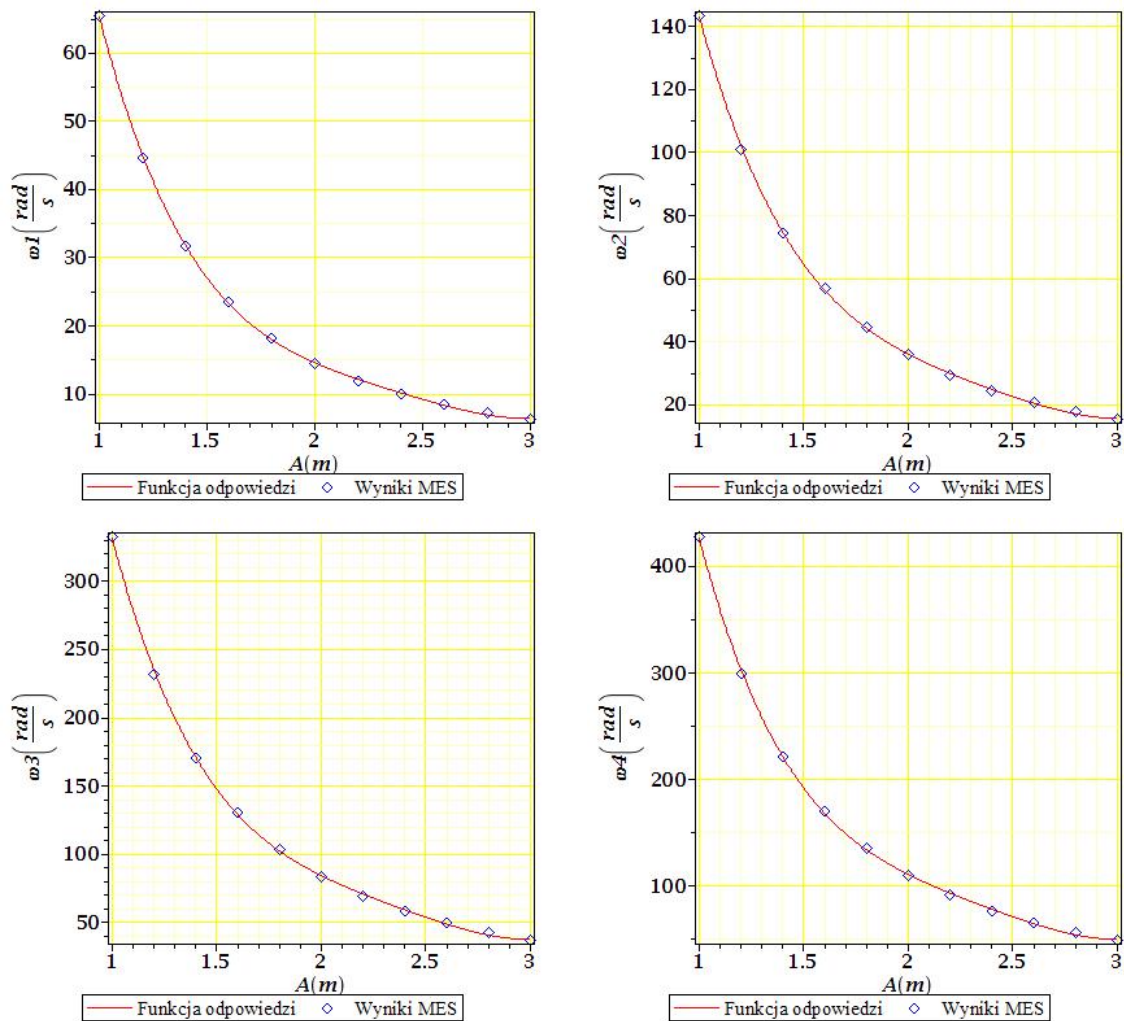
$$\omega_3(H) = 5,329 \cdot 10^6H^3 - 190281,629H^2 + 10096,878H - 2,561, \quad (9.27)$$

$$\omega_4(H) = 6,701 \cdot 10^6H^3 - 200082,619H^2 + 11439,740H + 10,369, \quad (9.28)$$

$$\omega_5(H) = 374271,562H^3 + 34388,054H^2 + 10435,340H + 15,334. \quad (9.29)$$

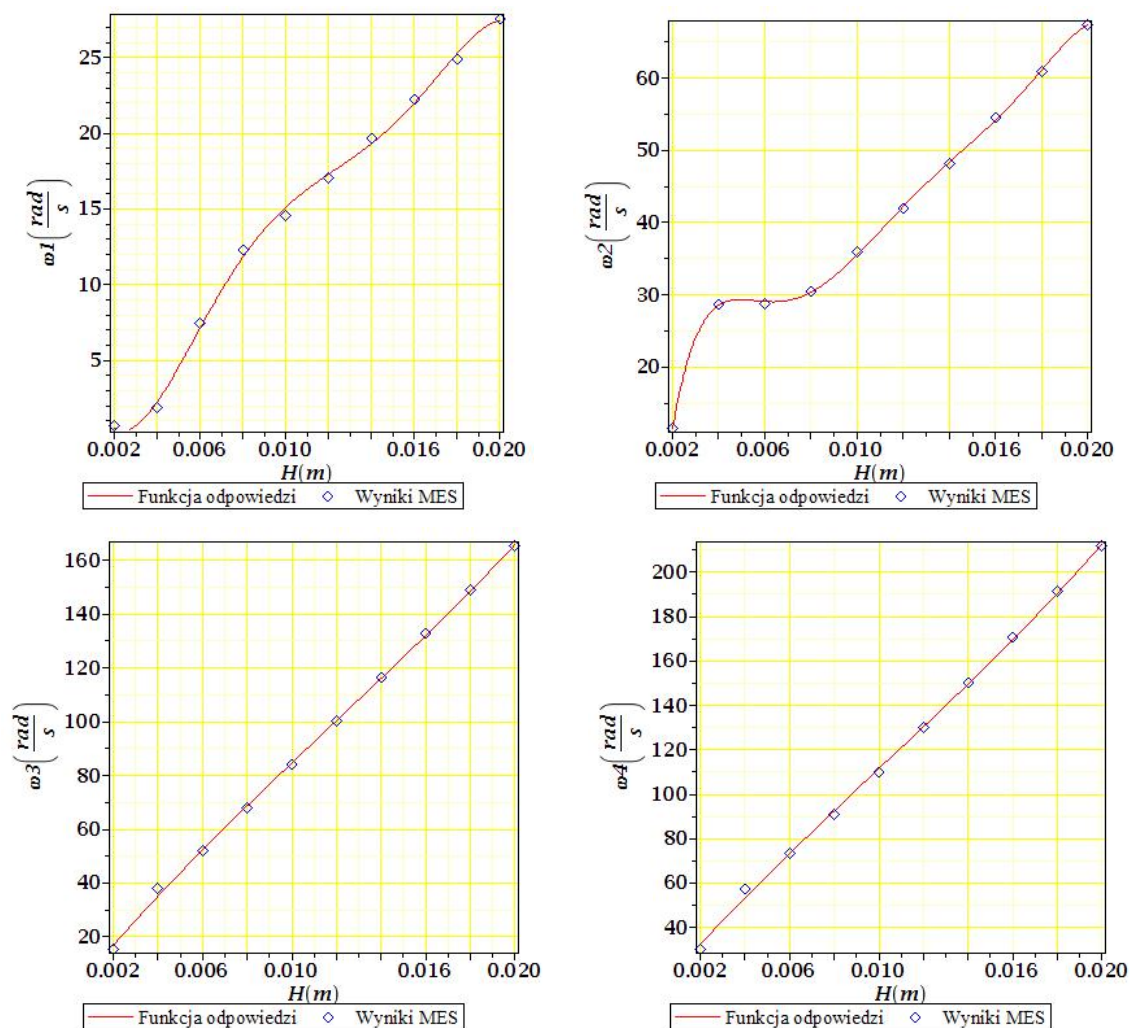
Na rysunkach 9.1–9.2 pokazano wykresy wielomianów wyrażonych wzorami odpowiednio (9.20)–(9.23) oraz (9.25)–(9.28) jako zależności długości  $A$  boku lub grubości  $H$  płyty. Wielomiany te nazywa się krzywymi dopasowania lub funkcjami odpowiedzi. Na wykresach naniesiono również, w postaci dyskretnego zbioru punktów, wyniki obliczeń deterministycznych zestawione w tabelach 9.1 oraz 9.2.

W celu wyznaczenia parametrów projektowych mających istotne znaczenie w analizie losowej wykonano obliczenia deterministyczne, analogiczne do tych przedstawionych w tabelach 9.1 oraz 9.2, dla wszystkich badanych parametrów projektowych. Następnie wyznaczono wzory odpowiednich wielomianowych krzywych dopasowania  $\omega_i(v_j)$ , gdzie  $v_j$  oznacza  $j$ -ty parametr projektowy. Na podstawie postaci funkcji  $\omega_1(v_j)$  odpowiadających pierwszej częstotliwości drgań własnych wyznaczono wartości



Rysunek 9.1. Wykresy wielomianów wyrażonych wzorami (9.20)–(9.23) wraz z wynikami obliczeń deterministycznych zestawionymi w tabeli 9.1

znormalizowanego gradientu wrażliwości zgodnie ze wzorem (9.7). Odpowiednie wyniki zestawiono w tabeli 9.3. Analizując wartości zawarte w tej tabeli, można wyciągnąć wniosek, że parametrami projektowymi najbardziej wrażliwymi na zjawiska losowe są grubość płyty oraz długość jej boku. Dla tych parametrów otrzymano największą dodatnią i największą ujemną wartość gradientu wrażliwości, odpowiednio 1,136 oraz  $-1,908$ . Zatem te dwie wielkości użyto w dalszej analizie losowej. Założono, że oba badane geometryczne parametry projektowe są zmiennymi losowymi charakteryzowanymi przez rozkład Gaussa o wartości oczekiwanej  $\mu$  równej wartości średniej danego parametru oraz odchyleniu standardowym  $\sigma = \alpha\mu$  związanym z wartością oczekiwaną współczynnikiem niepewności wejściowej  $\alpha$  zmieniającym się w zakresie 0%–20%. Współczynnik  $\alpha$  określa się też jako współczynnik zmienności



Rysunek 9.2. Wykresy wielomianów wyrażonych wzorami (9.25)–(9.28) wraz z wynikami obliczeń deterministycznych zestawionymi w tabeli 9.2

lub współczynnik wariancji zmiennej projektowej. Przyjęty szeroki zakres współczynnika  $\alpha$  ma na celu sprawdzenie odpowiadającej zmienności obliczanych charakterystyk dynamicznych.

Na rysunkach 9.3–9.4 przedstawiono wyniki obliczeń czterech charakterystyk probabilistycznych: wartości oczekiwanej, współczynnika zmienności, skośności i kurtozy, które otrzymano przy zastosowaniu metody półanalitycznej. Każdą z tych charakterystyk wyznaczono dla pięciu pierwszych częstości drgań własnych płyty ( $\omega_1$ – $\omega_5$ ). Wykresy na rysunkach 9.3 oraz 9.4 dotyczą odpowiednio losowo zmiennej długości boku oraz grubości płyty. Na wykresach pokazane zostały zależności poszczególnych charakterystyk probabilistycznych od współczynnika zmienności (niepewności wejściowej) rozpatrywanej zmiennej projektowej – długości boku lub gru-

Tabela 9.3. Wartości znormalizowanego gradientu wrażliwości płyty z przykładu 9.1 otrzymane dla kolejnych parametrów projektowych mających wpływ na jej pierwszą częstość drgań własnych [86]

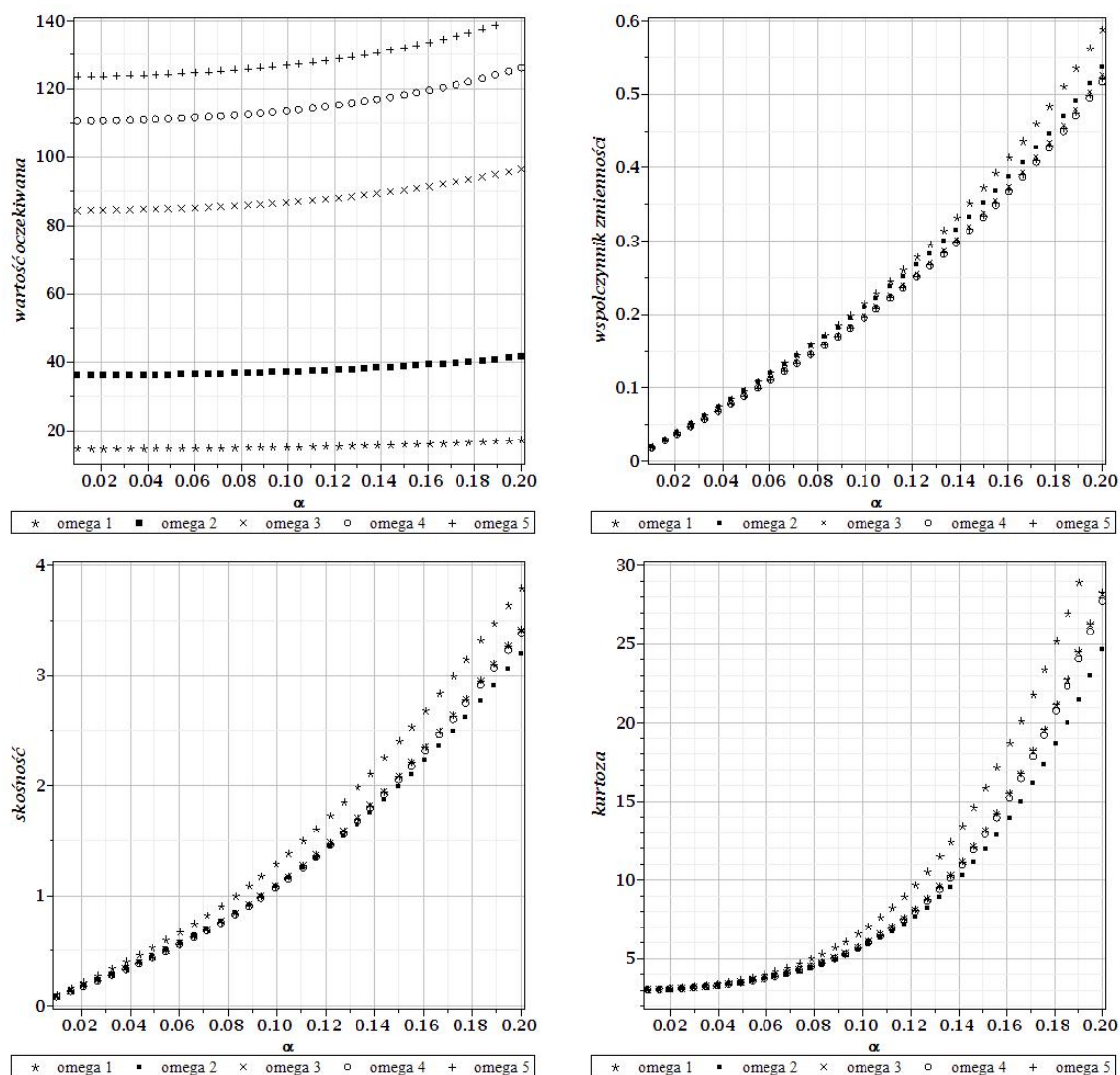
| Nazwa zmiennej projektowej             | Oznaczenie zmiennej projektowej | Znormalizowany gradient wrażliwości |
|----------------------------------------|---------------------------------|-------------------------------------|
| Długość boku płyty                     | $A$ [m]                         | -1,908                              |
| Grubość płyty                          | $H$ [m]                         | 1,136                               |
| Moduł Younga                           | $E$ [Pa]                        | 0,474                               |
| Współczynnik Poissona                  | $\nu$ [-]                       | 0,067                               |
| Gęstość materiału płyty                | $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]     | -0,585                              |
| Sztywność elementu sprężystego tłumika | $k_0$ [N/m]                     | 0,0109                              |
| Sztywność elementu Maxwella tłumika    | $k_1$ [N/m]                     | -0,0709                             |
| Lepkość elementu Maxwella tłumika      | $c_1$ [Ns/m]                    | 0,164                               |
| Temperatura referencyjna               | $T_0$ [°C]                      | 0,0189                              |
| Temperatura otoczenia                  | $T$ [°C]                        | -0,0295                             |

bości płyty. Obliczenia przeprowadzono z użyciem definicji całkowych (9.8)–(9.13) przy zastosowaniu oprogramowania Maple. Można zatem przyjąć je jako dokładne w kontekście probabilistycznym.

Analizując wykresy przedstawione na rysunkach 9.3–9.4, można wyciągnąć kilka wniosków końcowych odnośnie zmienności pięciu częstości drgań własnych w zależności od losowości wpływających na nie geometrycznych parametrów projektowych.

Z rysunku 9.3 wynika, że zwiększanie wartości współczynnika zmienności  $\alpha$  długości boku płyty powoduje nieliniowy wzrost wszystkich charakterystyk probabilistycznych, w tym nawet wartości oczekiwanej pięciu częstości drgań własnych. Natomiast analiza wykresów na rysunku 9.4 pozwala zauważyć, że wykres wartości oczekiwanych dla kolejnych częstości drgań własnych przedstawia funkcje stałe, a skośność i kurtoza nie dla wszystkich częstości są funkcjami rosnącymi.

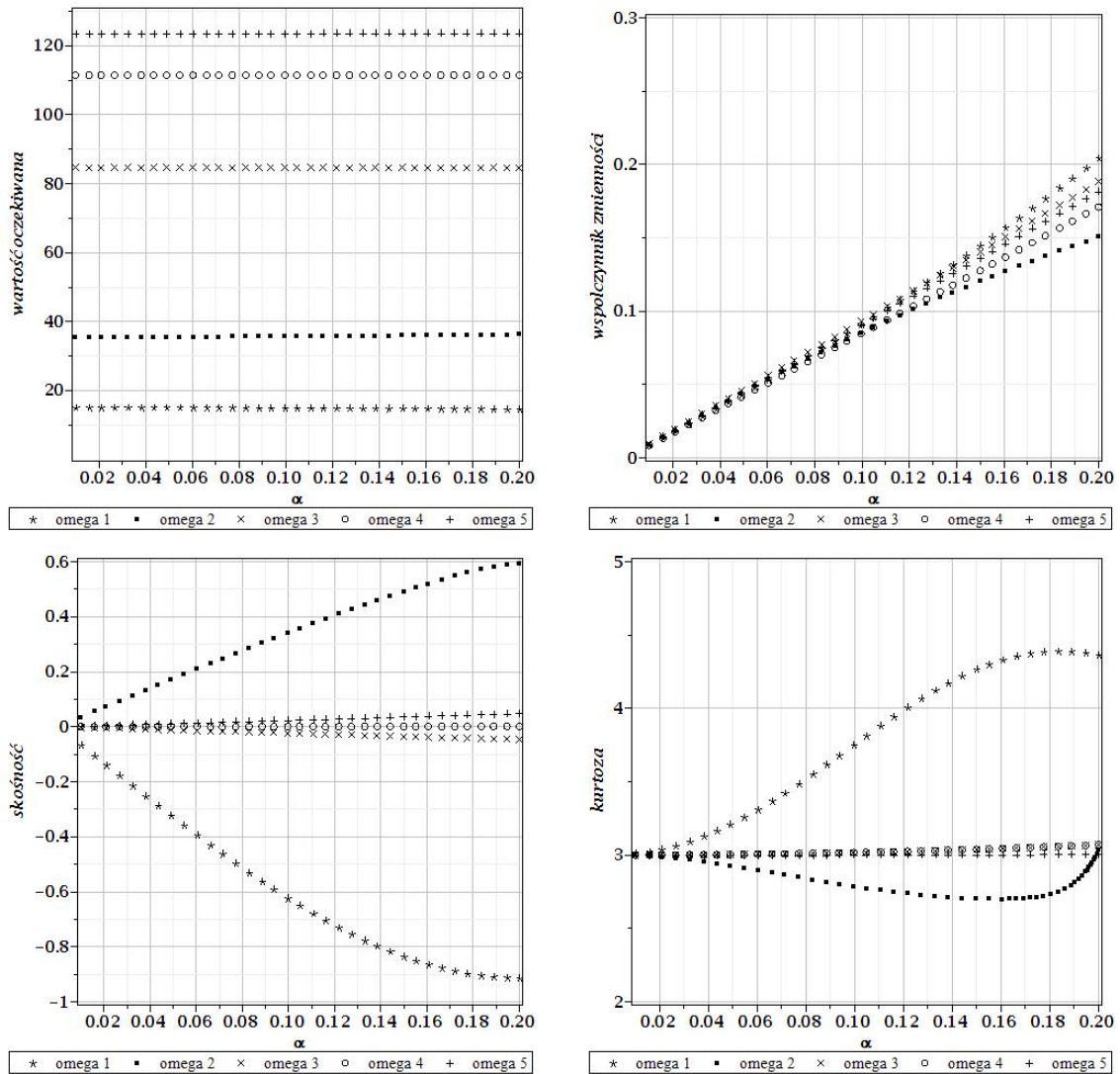
Z obserwacji wykresów współczynnika zmienności na rysunkach 9.3 oraz 9.4 można również wyciągnąć interesujące wnioski. Na wykresie przedstawionym na rysunku 9.3 widać, że iloraz tego współczynnika na wyjściu i na wejściu (tzn. dla obliczanych charakterystyk dynamicznych oraz dla rozważanego parametru projektowego) zbliża się do wartości 3 przy niepewności wejściowej  $\alpha = 0,20$ . Z kolei na odpowiadającym wykresie na rysunku 9.4 iloraz współczynnika zmienności pierwszej częstości drgań własnych oraz współczynnika zmienności grubości płyty jest zbliżony



Rysunek 9.3. Wykresy zależności wartości oczekiwanej, współczynnika zmienności, skośności i kurtozy dla pięciu pierwszych częstości drgań własnych od współczynnika zmienności  $\alpha$  losowo zmiennej długości boku  $A$  płyty z przykładu 9.1 [86]

do jedności. Wartości wyjściowego współczynnika zmienności na tym wykresie, nie przekraczające 20%, wskazują na małą zmienność badanej cechy (częstość drgań) ze względu na zmienność grubości płyty<sup>4</sup>. Natomiast na wykresie z rysunku 9.3 począwszy od niepewności wejściowej  $\alpha = 12\%$ , analizowany współczynnik przekracza 25%, co wskazuje na przeciętną zmienność badanej cechy. Dla wartości  $\alpha > 18\%$ , odpowiadające wartości współczynnika zmienności pierwszej częstości drgań prze-

<sup>4</sup> Badana cecha  $X$  wykazuje małą zmienność dla współczynnika zmienności  $\alpha(X) < 25\%$ . Zmienność tej cechy jest przeciętna dla  $25\% < \alpha(X) < 45\%$  oraz silna dla  $45\% < \alpha(X) < 100\%$  (źródło: <https://obliczeniastatystyczne.pl/wspolczynnik-zmienności/>).



Rysunek 9.4. Wykresy zależności wartości oczekiwanej, współczynnika zmienności, skośności i kurtozy dla pięciu pierwszych częstości drgań własnych od współczynnika zmienności  $\alpha$  losowo zmiennej grubości  $H$  płyty z przykładu 9.1 [86]

kraczącą 45%, z czego wynika silna zmienność badanej cechy. Największe rozproszenie wyników względem wartości średniej zostaje w obu przypadkach osiągnięte dla pierwszej częstości drgań własnych, na co wskazują największe osiągnięte wartości współczynnika zmienności.

Wykres skośności na rysunku 9.3, wykonany przy założeniu losowo zmiennej długości boku płyty, jest dla wszystkich częstości drgań własnych monotonicznie rosnący i przyjmuje wartości dodatnie. Zatem asymetria rozkładu prawdopodobieństwa częstości drgań jest w tym przypadku prawostronna (z wydłużonym prawym ogonem)

i rośnie wraz ze wzrostem niepewności wejściowej  $\alpha$ . Wykresy odnoszące się do kolejnych częstości drgań są do siebie zbliżone. Z kolei wykres skośności na rysunku 9.4, dotyczący losowo zmiennej grubości płyty, jest monotonicznie malejący dla pierwszej częstości drgań, monotonicznie rosnący dla drugiej, a w przypadku pozostałych częstości przyjmuje wartości bliskie zeru. Zatem rozkład prawdopodobieństwa pierwszej częstości drgań własnych wykazuje asymetrię lewostronną (z wydłużonym lewym ogonem). Asymetria rozkładu drugiej częstości jest prawostronna, a dla pozostałych częstości rozkład prawdopodobieństwa jest zbliżony do symetrycznego<sup>5</sup>.

Wartości kurtozy na rysunku 9.3 są większe od 3, a zatem w przypadku każdej z pięciu częstości drgań własnych rozkład prawdopodobieństwa jest leptokurtyczny, z czego wynika duży stopień koncentracji wyników wokół wartości średniej w odniesieniu do rozkładu normalnego<sup>6</sup>. Wykresy odnoszące się do pięciu częstości drgań są do siebie zbliżone, a największe osiągane wartości kurtozy dotyczą częstości pierwszej. Z wykresów na rysunku 9.4 wynika, że dla częstości od  $\omega_3$  do  $\omega_5$  kurtoza przyjmuje wartości bliskie 3, co wskazuje na rozkład prawdopodobieństwa zbliżony do normalnego (mezokurtyczny). W przypadku pierwszej częstości drgań własnych wykres kurtozy jest rosnący dla niepewności wejściowej  $\alpha$  przyjmującej wartości poniżej 18%, a następnie można zaobserwować niewielką tendencję malejącą. Wartości kurtozy większe od 3 wskazują na leptokurtyczny rozkład prawdopodobieństwa pierwszej częstości drgań własnych. Dla drugiej częstości rozkład jest platykurtyczny ze względu na wartości kurtozy mniejsze od 3, tzn. skupienie wyników wokół wartości średniej jest mniejsze w porównaniu z rozkładem normalnym. Wykres kurtozy w tym przypadku jest malejący dla  $0\% < \alpha < 16\%$ , a następnie rośnie aż do osiągnięcia wartości 3 dla  $\alpha = 20\%$ .

Na zakończenie niniejszego przykładu zestawiono najważniejsze informacje wynikające z powyższych obserwacji, podsumowujące analizę sporządzonych wykresów czterech charakterystyk probabilistycznych:

<sup>5</sup> Rozkład prawdopodobieństwa badanej cechy  $X$  jest symetryczny, gdy wartość skośności  $\beta(X) = 0$ . Asymetria rozkładu tej cechy jest prawostronna (wydłużony prawy ogon rozkładu) dla  $\beta(X) > 0$  oraz lewostronna (wydłużony lewy ogon rozkładu) dla  $\beta(X) < 0$  (źródło: <https://predictivesolutions.pl/skosnosc-i-kurtoza>).

<sup>6</sup> Rozkład badanej cechy  $X$  jest normalny (mezokurtyczny), jeśli jej kurtoza wynosi  $\kappa(X) = 3$ . W przypadku gdy  $\kappa(X) > 3$ , rozkład jest leptokurtyczny, tzn. bardziej wysmukły niż normalny (z większym skupieniem wartości wokół średniej). Z kolei dla  $\kappa(X) < 3$  rozkład cechy jest platykurtyczny, czyli mniej wysmukły (bardziej spłaszczony) niż normalny (źródło: <https://mfiles.pl/pl/index.php/Kurtoza>).

- W przypadku zmiennej losowo długości  $A$  boku płyty (rysunek 9.3):
  - niepewność wejściowa  $\alpha(A)$  w sposób istotny wpływa na częstości drgań własnych od trzeciej do piątej ze względu na monotonicznie rosnące wykresy wartości oczekiwanych tych częstości,
  - wartości oczekiwane pierwszej i drugiej częstości drgań własnych są funkcjami stałymi lub zbliżonymi do stałych,
  - niewielka zmiana analizowanego parametru projektowego  $A$  może spowodować istotną zmianę badanej cechy (częstości drgań własnych),
  - im większe wartości współczynnika zmienności  $\alpha(A)$ , tym większa jest prawostronna asymetria oraz leptokurtyczność rozkładu prawdopodobieństwa badanych częstości drgań własnych.
- W przypadku zmiennej losowo grubości  $H$  płyty (rysunek 9.4):
  - zależności wartości oczekiwanych częstości drgań własnych od współczynnika zmienności  $\alpha(H)$  parametru projektowego  $H$  są funkcjami stałymi,
  - rozkład prawdopodobieństwa częstości drgań własnych od trzeciej do piątej jest zbliżony do rozkładu normalnego,
  - rozkład prawdopodobieństwa pierwszej i drugiej częstości drgań własnych płyty wykazuje odstępstwo od rozkładu normalnego, zwiększające się wraz ze wzrostem niepewności wejściowej  $\alpha(H)$ .

**Przykład 9.2.** [89, 115] *Analiza probabilistyczna płyty prostokątnej wyposażonej w lepkosprężyste tłumiki drgań opisane modelem ułamkowym*

Analizie probabilistycznej poddano płytę kwadratową, którą rozpatrywano w przykładzie 8.2. Jest to zatem płyta o długości boku  $A = 2,0$  m i grubości  $H = 0,01$  m, utwierdzona na prawej i dolnej krawędzi oraz swobodnie podparta na krawędzi górnej zgodnie z rysunkiem 8.1b). Płytę wykonano z materiału posiadającego moduł Younga  $E = 205$  GPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$  i gęstość objętościową  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. W obliczeniach numerycznych przyjęto dyskretyzację przy pomocy siatki MES o gęstości  $15 \times 15$ . Do płyty zamocowano cztery tłumiki lepkosprężyste, rozmieszczone zgodnie z optymalnym położeniem wyznaczonym przy pomocy metody PSO w przykładzie 8.2. Przyjętą lokalizację tłumików przedstawiono na rysunku 8.9e). Tłumiki lepkosprężyste zamocowane do płyty opisano modelem ułamkowym zawierającym jeden element sprężysty i jeden element Maxwella<sup>7</sup> (rysunek 7.5).

Analizę losową przeprowadzono dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych płyty, które zależą od następujących parametrów projektowych:

<sup>7</sup> W przykładzie 8.2 zastosowano uogólniony model Maxwella do opisu tłumików.

a) parametry materiałowe płyty:

- moduł Younga
  - wartość średnia:  $\bar{E} = 205$  GPa,
  - zbiór wartości parametru:  $E \in \{180, 185, 190, \dots, 230\}$  GPa,
- współczynnik Poissona
  - wartość średnia:  $\bar{\nu} = 0,3$ ,
  - zbiór wartości parametru:  $\nu \in \{0,25, 0,26, 0,27, \dots, 0,35\}$ ,

b) parametry tłumików zamocowanych do płyty:

- sztywność elementu sprężystego
  - wartość średnia:  $\bar{k}_0 = 110$  N/m,
  - zbiór wartości parametru:  $k_0 \in \{95, 98, 101, \dots, 125\}$  N/m,
- parametr sztywności elementu Maxwella
  - wartość średnia:  $\bar{k}_1 = 20000$  N/m,
  - zbiór wartości parametru:  $k_1 \in \{17500, 18000, 18500, \dots, 22500\}$  N/m,
- parametr lepkości elementu Maxwella
  - wartość średnia:  $\bar{c}_1 = 230$  Ns/m,
  - zbiór wartości parametru:  $c_1 \in \{205, 210, 215, \dots, 255\}$  Ns/m,
- rząd pochodnej ułamkowej opisującej element Maxwella
  - wartość średnia:  $\bar{\alpha}_d = 0,6$ ,
  - zbiór wartości parametru:  $\alpha_d \in \{0,50, 0,52, 0,54, \dots, 0,70\}$ .

Założono wstępnie, że każda z powyższych wielkości może odgrywać rolę zmiennej losowej. Wykonano zatem dla kolejnych parametrów projektowych serie obliczeń deterministycznych w sposób analogiczny jak w przykładzie 9.1. Po przeprowadzeniu wstępnej analizy uzyskanych wartości częstości drgań własnych wybrano trzy parametry projektowe: moduł Younga, współczynnik Poissona oraz parametr  $\alpha_d$  tłumika lepko-sprężystego w celu wykonania badań w zakresie probabilistycznym. Obliczenia deterministyczne dla tych trzech parametrów zestawiono w tabeli 9.4. Na ich podstawie wyznaczono zależności funkcyjne wiążące pierwszą i drugą częstość drgań własnych z odpowiednimi parametrami projektowymi. Funkcje wyznaczono jako wielomiany trzeciego stopnia przy zastosowaniu metody najmniejszych kwadratów. Przyjmują one następujące postacie:

- dla zmiennej losowo modułu Younga:

$$\omega_1(E) = 4,783 \cdot 10^{-7} E^3 - 4,932 \cdot 10^{-4} E^2 + 0,306 E + 22,743, \quad (9.30)$$

$$\omega_2(E) = 1,011 \cdot 10^{-6} E^3 - 1,035 \cdot 10^{-3} E^2 + 0,635 E + 44,005, \quad (9.31)$$

- dla zmiennego losowo współczynnika Poissona:

$$\omega_1(\nu) = 8,333\nu^3 + 16,536\nu^2 - 2,208\nu + 67,839, \quad (9.32)$$

$$\omega_2(\nu) = 82,226\nu^3 + 9,887\nu^2 - 3,025\nu + 137,165, \quad (9.33)$$

- dla zmiennego losowo parametru  $\alpha_d$  tłumika:

$$\omega_1(\alpha_d) = 10,817\alpha_d^3 - 14,190\alpha_d^2 + 8,417\alpha_d + 66,611, \quad (9.34)$$

$$\omega_2(\alpha_d) = 9,710\alpha_d^3 - 12,958\alpha_d^2 + 7,080\alpha_d + 137,686. \quad (9.35)$$

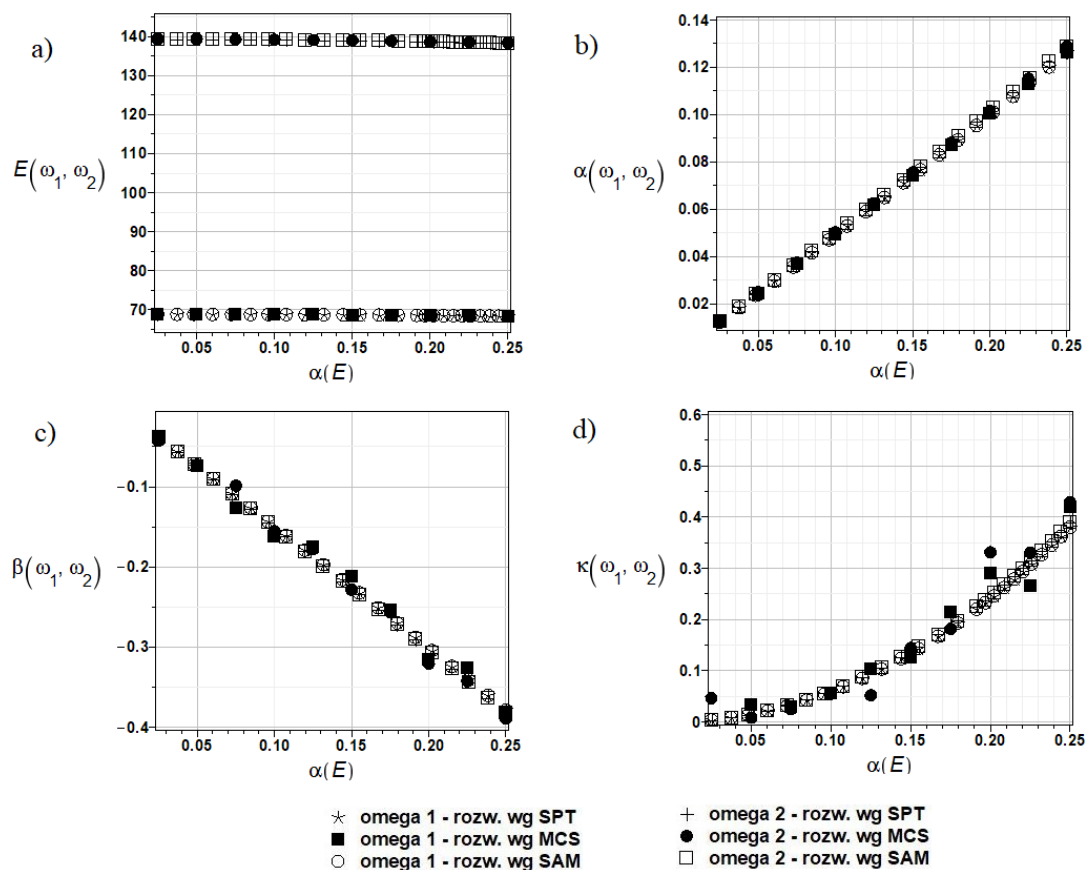
Tabela 9.4. Wartości dwóch pierwszych częstości drgań własnych płyty z przykładu 9.2 otrzymane przy założeniu trzech zmiennych losowo parametrów projektowych: modułu Younga ( $E$ ), współczynnika Poissona ( $\nu$ ), rzędu pochodnej ułamkowej ( $\alpha_d$ ) tłumika [115]

| $E$<br>[GPa] | $\omega_1$<br>[rad/s] | $\omega_2$<br>[rad/s] | $\nu$<br>[ - ] | $\omega_1$<br>[rad/s] | $\omega_2$<br>[rad/s] | $\alpha_d$<br>[ - ] | $\omega_1$<br>[rad/s] | $\omega_2$<br>[rad/s] |
|--------------|-----------------------|-----------------------|----------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|-----------------------|-----------------------|
| 180          | 64,653                | 130,643               | 0,25           | 68,451                | 138,312               | 0,50                | 68,625                | 139,201               |
| 185          | 65,522                | 132,434               | 0,26           | 68,529                | 138,492               | 0,52                | 68,672                | 139,229               |
| 190          | 66,381                | 134,201               | 0,27           | 68,612                | 138,687               | 0,54                | 68,722                | 139,260               |
| 195          | 67,227                | 135,945               | 0,28           | 68,700                | 138,900               | 0,56                | 68,774                | 139,293               |
| 200          | 68,064                | 137,667               | 0,29           | 68,793                | 139,124               | 0,58                | 68,830                | 139,328               |
| 205          | 68,890                | 139,367               | 0,30           | 68,890                | 139,367               | 0,60                | 68,890                | 139,367               |
| 210          | 69,706                | 141,047               | 0,31           | 68,992                | 139,627               | 0,62                | 68,953                | 139,409               |
| 215          | 70,512                | 142,707               | 0,32           | 69,099                | 139,904               | 0,64                | 69,021                | 139,455               |
| 220          | 71,310                | 144,348               | 0,33           | 69,211                | 140,199               | 0,66                | 69,095                | 139,506               |
| 225          | 72,098                | 145,970               | 0,34           | 69,327                | 140,511               | 0,68                | 69,174                | 139,562               |
| 230          | 72,878                | 147,574               | 0,35           | 69,449                | 140,843               | 0,70                | 69,261                | 139,624               |

Wielomiany określone wzorami (9.30)–(9.35) użyto bezpośrednio do wyznaczenia charakterystyk probabilistycznych metodą półanalityczną (SAM) oraz metodą Monte-Carlo (MCS). Z kolei w uogólnionej metodzie perturbacji stochastycznej (SPT) wykonano aproksymację otrzymanych funkcji wielomianowych przez rozwinięcie ich w szereg potęgowy Taylora w otoczeniu wartości średniej, używając parametr perturbacji  $\varepsilon > 0$ .

Na rysunku 9.5 przedstawiono wykresy czterech charakterystyk probabilistycznych (wartość oczekiwana, współczynnik zmienności, skośność, kurtoza) dla dwóch

pierwszych częstości drgań własnych układu płyta–tłumiki. Odpowiednie charakterystyki pokazano jako zależności od niepewności wejściowej (współczynnika zmienności) rozpatrywanej losowej zmiennej projektowej, którą w rozważanym przypadku jest moduł Younga. Charakterystyki probabilistyczne wyznaczono trzema metodami: półanalityczną, symulacyjną Monte-Carlo i perturbacji stochastycznej.



Rysunek 9.5. Wykresy zależności wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od współczynnika zmienności  $\alpha(E)$  modułu Younga, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), symulacyjnej Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115]

Analizując wykres przedstawiony na rysunku 9.5b), można wyciągnąć wniosek, że wartości współczynnika zmienności  $\alpha(\omega_1, \omega_2)$ , nie przekraczające 14% oraz mniejsze od odpowiadających wartości współczynnika zmienności  $\alpha(E)$ , wskazują na małą zmienność badanych funkcji  $(\omega_1, \omega_2)$  częstości drgań ze względu na losowość modułu Younga. Ujemne wartości skośności na rysunku 9.5c) oznaczają lewostronną asymetrię rozkładu prawdopodobieństwa badanej cechy.

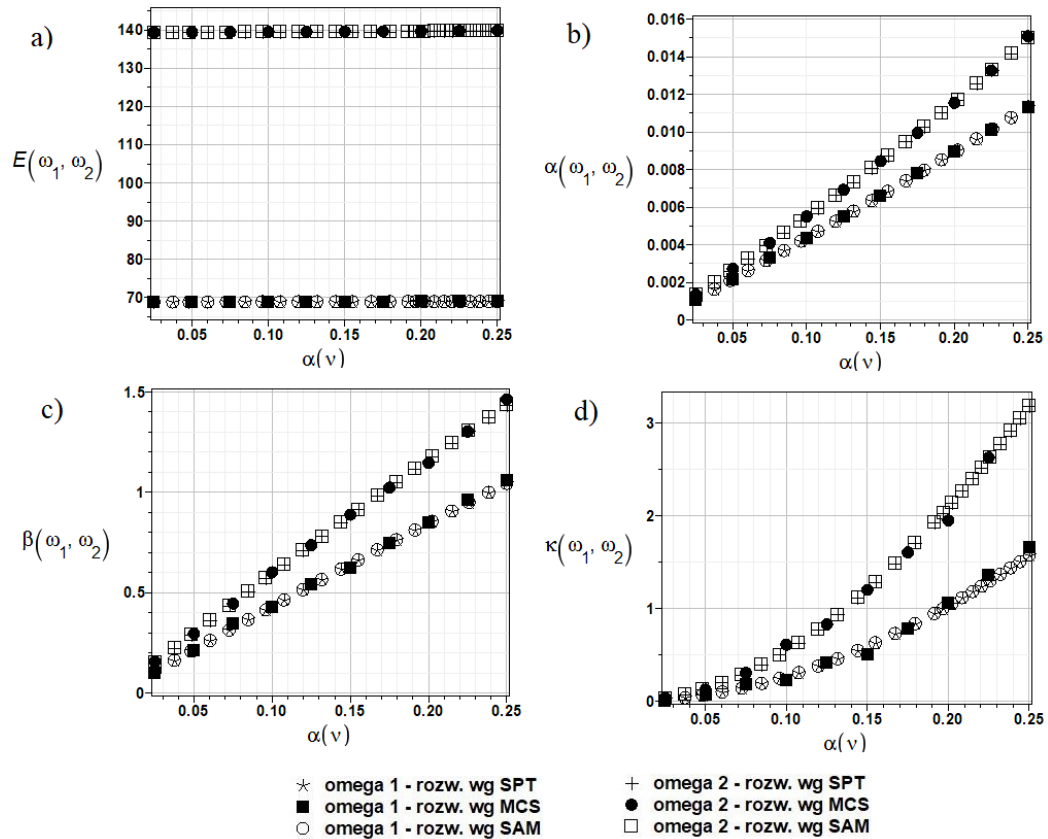
Wykres kurtozy na rysunku 9.5d) wymaga pewnego wyjaśnienia. W przykładzie 9.1 kurtozę obliczano bezpośrednio ze wzoru (9.13). Natomiast obecnie zasto-

sowano wzór poniższy:

$$\kappa(\omega_i) = \frac{\mu_4(\omega_i)}{\sigma^4(\omega_i)} - 3. \quad (9.36)$$

Kurtozę wyznaczoną ze wzoru (9.36) nazywa się też współczynnikiem ekscesu, dla którego stopień odstępstwa od rozkładu normalnego określa się przez porównywanie jego wartości z zerem. Wartości dodatnie wskazują na rozkład leptokurtyczny, a ujemne na rozkład platykurtyczny. W przypadku definicji kurtozy zgodnie ze wzorem (9.13) wartością porównawczą była liczba 3. Z rysunku 9.5d) wynika zatem, że kurtoza przyjmuje wartości dodatnie, rosnące wraz ze wzrostem  $\alpha(E)$ . Zatem można stwierdzić, że rozkład prawdopodobieństwa jest leptokurtyczny, z większym skupieniem obserwacji wokół wartości średniej w porównaniu z rozkładem normalnym.

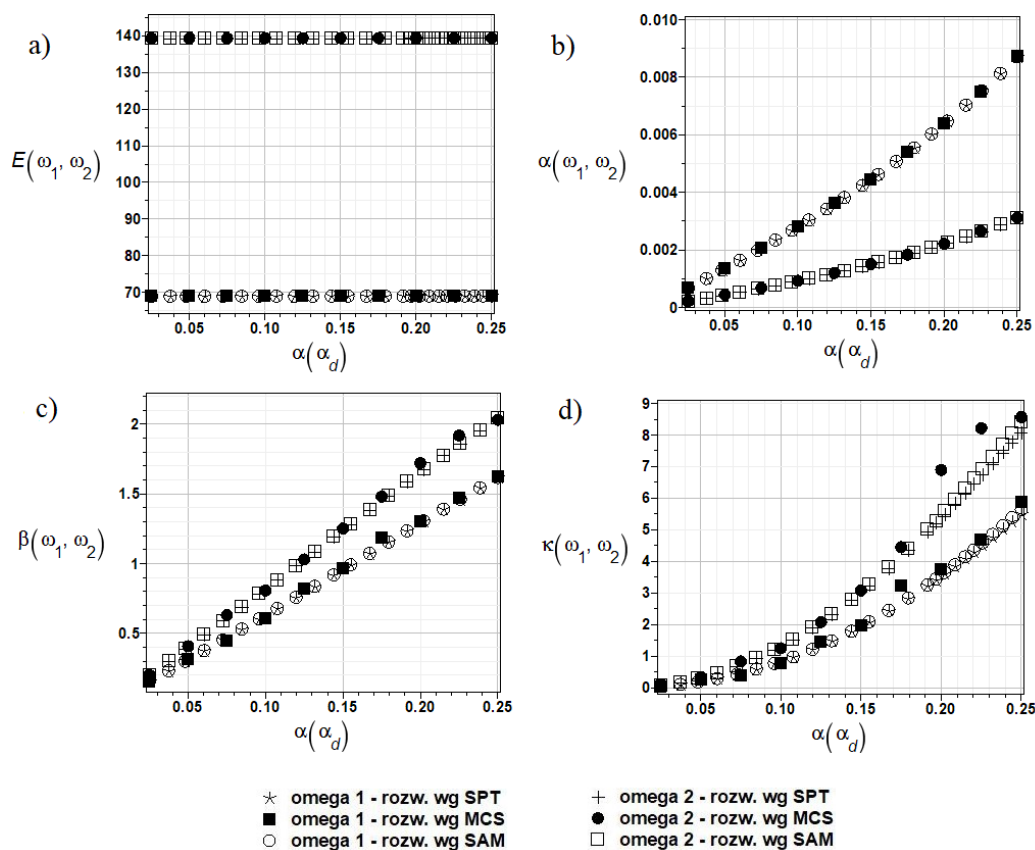
Na rysunku 9.6 przedstawiono wykresy analogiczne do tych z rysunku 9.5, ale dotyczące zmiennego losowo współczynnika Poissona. Wykres wartości oczekiwanej z rysunku 9.6a) nie uległ zasadniczym zmianom w porównaniu z przypadkiem lo-



Rysunek 9.6. Wykresy zależności wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej  $\alpha(v)$  współczynnika Poissona, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115]

sowo zmiennego modułu Younga. Natomiast wartości współczynnika zmienności na rysunku 9.6b) są bliskie zeru, nie przekraczające 1,6%, co wskazuje na mało znaczącą zmienność częstości drgań własnych ze względu na losowość współczynnika Poissona. Jednak można zauważyć wyraźną różnicę między wykresami współczynnika zmienności dla pierwszej i drugiej częstości drgań w porównaniu z rysunkiem 9.5b), gdzie wykresy te praktycznie nakładały się na siebie. Wartości skośności na rysunku 9.6c) są dodatnie, co wskazuje na asymetrię prawostronną rozkładu, większą w porównaniu z przypadkiem zmiennego losowo modułu Younga. Wartości kurtozy na rysunku 9.6d) są również dodatnie i przekraczają wartość 3 w przypadku drugiej częstości drgań własnych, a więc koncentracja rozkładu wokół wartości średniej jest jeszcze większa w odniesieniu do wykresu z rysunku 9.5d).

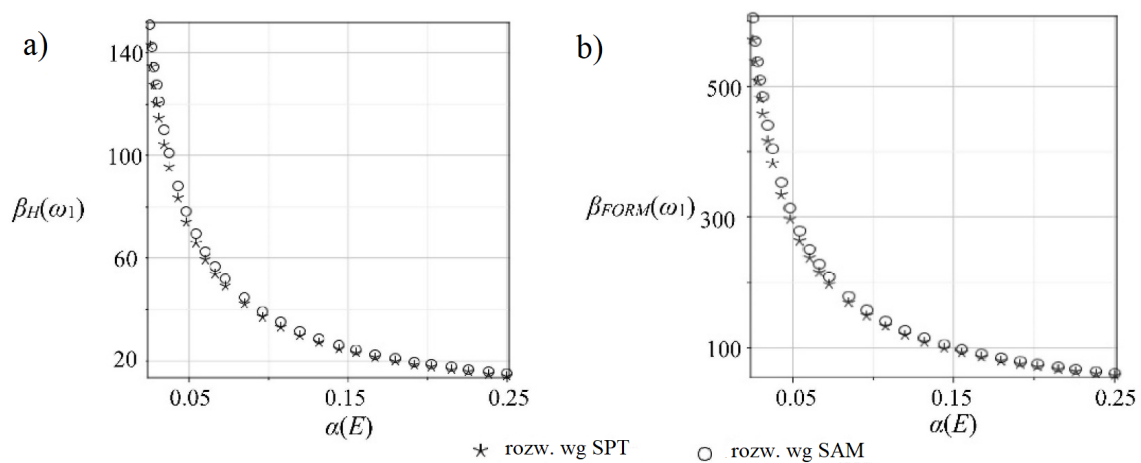
Rysunek 9.7 przedstawia analizę losową przy założeniu zmiennego parametru  $\alpha_d$  charakteryzującego tłumiki lepkosprężyste opisane modelem ułamkowym. Losowość



Rysunek 9.7. Wykresy zależności wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej  $\alpha(\alpha_d)$  parametru  $\alpha_d$  tłumików, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), symulacyjnej Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115]

tego parametru, podobnie jak w poprzednich przypadkach, nie wpłynęła na istotną zmianę wartości oczekiwanej dwóch pierwszych częstości drgań własnych, co można zobaczyć na rysunku 9.7a). Wartości współczynnika zmienności na rysunku 9.7b) są mniejsze od 1%, a większa zmienność dotyczy pierwszej częstości drgań. Otrzymano zatem najmniejszą zmienność częstości drgań spośród trzech analizowanych parametrów projektowych. W rozpatrywanym przypadku uzyskano największe dodatnie wartości skośności i kurtozy, co wskazuje na większą prawostronną asymetrię i leptokurtyczność rozkładu dwóch pierwszych częstości drgań w porównaniu z dwoma wcześniej rozważanymi przypadkami zmiennych losowo parametrów projektowych  $E$  oraz  $\nu$ .

Na zakończenie niniejszego przykładu analizie poddano zależność dwóch miar bezpieczeństwa od współczynnika zmienności modułu Younga jako losowej zmiennej projektowej. Wzięto pod uwagę miary bezpieczeństwa określone wzorami (9.17) oraz (9.19), a odpowiednie wykresy przedstawiono na rysunku 9.8. Z wykresów



Rysunek 9.8. Wykresy zależności miary niezawodności pierwszego rzędu (a) oraz miary bezpieczeństwa obliczanej według entropii względnej (b) od niepewności wejściowej  $\alpha(E)$  modułu Younga, otrzymane przy użyciu dwóch metod: półanalitycznej (SAM) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) [115]

wynika, że oba wskaźniki  $\beta_H$  oraz  $\beta_{FORM}$  maleją wykładniczo wraz ze wzrostem współczynnika niepewności  $\alpha(E)$ . Zatem im większe jest rozproszenie zmiennego losowo modułu Younga wokół wartości średniej, tym mniejsza jest niezawodność badanego układu płyta–tłumiki, która maleje wraz ze zmniejszaniem się wartości danego współczynnika bezpieczeństwa. Ponadto można zauważyć, że większa niezawodność układu jest wskazywana przez indeks  $\beta_{FORM}$ , czyli miarę bezpieczeństwa pierwszego rzędu, co wynika z wyższych wartości tego indeksu na rysunku 9.8b).

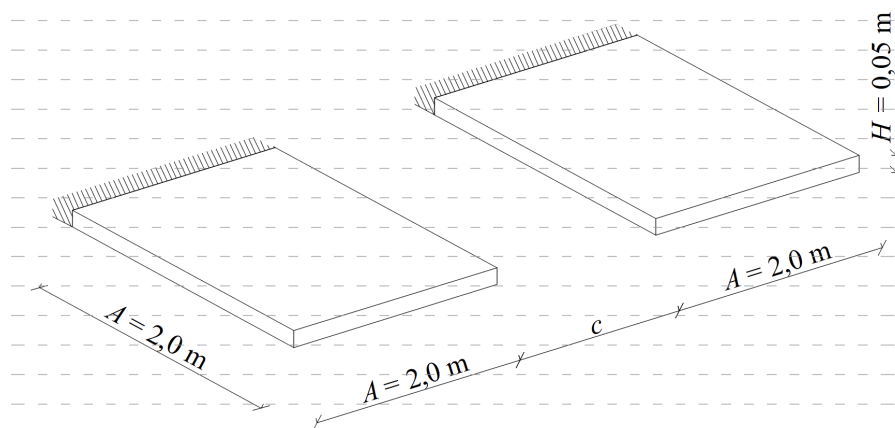
Aby bezpiecznie oszacować niezawodność układu, należałoby więc skorzystać z miary obliczanej przy zastosowaniu entropii względnej i teorii Bhattacharyya. Można wyciągnąć zatem wniosek prognostyczny o konieczności dalszych badań niezawodności elementów konstrukcyjnych wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań opisane modelem ułamkowym z użyciem tej miary bezpieczeństwa.

**Przykład 9.3.** [96] *Analiza probabilistyczna układu dwóch płyt prostokątnych zanurzonych całkowicie w wodzie*

W niniejszym przykładzie rozpatrzono drgania własne układu dwóch płyt prostokątnych zanurzonych całkowicie w płynie. Obliczenia numeryczne dla takich układów, wykonywane przy użyciu metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB, opisane zostały w rozdziale 6 w ujęciu deterministycznym. W obecnie prowadzonych badaniach wykorzystano je jako bazę do analizy probabilistycznej.

Analizę losową przeprowadzono dla układu dwóch płyt kwadratowych o długości boku  $A = 2,0$  m i grubości  $H = 0,05$  m. Płyty wykonano z materiału posiadającego moduł Younga  $E = 205$  GPa, współczynnik Poissona  $\nu = 0,3$  i gęstość  $\rho = 7850$  kg/m<sup>3</sup>. Ponadto przyjęto, że są one zanurzone całkowicie w wodzie o gęstości  $\rho_c = 1000$  kg/m<sup>3</sup>. Podane wartości geometrycznych i materiałowych parametrów projektowych przyjęto jako średnie w analizie losowej.

W pierwszej kolejności rozpatrzono układ dwóch płyt wspornikowych leżących w jednej płaszczyźnie i oddalonych od siebie o odległość  $c$  zgodnie z rysunkiem 9.9. W tabeli 9.5 zestawiono wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych układu uzyskane przy założeniu odległości  $c = 1,0$  m, którą przyjęto jako wartość średnią. Zastosowano dwie kombinacje metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB oraz



Rysunek 9.9. Układ dwóch wspornikowych płyt kwadratowych leżących w jednej płaszczyźnie i zanurzonych całkowicie w cieczy, rozpatrywany w przykładzie 9.3

Tabela 9.5. Wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9 otrzymane przy użyciu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB, dla różnych dyskretyzacji płyt zgodnie z MES, MRS i MEB [96]

|                   |                |                |                |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| Dyskretyzacja MES | $11 \times 11$ | $16 \times 16$ | $21 \times 21$ |
| Dyskretyzacja MEB | $10 \times 10$ | $15 \times 15$ | $20 \times 20$ |
| $\omega_1$        | 37,567         | 38,238         | 38,593         |
| $\omega_2$        | 37,896         | 38,552         | 38,898         |
| $\omega_3$        | 105,684        | 107,693        | 108,786        |
| $\omega_4$        | 105,924        | 107,916        | 109,000        |
| Dyskretyzacja MRS | $10 \times 10$ | $20 \times 20$ | $30 \times 30$ |
| Dyskretyzacja MEB | $5 \times 5$   | $10 \times 10$ | $15 \times 15$ |
| $\omega_1$        | 36,557         | 37,979         | 38,537         |
| $\omega_2$        | 36,939         | 38,312         | 38,854         |
| $\omega_3$        | 121,223        | 117,230        | 116,047        |
| $\omega_4$        | 121,586        | 117,509        | 116,295        |

trzy różne dyskretyzacje płyty za pomocą siatek MES i MRS, którym odpowiada dyskretyzacja na podobszary związane z obecnością cieczy, ustalona zgodnie z zasadami opisanymi w podrozdziałach 6.2 i 6.3.

Dla układu płyt z rysunku 9.9 przeprowadzono analizę losową przy założeniu siatek MES, MRS i siatki podobszarów cieczy o gęstościach odpowiednio:  $16 \times 16$ ,  $30 \times 30$  i  $15 \times 15$ . Przy tak przyjętych dyskretyzacjach porównano końcowe wyniki analizy uzyskane przy zastosowaniu kombinacji metod MES–MEB i MRS–MEB. Dla rozważanego układu płyt zbadano wpływ losowości gęstości cieczy na wartości dwóch pierwszych częstości drgań własnych. Wyniki obliczeń deterministycznych dla przyjętego zbioru wartości gęstości cieczy  $\rho_c \in \{900, 920, 940, \dots, 1100\}$  kg/m<sup>3</sup> zestawiono w tabeli 9.6. Na podstawie tych danych wyznaczono funkcje odpowiedzi w postaci wielomianów trzeciego stopnia. Wielomiany te, będące zależnościami pierwszej i drugiej częstości drgań układu płyt od gęstości cieczy, określone są następującymi wzorami:

- dla kombinacji metod numerycznych MES–MEB:

$$\omega_1(\rho_c) = -3,545 \cdot 10^{-9} \rho_c^3 + 1,717 \cdot 10^{-5} \rho_c^2 - 3,663 \cdot 10^{-2} \rho_c + 61,240, \quad (9.37)$$

$$\omega_2(\rho_c) = -3,399 \cdot 10^{-9} \rho_c^3 + 1,667 \cdot 10^{-5} \rho_c^2 - 3,607 \cdot 10^{-2} \rho_c + 61,347, \quad (9.38)$$

- dla kombinacji metod numerycznych MRS–MEB:

$$\omega_1(\rho_c) = -4,905 \cdot 10^{-9} \rho_c^3 + 2,149 \cdot 10^{-5} \rho_c^2 - 4,129 \cdot 10^{-2} \rho_c + 63,240, \quad (9.39)$$

$$\omega_2(\rho_c) = -3,108 \cdot 10^{-9} \rho_c^3 + 1,603 \cdot 10^{-5} \rho_c^2 - 3,580 \cdot 10^{-2} \rho_c + 61,733. \quad (9.40)$$

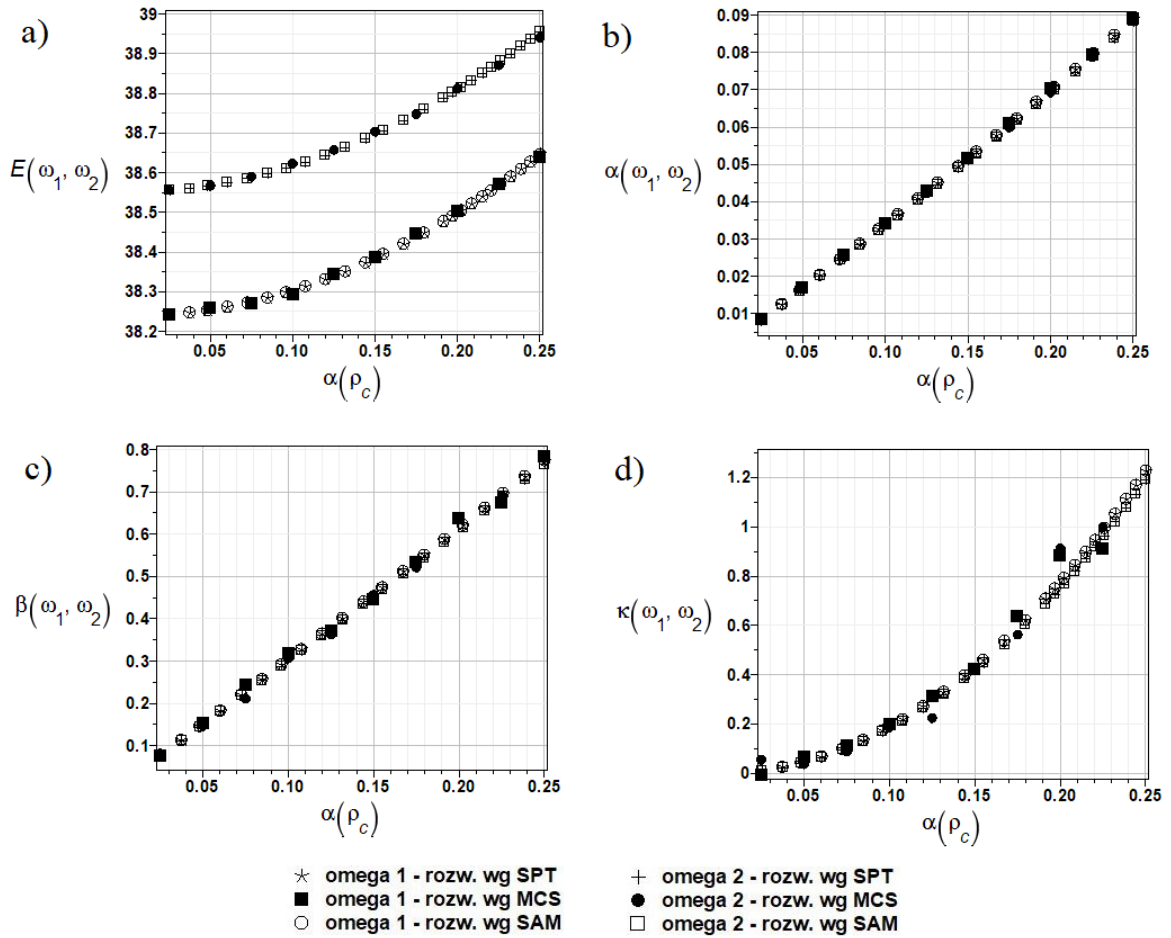
Tabela 9.6. Wartości częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9 otrzymane dla zmiennej losowo gęstości cieczy  $\rho_c$  przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB

| $\rho_c$<br>[kg/m <sup>3</sup> ] | MES–MEB    |            | MRS–MEB    |            |
|----------------------------------|------------|------------|------------|------------|
|                                  | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ |
| 900                              | 39,599     | 39,912     | 39,912     | 40,228     |
| 920                              | 39,315     | 39,629     | 39,625     | 39,942     |
| 940                              | 39,038     | 39,351     | 39,435     | 39,661     |
| 960                              | 38,766     | 39,079     | 39,070     | 39,386     |
| 980                              | 38,499     | 38,813     | 38,801     | 39,117     |
| 1000                             | 38,238     | 38,552     | 38,537     | 38,854     |
| 1020                             | 37,982     | 38,296     | 38,279     | 38,595     |
| 1040                             | 37,732     | 38,045     | 38,026     | 38,342     |
| 1060                             | 37,486     | 37,799     | 37,777     | 38,094     |
| 1080                             | 37,245     | 37,558     | 37,534     | 37,850     |
| 1100                             | 37,008     | 37,321     | 37,295     | 37,611     |

Wykresy przedstawiające wartości czterech charakterystyk probabilistycznych dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych analizowanego układu płyt w zależności od współczynnika zmienności gęstości cieczy  $\alpha(\rho_c)$  pokazano na rysunkach 9.10 oraz 9.11, gdzie w obliczeniach deterministycznych zastosowano kombinacje metod numerycznych odpowiednio MES–MEB i MRS–MEB. Charakterystyki probabilistyczne wyznaczono, podobnie jak w przykładzie 9.2, przy wykorzystaniu metod: półanalitycznej (SAM), perturbacji stochastycznej (SPT) oraz symulacyjnej Monte-Carlo (MCS).

Analizując wykresy przedstawione na rysunkach 9.10 oraz 9.11, można wyciągnąć wniosek, że zastosowanie każdej z kombinacji metod MES–MEB i MRS–MEB skutkuje uzyskaniem zbliżonych do siebie wartości charakterystyk probabilistycznych<sup>8</sup>. Nieco większą różnicę można zauważyć jedynie w przypadku wykresów kurtozy na

<sup>8</sup> tzn. różnice procentowe między wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu MES–MEB i MRS–MEB nie przekraczają 1%

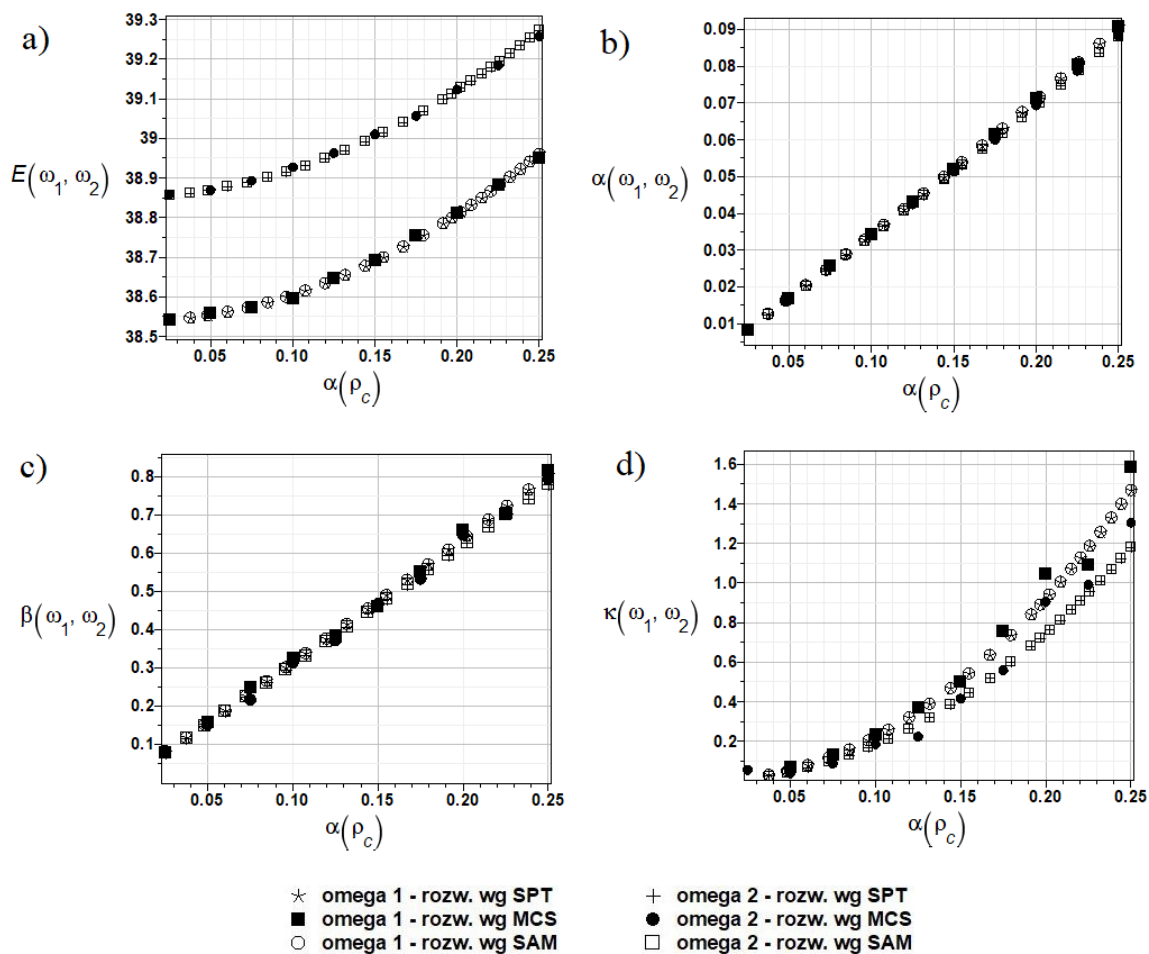


Rysunek 9.10. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej  $\alpha(\rho_c)$  gęstości cieczy  $\rho_c$ , otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9 przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT).

W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MES–MEB [96]

rysunkach 9.10d) oraz 9.11d), gdzie przy użyciu kombinacji MRS–MEB zaznacza się podział między odpowiednimi wartościami odnoszącymi się do pierwszej i drugiej częstości drgań. Wtedy dla pierwszej częstości drgań wartości kurtozy są większe w porównaniu z otrzymanymi na rysunku 9.10d). Na podstawie wykresów wartości oczekiwanej na rysunkach 9.10a) oraz 9.11a) można stwierdzić, że ta charakterystyka rośnie w sposób nieliniowy wraz ze zwiększaniem niepewności wejściowej  $\alpha(\rho_c)$ . Przebieg wykresu współczynnika zmienności oraz skośności na rysunkach 9.10b)–c) oraz 9.11b)–c) wykazuje w przybliżeniu wzrost liniowy. Wartości współczynnika zmienności, nie przekraczające 9%, pozwalają wyciągnąć wniosek o małej zmienności badanej cechy ze względu na zmienność gęstości cieczy. Dodatkowo wartości

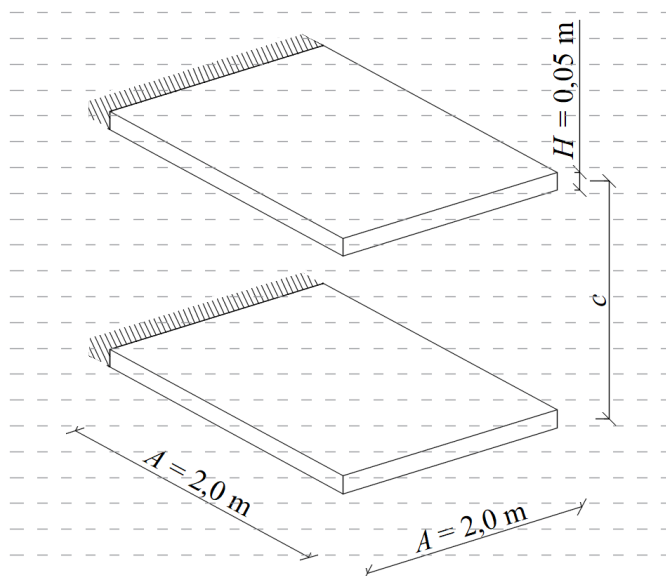
skośności i kurtozy wskazują na prawostronną asymetrię oraz leptokurtyczny rozkład prawdopodobieństwa badanej cechy.



Rysunek 9.11. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej  $\alpha(\rho_c)$  gęstości cieczy  $\rho_c$ , otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.9 przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT).

W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MRS–MEB [96]

Kolejna analiza dotyczy układu płyt, których powierzchnie środkowe leżą w dwóch równoległych płaszczyznach oddalonych od siebie o odległość  $c$  zgodnie z rysunkiem 9.12. W tabeli 9.7 zestawiono wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych otrzymane dla różnych dyskretyzacji, analogicznie jak w tabeli 9.5, przy założeniu wartości średniej odległości  $c = 1,0$  m. Do dalszych analiz przyjęto siatkę podobszarów cieczy o gęstości  $15 \times 15$  oraz odpowiadające jej dyskretyzacje MES i MRS. W analizie probabilistycznej założono, że odległość  $c$  między płytami jest zmiennym losowo parametrem projektowym. Wyniki obliczeń deterministycznych



Rysunek 9.12. Układ wspornikowych płyt kwadratowych leżących w dwóch płaszczyznach równoległych i zanurzonych całkowicie w cieczy, rozpatrywany w przykładzie 9.3

Tabela 9.7. Wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.12, otrzymane przy użyciu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB dla trzech różnych dyskretyzacji siatkami MES, MRS i siatką podobszarów cieczy [96]

|                   |                |                |                |
|-------------------|----------------|----------------|----------------|
| Dyskretyzacja MES | $11 \times 11$ | $16 \times 16$ | $21 \times 21$ |
| Dyskretyzacja MEB | $10 \times 10$ | $15 \times 15$ | $20 \times 20$ |
| $\omega_1$        | 35,950         | 36,658         | 37,029         |
| $\omega_2$        | 39,238         | 39,867         | 40,201         |
| $\omega_3$        | 104,218        | 106,292        | 107,417        |
| $\omega_4$        | 107,286        | 109,219        | 110,274        |
| Dyskretyzacja MRS | $10 \times 10$ | $20 \times 20$ | $30 \times 30$ |
| Dyskretyzacja MEB | $5 \times 5$   | $10 \times 10$ | $15 \times 15$ |
| $\omega_1$        | 34,755         | 36,332         | 36,935         |
| $\omega_2$        | 38,429         | 39,682         | 40,188         |
| $\omega_3$        | 119,050        | 115,530        | 114,487        |
| $\omega_4$        | 123,599        | 119,089        | 117,746        |

dla przyjętego zbioru wartości  $c \in \{0,5, 0,6, 0,7, \dots, 1,5\}$  m zestawiono w tabeli 9.8. Na podstawie tych danych wyznaczono funkcje odpowiedzi w postaci wielomianów trzeciego stopnia. Wielomiany te, będące zależnościami pierwszej i drugiej częstości drgań układu płyt od odległości między płytami, określone są następującymi wzorami:

- dla kombinacji metod numerycznych MES–MEB:

$$\omega_1(c) = 3,056c^3 - 12,487 \cdot c^2 + 18,650 \cdot c + 27,436, \quad (9.41)$$

$$\omega_2(c) = -1,194c^3 + 5,405 \cdot c^2 - 9,297 \cdot c + 44,953, \quad (9.42)$$

- dla kombinacji metod numerycznych MRS–MEB:

$$\omega_1(c) = 3,056c^3 - 12,517 \cdot c^2 + 18,761 \cdot c + 27,638, \quad (9.43)$$

$$\omega_2(c) = -1,194c^3 + 5,435 \cdot c^2 - 9,388 \cdot c + 45,335. \quad (9.44)$$

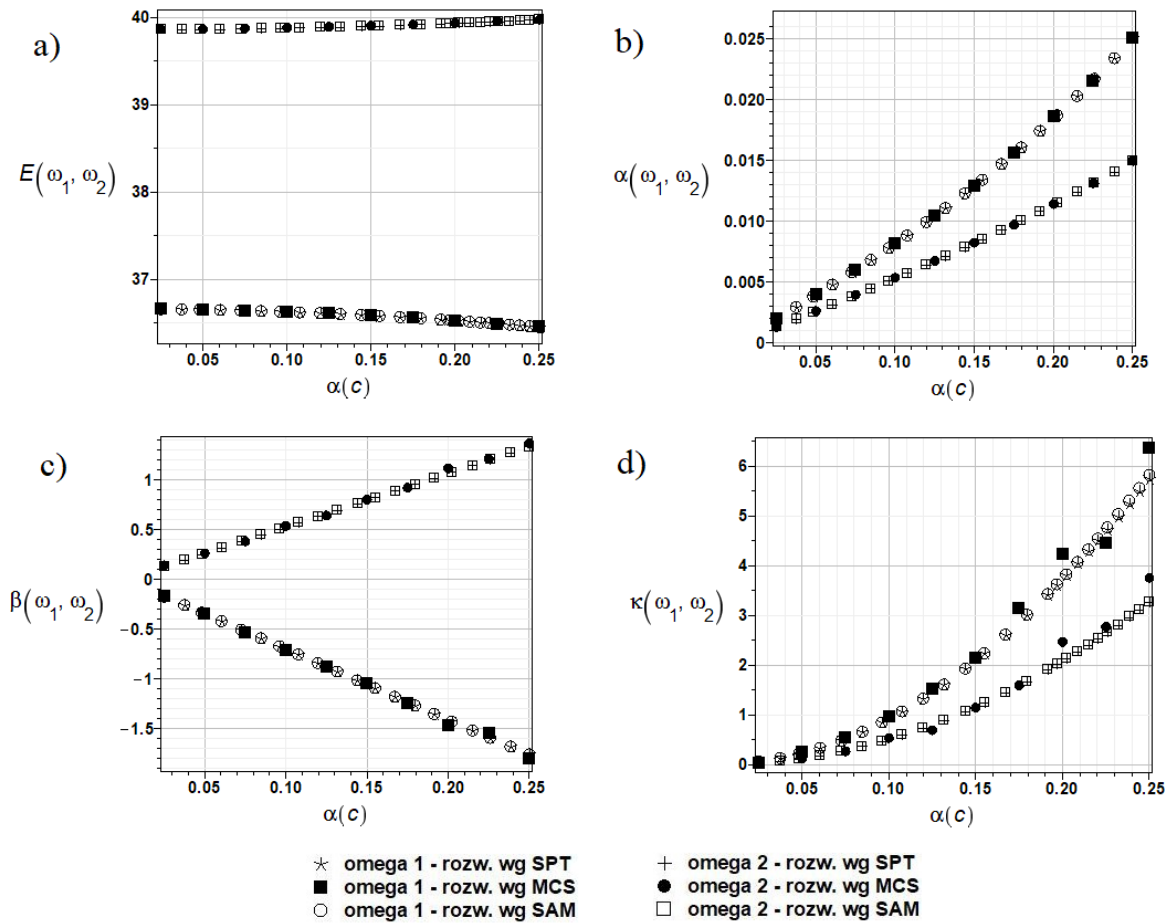
Tabela 9.8. Wartości częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.12 otrzymane dla zmiennej losowo odległości  $c$  między płytami przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB

| odl. $c$<br>[m] | MES–MEB    |            | MRS–MEB    |            |
|-----------------|------------|------------|------------|------------|
|                 | $\omega_1$ | $\omega_2$ | $\omega_1$ | $\omega_2$ |
| 0,5             | 33,853     | 41,544     | 34,095     | 41,889     |
| 0,6             | 34,752     | 41,072     | 35,005     | 41,411     |
| 0,7             | 35,422     | 40,684     | 35,684     | 41,017     |
| 0,8             | 35,936     | 40,362     | 36,204     | 40,690     |
| 0,9             | 36,338     | 40,093     | 36,611     | 40,417     |
| 1,0             | 36,658     | 39,867     | 36,935     | 40,188     |
| 1,1             | 36,916     | 39,676     | 37,197     | 39,994     |
| 1,2             | 37,126     | 39,515     | 37,410     | 39,830     |
| 1,3             | 37,300     | 39,377     | 37,586     | 39,691     |
| 1,4             | 37,444     | 39,259     | 37,732     | 39,571     |
| 1,5             | 37,565     | 39,159     | 37,855     | 39,469     |

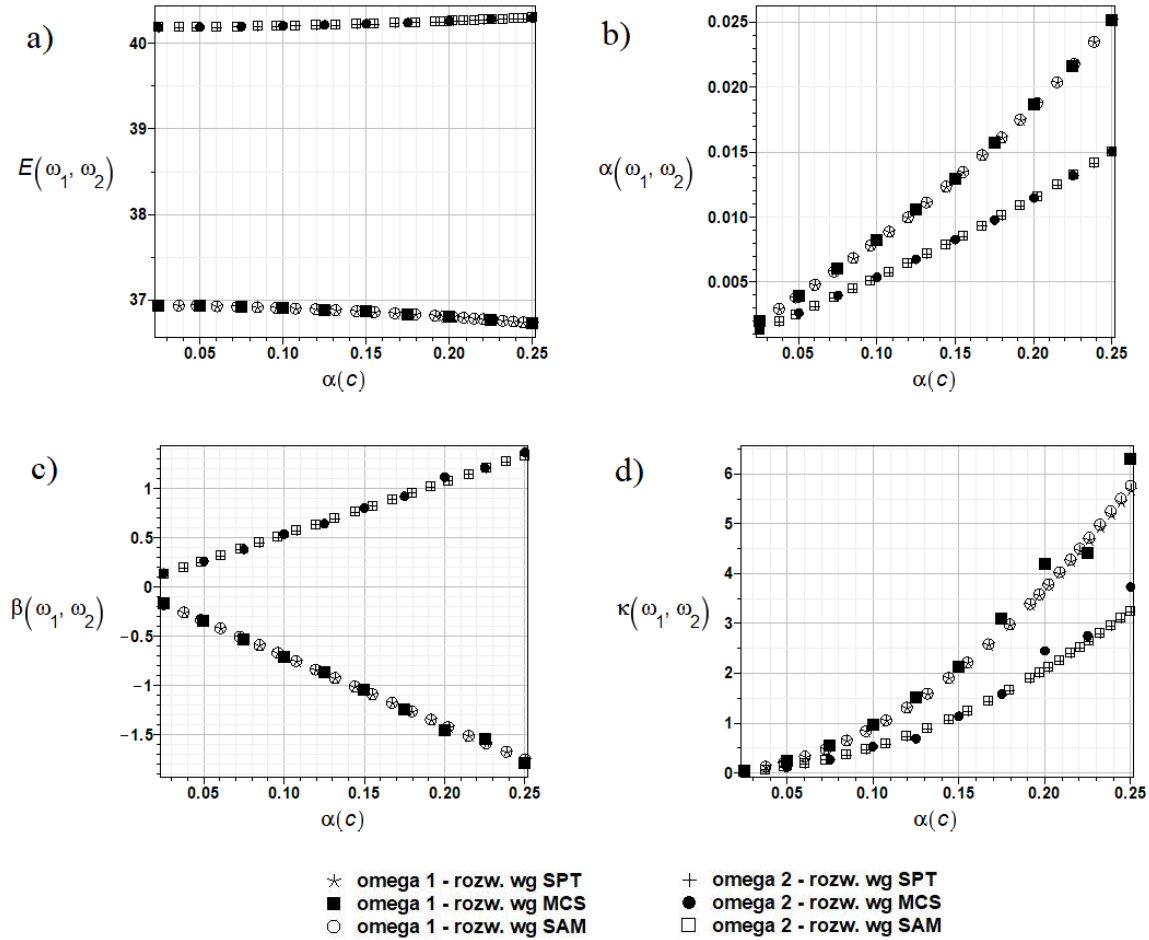
Wykresy przedstawiające wartości czterech charakterystyk probabilistycznych dotyczących dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt, w zależności od współczynnika zmienności odległości między płytami  $\alpha(c)$ , pokazano na rysunkach 9.13 oraz 9.14, przy czym w obliczeniach deterministycznych zastosowano kombinacje metod numerycznych odpowiednio MES–MEB i MRS–MEB.

W rozważanym przypadku można dojść do wniosku, że wykresy czterech charakterystyk probabilistycznych uzyskane przy zastosowaniu kombinacji metod numerycznych MES–MEB i MRS–MEB są do siebie zbliżone. Wykres wartości oczekiwanej na rysunkach 9.13a) oraz 9.14a) dla każdej z częstości drgań jest w przybliżeniu stały. Wartości współczynnika zmienności na wykresach 9.13b) oraz 9.14b),

nie przekraczające 2,5%, wskazują na małą zmienność badanej cechy ze względu na losową zmienność odległości między płytami. Wykresy skośności na rysunkach 9.13c) oraz 9.14c) są dodatnie i rosnące dla częstości  $\omega_2$  oraz ujemne i malejące dla częstości  $\omega_1$ . Zatem wraz ze wzrostem niepewności wejściowej  $\alpha(c)$  rozkład prawdopodobieństwa w pierwszym przypadku wykazuje tendencję do zwiększającej się asymetrii prawostronnej, a w drugim przypadku do zwiększającej się asymetrii lewostronnej. Wartości kurtozy na rysunkach 9.13d) oraz 9.14d) są dodatnie i większe dla częstości  $\omega_1$  w porównaniu z częstością  $\omega_2$ . Zatem rozkład prawdopodobieństwa jest leptokurtyczny, przy czym stopień koncentracji wartości badanej cechy wokół średniej jest większy w porównaniu z wcześniej rozważanym przypadkiem zmiennej gęstości cieczy dla układu płyt leżących w jednej płaszczyźnie.



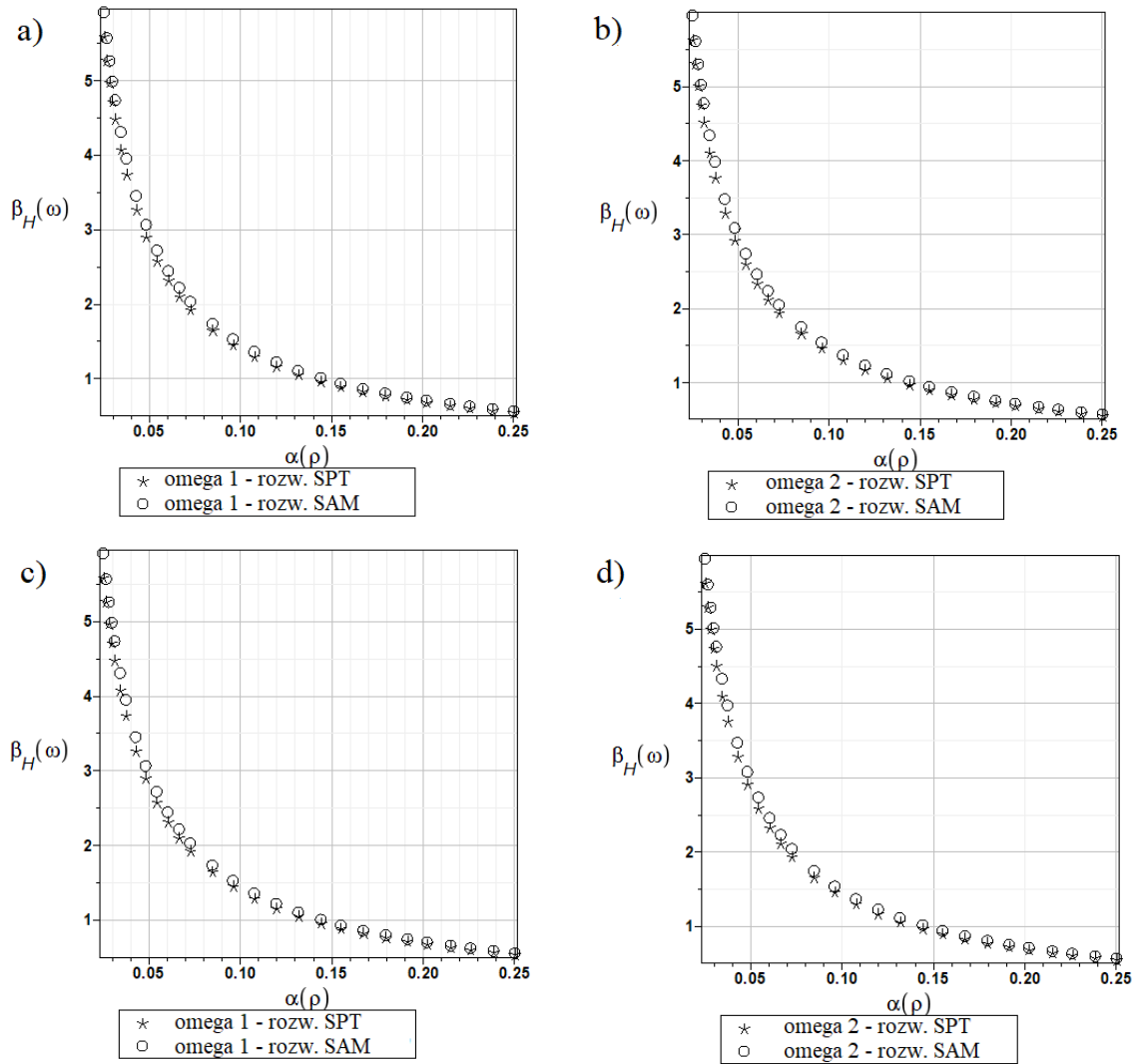
Rysunek 9.13. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej  $\alpha(c)$  odległości między płytami, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.12 przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT). W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MES–MEB [96]



Rysunek 9.14. Wykresy zależności: wartości oczekiwanej (a), współczynnika zmienności (b), skośności (c) i kurtozy (d) od niepewności wejściowej  $\alpha(c)$  odległości między płytami, otrzymane dla dwóch pierwszych częstości drgań własnych układu płyt z rysunku 9.12 przy użyciu metod: półanalitycznej (SAM), Monte-Carlo (MCS) oraz perturbacji stochastycznej (SPT). W obliczeniach deterministycznych użyto kombinację metod MRS–MEB [96]

Na zakończenie przykładu analizowano zależność miary bezpieczeństwa  $\beta_H$ , obliczanej na podstawie entropii względnej, od współczynnika zmienności  $\alpha(\rho_c)$  gęstości cieczy jako zmiennej projektowej dla układu płyt przedstawionego na rysunku 9.9. Rozważaną miarę bezpieczeństwa określa wzór (9.19) i, jak stwierdzono w przykładzie 9.2, miara ta bezpieczniej szacuje niezawodność badanego układu w porównaniu z miarą niezawodności pierwszego rzędu  $\beta_{FORM}$ . Otrzymane wyniki przedstawiają wykresy na rysunku 9.15. Z analizy wykresów można wyciągnąć wniosek, że zastosowanie kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB nie powoduje znaczących różnic w wartościach współczynnika bezpieczeństwa  $\beta_H$ . Podobne spostrzeżenie odnotowuje się przy porównaniu metod probabilistycznych SAM i SPT.

Widać również, że bezpieczeństwo badanego układu płyt zmniejsza się przy losowo zmiennej gęstości cieczy. Nawet dla bardzo małych wartości współczynnika zmienności gęstości cieczy niezawodność układu obliczana na podstawie entropii względnej osiąga poziom niższy od limitu wahającego się wokół wartości 5, prezentowanego w dostępnej literaturze [96].



Rysunek 9.15. Wykresy zależności miary bezpieczeństwa  $\beta_H$  układu płyt z rysunku 9.9 od niepewności wejściowej  $\alpha(\rho_c)$  gęstości cieczy, otrzymane przy użyciu metody półanalitycznej (SAM) oraz perturbacji stochastycznej (SPT) dla pierwszej (a, c) i drugiej (b, d) częstości drgań, stosując w obliczeniach deterministycznych kombinacje metod MES–MEB (a, b) oraz MRS–MEB (c, d) [96]



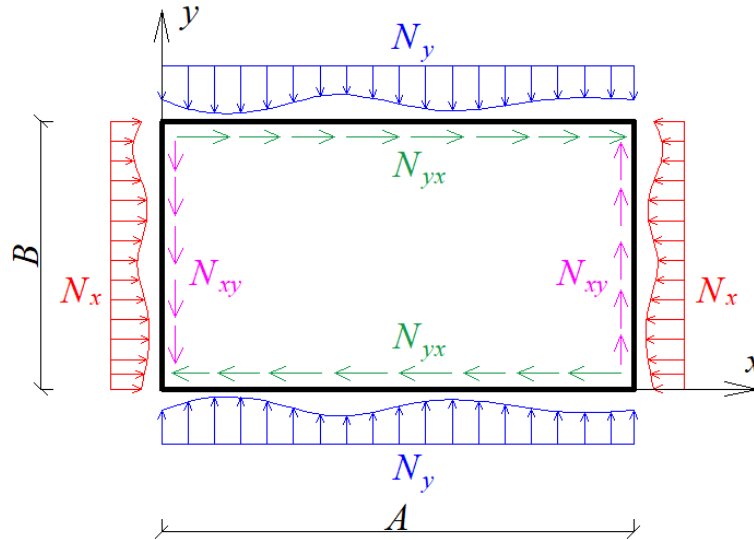
## 10. Analiza stateczności płyt prostokątnych

Wiodącym tematem rozprawy doktorskiej jest analiza dynamiczna płyt cienkich. Naturalne dopełnienie tych rozważań stanowi analiza stateczności płyt, którą przedstawiono w niniejszym rozdziale. Omawiana tematyka dotyczy wyznaczania obciążenia krytycznego oraz postaci utraty stateczności dla cienkich płyt prostokątnych, swobodnie podpartych lub utwierdzonych na obwodzie. W obliczeniach numerycznych zastosowano metodę różnic skończonych (MRS), która umożliwiła opracowanie prostych procedur w celu rozwiązania zadań stateczności izotropowych płyt cienkich zarówno o stałej, jak i zmiennej grubości. W analizach przyjęto założenie, że płyta obciążona jest wyłącznie w swojej płaszczyźnie środkowej. W ogólności może to być obciążenie ściskające lub rozciągające płytę (jedno- lub dwukierunkowo), a także działające stycznie do jej krawędzi. W celu wykonania analizy stateczności płyt o takich warunkach obciążenia zastosowano, odpowiednio zmodyfikowane, równanie różniczkowe ugięcia płyty izotropowej o zmiennej grubości, wyrażone wzorem (3.6), które zostało przedstawione w podrozdziale 3.1. Postać różnicową tego równania, która została wyprowadzona w podrozdziałach 3.2.2 (statyka) oraz 4.2 (dynamika), w niniejszym podrozdziale przekształcono do formy umożliwiającej analizę stateczności. W rezultacie otrzymano dla takiego zagadnienia uogólniony problem własny będący odpowiednikiem problemu (4.27) wyprowadzonego w podrozdziale 4.2 dla zagadnień dynamicznych.

Niniejszy rozdział rozpoczyna się od wyprowadzenia uogólnionego problemu własnego na podstawie wzorów różnicowych pozwalających wyznaczyć przybliżoną postać równania różniczkowego opisującego problem stateczności płyty izotropowej o zmiennej grubości. Rozwiązanie wyprowadzonego problemu własnego umożliwia określenie wartości obciążenia krytycznego oraz postaci utraty stateczności płyt obciążonych w swej płaszczyźnie. W drugiej części rozdziału przedstawiono kilka przykładów numerycznych, w których wyznaczano parametry stateczności płyt podpartych na obwodzie, przy różnych przypadkach obciążenia działającego w ich płaszczyźnie. Do obliczeń numerycznych zastosowano autorskie procedury obliczeniowe opracowane w środowisku Octave.

### 10.1. Rozwiązanie zadania stateczności płyty przy zastosowaniu MRS

W analizie stateczności, w przypadku ogólnym, przyjmuje się obciążenie płyty działające w jej płaszczyźnie środkowej w sposób pokazany na rysunku 10.1. Jeśli na płytę nałożono jedno z obciążeń  $N_x$  lub  $N_y$ , to wówczas określa się ją jako jednokierunkowo ściskaną lub rozciąganą, zależnie od znaku przypisanego zadanemu obciążeniu. Przyjęto, że wielkości  $N_x$  lub  $N_y$  o zwrotach pokazanych na rysunku 10.1 oznaczają obciążenie ściskające płytę i mają wartość ujemną, ponieważ na ściankach dodatnich<sup>1</sup> płyty zwrot obciążenia jest przeciwny do zwrotów osi  $x$  oraz  $y$  założonego układu współrzędnych. Jeśli na płytę nałożono jednocześnie oba rodzaje obciążeń  $N_x$  i  $N_y$ , to określa się ją jako dwukierunkowo ściskaną lub rozciąganą. Obciążenie  $N_{xy}$  oraz  $N_{yx}$  nazywa się stycznym do krawędzi płyty.



Rysunek 10.1. Obciążenie działające na płytę w analizie jej stateczności [106]

Problem stateczności płyty izotropowej, obciążonej w jej płaszczyźnie środkowej, można opisać za pomocą następującego równania różniczkowego, będącego odpowiednikiem równania (3.6) omówionego w podrozdziale 3.1:

$$\begin{aligned}
 & D \cdot \nabla^4 w + 2 \cdot \frac{\partial D}{\partial x} \cdot \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial x} + 2 \cdot \frac{\partial D}{\partial y} \cdot \nabla^2 \frac{\partial w}{\partial y} + \nabla^2 D \cdot \nabla^2 w + \\
 & - (1 - \nu) \left[ \frac{\partial^2 D}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \cdot \frac{\partial^2 D}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right] = \bar{p}(x, y),
 \end{aligned} \tag{10.1}$$

<sup>1</sup> Ściankami dodatnimi w przypadku płyty przedstawionej na rysunku 10.1 są ścianka górna oraz prawa, widoczne przy obserwowaniu płyty z punktu o obu współrzędnych  $x$  i  $y$  dodatnich.

gdzie funkcja obciążenia  $\bar{p}(x, y)$  płyty, zgodnie z pracą [9], wyraża się poniższym wzorem:

$$\bar{p}(x, y) = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (10.2)$$

Ponadto  $w = w(x, y)$  we wzorze (10.1) oznacza szukaną funkcję ugięcia płyty, natomiast  $D = D(x, y)$  jest znaną funkcją jej sztywności, zdefiniowaną wzorem (3.5).

W dalszych rozważaniach przyjęto następujące obciążenie początkowe płyty:

$$N_x^* = -1, N_y^* = -\alpha, N_{xy}^* = \beta, \quad (10.3)$$

przy czym parametry  $\alpha > 0$  oraz  $\beta > 0$  są wielkościami znanymi w analizowanym zadaniu. Obciążenie płyty określone wzorem (10.3) nazywane jest też obciążeniem porównawczym lub referencyjnym. Poszukiwane obciążenie krytyczne jest iloczynem obciążenia porównawczego oraz parametru  $\lambda_x > 0$  i można je zapisać następująco:

$$N_x = -\lambda_x, N_y = -\alpha\lambda_x, N_{xy} = \beta\lambda_x. \quad (10.4)$$

Wówczas wzór (10.2) przyjmuje poniższą postać:

$$\bar{p}(x, y) = -\lambda_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2\beta\lambda_x \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} - \alpha\lambda_x \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}. \quad (10.5)$$

Istotą zadania z analizy stateczności płyty jest wyznaczenie parametru  $\lambda_x$ , który pozwala stwierdzić, ile razy szukane obciążenie krytyczne jest większe od przyjętego obciążenia referencyjnego.

W celu rozwiązania równania (10.1) zastosowano metodę różnic skończonych. Wstępne założenia do tej metody przyjęto identyczne jak w podrozdziale 3.2.2. Zatem powierzchnię środkową płyty pokryto siatką regularną w sposób pokazany na rysunku 3.4. Siatka ta składa się z  $m \times n$  identycznych prostokątów o wymiarach  $h \times k$ . Następnie wszystkie pochodne cząstkowe występujące w równaniu zastąpiono przybliżającymi je ilorazami różnicowymi. Przyjęto, podobnie jak w podrozdziale 3.2.2, różnice centralne wyrażone wzorami (3.27)–(3.38). Po podstawieniu tych różnic do lewej strony równania (10.1) otrzymuje się dla punktu  $(x_i, y_j)$  postać różnicową wyrażoną wzorem (3.39), wyprowadzonym w podrozdziale 3.2.2. Z kolei postać różnicowa funkcji obciążenia (10.5) dla punktu  $(x_i, y_j)$  jest następująca:

$$\begin{aligned} \bar{p}_{ij} = & -\lambda_x \frac{w_{i+1,j} - 2w_{ij} + w_{i-1,j}}{h^2} + 2\beta\lambda_x \frac{w_{i+1,j+1} - w_{i+1,j-1} - w_{i-1,j+1} + w_{i-1,j-1}}{4hk} + \\ & -\alpha\lambda_x \frac{w_{i,j+1} - 2w_{ij} + w_{i,j-1}}{k^2}. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Po zapisaniu równania (10.1) w postaci różnicowej dla wszystkich punktów  $(x_i, y_j)$  będących węzłami siatki MRS ( $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ ,  $j = 1, 2, 3, \dots, n+1$ ), zgodnie z zasadami opisanymi w podrozdziale 3.2.2, otrzymuje się następujący układ równań, przedstawiony w formie macierzowej:

$$\Delta \cdot \mathbf{w} = \bar{\mathbf{p}} \cdot \mathbf{w}, \quad (10.7)$$

gdzie  $\Delta$  jest macierzą operatorów różnicowych, wyprowadzoną w podrozdziale 3.2.2, której strukturę blokową, bez uwzględniania warunków brzegowych, określa wzór (3.86). Natomiast macierz  $\bar{\mathbf{p}}$  powstała w wyniku zapisu w postaci różnicowej prawej strony równania (10.1), a więc funkcji (10.5), można zapisać jako sumę trzech macierzy blokowych:

$$\bar{\mathbf{p}} = -\lambda_x \left( \Delta_G^{(x)} + \Delta_G^{(xy)} + \Delta_G^{(y)} \right). \quad (10.8)$$

Macierze  $\Delta_G^{(x)}$ ,  $\Delta_G^{(xy)}$  oraz  $\Delta_G^{(y)}$  odpowiadają kolejnym składnikom równania (10.5), a ich postaci blokowe, bez uwzględniania warunków brzegowych, są następujące:

$$\Delta_G^{(x)} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & & & & \\ & \mathbf{A} & & & \\ & & \mathbf{A} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \mathbf{A} \\ & & & & & \mathbf{A} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}, \quad (10.9)$$

$$\Delta_G^{(xy)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{B} & & & \\ \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & & \\ & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{B} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbf{C} & \mathbf{0} & \mathbf{B} \\ & & & & \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}, \quad (10.10)$$

$$\Delta_G^{(y)} = \begin{bmatrix} \mathbf{D} & \mathbf{E} & & & \\ \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & & \\ & \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{E} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & \mathbf{E} & \mathbf{D} & \mathbf{E} \\ & & & & \mathbf{E} & \mathbf{D} \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}. \quad (10.11)$$

Macierze-bloki wchodzące w skład macierzy (10.9)–(10.11) mają struktury zapisane poniżej:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & & \\ & 1 & -2 & 1 & & \\ & & 1 & -2 & 1 & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}, \quad (10.12)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & & \\ -1 & 0 & 1 & & & \\ & -1 & 0 & 1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}, \quad (10.13)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & & & & \\ 1 & 0 & -1 & & & \\ & 1 & 0 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & -1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}, \quad (10.14)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} -2 & & & & & \\ & -2 & & & & \\ & & -2 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -2 & \\ & & & & & -2 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}, \quad (10.15)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}_{(m+1) \times (m+1)}. \quad (10.16)$$

Ponadto symbolem  $\mathbf{0}$  we wzorze (10.10) oznaczono macierz zerową o wymiarze  $(m+1) \times (m+1)$ . Wektor  $\mathbf{w}$  niewiadomych przemieszczeń płyty w węzłach siatki MRS, występujący w równaniu (10.7), ma postać określoną wzorami (3.92) oraz (3.93), tzn. jest macierzą kolumnową o wymiarze  $(m+1)(n+1) \times 1$ . Można zauważyć, że równanie macierzowe opisujące problem stateczności jest bardzo podobne do równania (3.85), podanego w podrozdziale 3.2.2, dotyczącego przypadku analizy statycznej płyt. Zasadnicza różnica polega na tym, że w zadaniu stateczności prawa strona równania (10.7), związana z obciążeniem płyty, jest uzależniona od wektora niewiadomych  $\mathbf{w}$  jako efekt zastosowania wzorów różnicowych (3.29)–(3.31) do funkcji obciążenia (10.5), zależnej od funkcji ugięcia płyty  $w(x, y)$ .

Ostatecznie równanie (10.7) można przedstawić w postaci następującego uogólnionego problemu własnego:

$$(\Delta - (-\lambda_x)\Delta_G)\mathbf{w} = \mathbf{0}, \quad (10.17)$$

gdzie

$\Delta$  – macierz operatorów różnicowych określona wzorem (3.86), zmodyfikowana ze względu na warunki podparcia płyty zgodnie z zasadami opisanymi w podrozdziale 3.2.2 oraz w dodatku A,

$\lambda_x$  – wartość bezwzględna obciążenia krytycznego  $N_x$ , przy czym  $\lambda_x > 0$ ,  
 $\Delta_G = \Delta_G^{(x)} + \Delta_G^{(xy)} + \Delta_G^{(y)}$ , przy czym macierze  $\Delta_G^{(x)}$ ,  $\Delta_G^{(xy)}$  oraz  $\Delta_G^{(y)}$  wyrażone są wzorami (10.9)–(10.11), odpowiednio zmodyfikowanymi ze względu na warunki podparcia płyty.

W dalszej części rozdziału przyjęto, że analizowana płyta jest podparta na całym obwodzie, przy czym podparcie może być swobodne lub utwierdzone wzdłuż wybranych krawędzi. W takim przypadku należy zmodyfikować macierz operatorów różnicowych  $\Delta$  zgodnie z zasadami opisanymi w podrozdziale 3.2.2 oraz w dodatku A.1, dla przypadku płyty podpartej na obwodzie. Modyfikacji wymaga również macierz  $\Delta_G$ . W celu uwzględnienia zerowych ugięć punktów płyty na krawędziach należy w macierzy blokowej  $\Delta_G$  zastąpić macierze-bloki w pierwszym i ostatnim wierszu oraz w pierwszej i ostatniej kolumnie macierzami zerowymi<sup>2</sup>. Ponadto w każdej macierzy-bloku, składającej się na macierz  $\Delta_G$ , należy pierwszy i ostatni wiersz oraz pierwszą i ostatnią kolumnę zastąpić zerami<sup>3</sup>. Uwzględnienie zerowych momentów

<sup>2</sup> eliminacja niewiadomych  $w_{11}, w_{21}, w_{31}, \dots, w_{m+1,1}$  oraz  $w_{1,n+1}, w_{2,n+1}, w_{3,n+1}, \dots, w_{m+1,n+1}$ , a więc ugięć punktów płyty na jej dolnej i górnej krawędzi

<sup>3</sup> eliminacja niewiadomych  $w_{11}, w_{12}, w_{13}, \dots, w_{1,n+1}$  oraz  $w_{m+1,1}, w_{m+1,2}, w_{m+1,3}, \dots, w_{m+1,n+1}$ , a więc ugięć punktów płyty na jej lewej i prawej krawędzi

zginających na krawędziach swobodnie podpartych lub zerowych kątów obrotu na krawędziach utwierdzonych nie wymaga wprowadzania dodatkowych modyfikacji do macierzy  $\Delta_G$ . Wynika to stąd, że we wzorze (10.6) dla  $j = 2, 3, 4, \dots, n$  oraz dla  $i = 2, 3, 4, \dots, m$  nie występują ugięcia w punktach fikcyjnych znajdujących się poza obszarem płyty.

## 10.2. Przykłady analizy stateczności płyt

W niniejszym podrozdziale przedstawiono przykłady numeryczne, w których przeprowadzono analizę stateczności płyt prostokątnych, podpartych na obwodzie i obciążonych w swej płaszczyźnie środkowej. Obliczenia numeryczne wykonano przy zastosowaniu metody różnic skończonych zgodnie z zasadami opisanymi w poprzednim podrozdziale. Głównym celem analizy jest określenie obciążenia krytycznego oraz postaci utraty stateczności płyt na podstawie rozwiązania uogólnionego problemu własnego wyrażonego wzorem (10.17). Przy pomocy otrzymanych wartości własnych  $\lambda_x$  wyznaczono obciążenia krytyczne płyt odpowiadające kilku pierwszym postaciom ich utraty stateczności. Postacie te przedstawiono graficznie w przykładzie 10.1, korzystając z odpowiednich wektorów własnych. We wszystkich zamieszczonych przykładach rozważano płyty cienkie o stałej lub zmiennej grubości.

**Przykład 10.1.** [106] *Analiza stateczności płyty prostokątnej podpartej przegubowo na obwodzie oraz obciążonej stałym obciążeniem normalnym działającym jednokierunkowo*

W przykładzie rozpatrzono płytę o schemacie podparcia i obciążenia przedstawionym na rysunku 10.2. Przyjęto, że płyta wykonana jest z materiału izotropowego o module Younga  $E = 205$  GPa oraz współczynnika Poissona  $\nu = 0,3$ .

W analizie stateczności wzięto pod uwagę dwa przypadki wymiarów płyty:

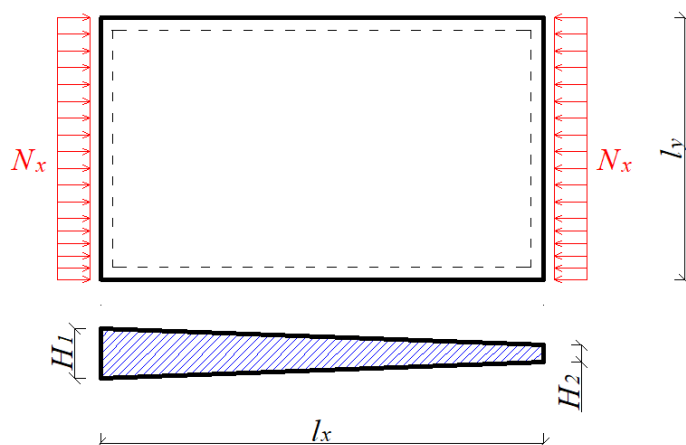
1. długości boków  $l_x = l_y = 2,0$  m oraz minimalna grubość  $H = H_2 = 0,05$  m,
2. długości boków  $l_x \times l_y = 2,0 \times 4,0$  m oraz minimalna grubość  $H = H_2 = 0,05$  m.

W przykładach zawartych w niniejszym rozdziale obciążenie krytyczne  $N_{cr}$  wyrażono przez parametr bezwymiarowy zgodnie z poniższym wzorem [9]:

$$\tilde{N}_{cr} = \frac{N_{cr}}{D} \cdot l_x \cdot l_y, \quad (10.18)$$

gdzie sztywność płytową  $D$  przyjęto następująco:

$$D = \frac{EH_2^3}{12(1 - \nu^2)}. \quad (10.19)$$



Rysunek 10.2. Płyta prostokątna analizowana w przykładzie 10.1, podparta swobodnie na obwodzie oraz ściskana obciążeniem  $N_x$  działającym w jednym kierunku [106]

W tabeli 10.1 przedstawiono wartości obciążeń krytycznych odpowiadających trzem pierwszym postaciom utraty stateczności płyty. Zapisano je w notacji bezwymiarowej zgodnie ze wzorem (10.18). Rozpatrzono przypadek płyty o stałej grubości, tzn.  $H_1 = H_2 = H$  oraz trzy różne gęstości siatki MRS. Uzyskane wyniki porównano z rozwiązaniami zawartymi w dostępnej literaturze, wyznaczonymi analitycznie lub przy zastosowaniu metody elementów brzegowych.

Tabela 10.1. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty z rysunku 10.2, przy założeniu stałej grubości  $H$ , otrzymane dla trzech różnych dyskretyzacji siatką MRS [106]

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozw. anal.<br>[2, 3] | Rozw. MEB<br>[9] | Rozwiązanie MRS |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------|------------------|-----------------|----------------|----------------|
|                  |                  |                       |                  | $5 \times 5$    | $10 \times 10$ | $15 \times 15$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 39,478                | 39,635           | 38,197          | 39,155         | 39,334         |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 61,685                | 62,200           | 56,287          | 60,283         | 61,057         |
| $H = 0,05$ m     | 3                | 109,662               | 111,406          | 85,942          | 103,183        | 106,735        |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 30,843                | 30,925           | 29,841          | 30,590         | 30,730         |
| $l_y = 4,0$ m    | 2                | –                     | –                | 69,272          | 76,405         | 77,811         |
| $H = 0,05$ m     | 3                | –                     | –                | 78,977          | 86,495         | 87,953         |

W tabelach 10.2 oraz 10.3 zestawiono wartości obciążeń krytycznych otrzymane dla płyty o liniowo zmiennej grubości, której przekrój pokazano na rysunku 10.2. Przyjęto, że grubość  $H_1 \in \{1,5H_2, 2,0H_2, 2,5H_2\}$ . Wyniki podano dla dwóch gęstości siatki MRS, odpowiednio  $10 \times 10$  i  $15 \times 15$ .

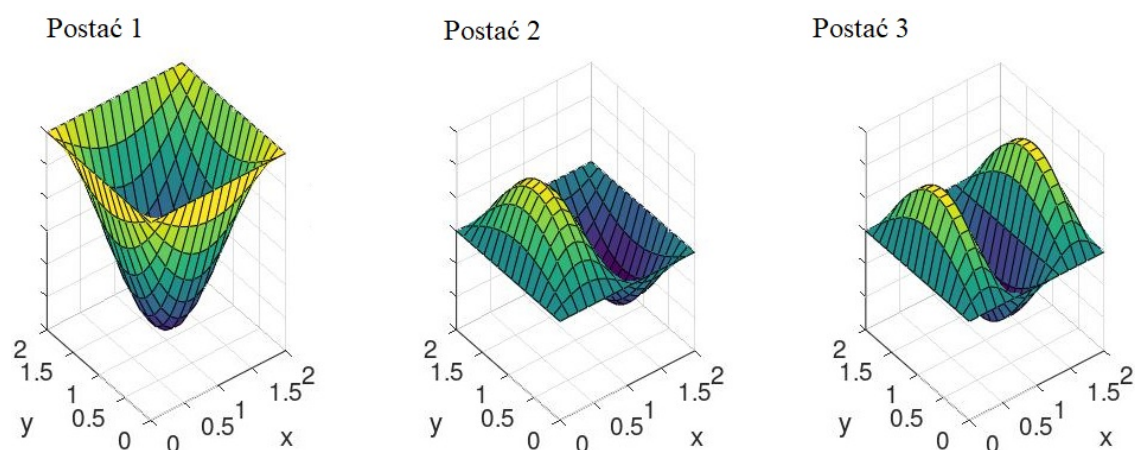
Na rysunkach 10.3–10.4 przedstawiono graficznie postacie utraty stateczności płyty kwadratowej odpowiednio o stałej i zmiennej grubości. Odpowiadają one ko-

Tabela 10.2. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty z rysunku 10.2, przy założeniu liniowo zmiennej grubości, otrzymane dla dyskretyzacji siatką MRS  $10 \times 10$  [106]

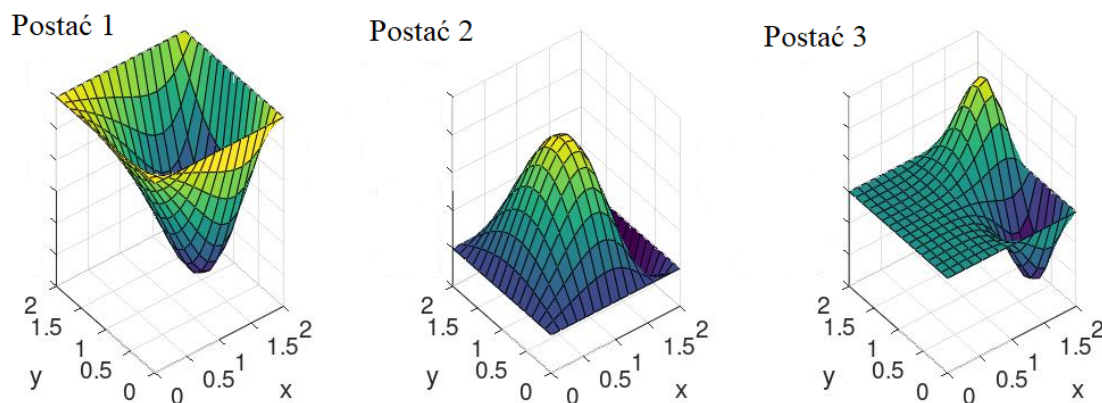
| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozwiązanie MRS – siatka $10 \times 10$ |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------------------------|----------------|----------------|
|                  |                  | $H_1 = 1,5H_2$                          | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 68,505                                  | 96,267         | 121,377        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 115,187                                 | 184,326        | 259,781        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 190,891                                 | 278,232        | 329,748        |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 55,595                                  | 80,102         | 98,388         |
| $l_y = 4,0$ m    | 2                | 134,325                                 | 190,757        | 243,938        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 159,726                                 | 246,386        | 341,425        |

Tabela 10.3. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty z rysunku 10.2, przy założeniu liniowo zmiennej grubości, otrzymane dla dyskretyzacji siatką MRS  $15 \times 15$  [106]

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozwiązanie MRS – siatka $15 \times 15$ |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------------------------|----------------|----------------|
|                  |                  | $H_1 = 1,5H_2$                          | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 68,731                                  | 95,586         | 117,982        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 117,028                                 | 188,196        | 266,613        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 198,906                                 | 287,518        | 342,649        |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 55,472                                  | 77,154         | 87,623         |
| $l_y = 4,0$ m    | 2                | 136,587                                 | 192,621        | 243,264        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 163,012                                 | 252,933        | 352,486        |



Rysunek 10.3. Trzy pierwsze postacie utraty stateczności odpowiadające obciążeniom krytycznym zestawionym w tabeli 10.1 dla płyty kwadratowej o stałej grubości [106]



Rysunek 10.4. Trzy pierwsze postacie utraty stateczności odpowiadające obciążeniom krytycznym zestawionym w tabeli 10.3 dla płyty kwadratowej o liniowo zmiennej grubości przy założeniu, że  $H_1 = 2,5H_2$  [106]

lejnym wartościom obciążeń krytycznych, zamieszczonym w tabelach 10.1 oraz 10.3. Wykresy wygenerowano w środowisku Octave przy użyciu siatki MRS o gęstości  $15 \times 15$ . W przypadku płyty o zmiennej grubości przyjęto, że  $H_1 = 2,5H_2$ .

Na podstawie wyników zestawionych w tabeli 10.1 można stwierdzić, że zadowalające wartości obciążeń krytycznych i jednocześnie najbliższe wynikom analitycznym, w przypadku płyty o stałej grubości, uzyskano dla siatki  $15 \times 15$ . Różnica wartości pierwszego obciążenia krytycznego w rozwiązaniu analitycznym i przy użyciu MRS nie przekracza wtedy 1%. W przypadku drugiego i trzeciego obciążenia krytycznego różnica ta jest większa i wynosi odpowiednio 1,02% oraz 2,67% dla płyty kwadratowej.

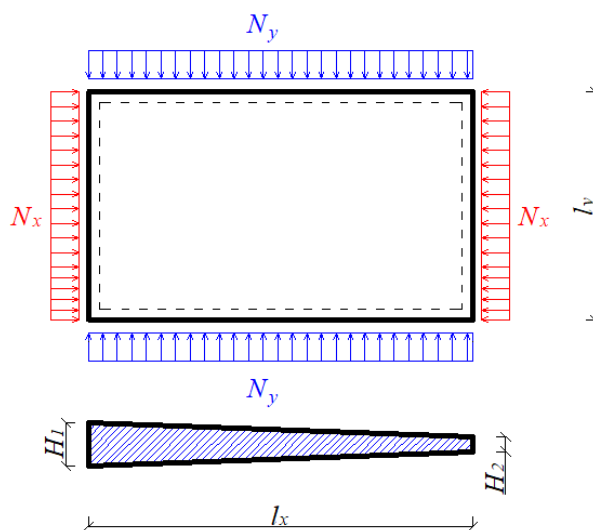
Analizując tabele 10.2–10.3, można zauważyć, że zwiększanie grubości  $H_1$  płyty przy jednej z krawędzi, względem ustalonej grubości  $H_2$  na przeciwległej krawędzi, skutkuje wzrostem wartości obciążenia krytycznego. Ponadto z danych w tabelach wynika, że 1,5-krotny wzrost grubości  $H_1$  płyty w odniesieniu do grubości  $H_2$  powoduje około 1,8-krotne zwiększenie wartości pierwszego obciążenia krytycznego. W przypadku 2- oraz 2,5-krotnego wzrostu grubości płyty zwiększenie wartości pierwszego obciążenia krytycznego jest odpowiednio 2,5- oraz 3-krotne w porównaniu z płytą o stałej grubości. Można również wyciągnąć wniosek, że wraz ze wzrostem różnicy w grubościach płyty na przeciwległych krawędziach rośnie różnica procentowa między wartościami pierwszego obciążenia krytycznego, otrzymanymi przy użyciu siatek  $10 \times 10$  oraz  $15 \times 15$ . Dla płyty kwadratowej różnica ta wynosi 0,33%–2,8%, a dla płyty prostokątnej 0,22%–10,94%, przy czym większe wartości

w podanych przedziałach dotyczą ilorazu  $H_1/H_2 = 2,5$ . W przypadku drugiego i trzeciego obciążenia krytycznego różnice te nie są tak znaczące. Przykładowo różnica procentowa między wartościami drugiego obciążenia krytycznego płyty prostokątnej, uzyskanymi przy użyciu siatek  $10 \times 10$  oraz  $15 \times 15$ , wynosi odpowiednio 1,68%, 0,98% oraz 0,28% dla  $H_1 = 1,5H_2$ ,  $H_1 = 2,0H_2$  oraz  $H_1 = 2,5H_2$ . Ponieważ największe znaczenie praktyczne w analizie konstrukcji ma pierwsze obciążenie krytyczne, należy zastosować gęstszą siatkę MRS, aby uzyskać wyraźną zbieżność wyników oraz większą ich dokładność dla płyt o geometrii charakteryzującej się dużą wartością ilorazu  $H_1/H_2$ .

Obserwując przebieg postaci utraty stateczności na rysunkach 10.3 oraz 10.4, można zauważyć zaburzoną symetrię wykresów w przypadku płyty o liniowo zmiennej grubości. Jest to spowodowane tym, że obszary występowania ekstremalnych przemieszczeń płyty ulegają przesunięciu w kierunku miejsc o mniejszej sztywności.

**Przykład 10.2.** [106] *Analiza stateczności płyty prostokątnej podpartej przegubowo na obwodzie oraz obciążonej stałym obciążeniem normalnym działającym w dwóch kierunkach*

W przykładzie rozpatrzono płytę o schemacie podparcia i obciążenia przedstawionym na rysunku 10.5. Parametry materiałowe płyty przyjęto identyczne jak w przykładzie 10.1.



Rysunek 10.5. Płyta prostokątna analizowana w przykładzie 10.2, podparta swobodnie na obwodzie, ściskana lub rozciągana w dwóch kierunkach

W tabeli 10.4 zestawiono wartości obciążenia krytycznego  $\tilde{N}_{cr,x}$ , wyrażonego w notacji bezwymiarowej, odpowiadającego pierwszej postaci utraty stateczności

plyty kwadratowej o długości boku 2,0 m oraz stałej grubości wynoszącej 0,05 m. Wyniki podano dla trzech gęstości siatki MRS i porównano je z dostępnymi w literaturze rozwiązaniami analitycznymi oraz otrzymanymi przy zastosowaniu MEB. Obliczenia w przykładzie przeprowadzono, biorąc pod uwagę różne wartości ilorazów obciążeń  $N_y$  oraz  $N_x$  działających wzdłuż kierunków osi odpowiednio  $y$  oraz  $x$ . Przyjęto, że ilorazy te należą do zbioru  $N_y/N_x \in \{-0,25, 0, 0,25, 0,5, 0,75, 1,0\}$ , przy czym ujemna wartość oznacza, że obciążenie działa wzdłuż kierunku  $x$  ściskająco, natomiast zgodnie z kierunkiem  $y$  rozciągająco na płytę.

Tabela 10.4. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o stałej grubości  $H = 0,05$  m, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu trzech gęstości siatki MRS [106]

| $N_y/N_x$ | Rozw. anal.<br>[3] | Rozw. MEB<br>[9] | Rozwiązanie MRS |         |         |
|-----------|--------------------|------------------|-----------------|---------|---------|
|           |                    |                  | 5 × 5           | 10 × 10 | 15 × 15 |
| -0,25     | 52,638             | 52,826           | 50,929          | 52,206  | 52,446  |
| 0         | 39,478             | 39,620           | 38,197          | 39,155  | 39,334  |
| 0,25      | 31,708             | 31,696           | 30,557          | 31,324  | 31,467  |
| 0,5       | 26,424             | 26,424           | 25,464          | 26,103  | 26,223  |
| 0,75      | 22,649             | 22,640           | 21,827          | 22,374  | 22,477  |
| 1,0       | 19,818             | 19,810           | 19,098          | 19,577  | 19,667  |

W tabelach 10.5–10.6 zestawiono wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o boku długości 2,0 m przy założeniu, że charakteryzuje się ona liniowo zmienną grubością, zgodnie z rysunkiem 10.5, przy czym minimalna grubość  $H_2 = 0,05$  m, natomiast  $H_1 \in \{1,5H_2, 2H_2, 2,5H_2\}$ . Wyniki otrzymane przy użyciu MRS podano dla dwóch gęstości siatki, odpowiednio  $10 \times 10$  oraz  $15 \times 15$ .

W tabelach 10.7–10.8 zamieszczono wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty prostokątnej o wymiarach  $l_x \times l_y = 2,0 \times 4,0$  m. Płyta charakteryzuje się liniowo zmienną grubością, zgodnie z rysunkiem 10.5, przy czym  $H_2 = 0,05$  m, natomiast  $H_1 \in \{H_2, 1,5H_2, 2H_2, 2,5H_2\}$ . Obliczenia wykonano, stosując dwie gęstości siatki MRS, odpowiednio  $10 \times 10$  oraz  $15 \times 15$ .

Z danych w tabeli 10.4 wynika, że wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o stałej grubości różnią się nieznacznie w porównaniu z rozwiązaniem analitycznym lub otrzymanym przy zastosowaniu MEB. Dla siatki MRS o gęstości  $15 \times 15$ , podobnie jak w przykładzie 10.1, różnica między odpowiednimi wartościami nie przekracza 1%.

Tabela 10.5. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości  $10 \times 10$  [106]

| $N_y/N_x$ | Rozwiązanie MRS dla siatki $10 \times 10$ |                |                |
|-----------|-------------------------------------------|----------------|----------------|
|           | $H_1 = 1,5H_2$                            | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ |
| -0,25     | 85,788                                    | 115,232        | 141,743        |
| 0         | 68,505                                    | 96,267         | 121,377        |
| 0,25      | 56,168                                    | 81,333         | 104,695        |
| 0,5       | 47,394                                    | 69,925         | 91,400         |
| 0,75      | 40,926                                    | 61,131         | 80,804         |
| 1,0       | 35,986                                    | 54,215         | 72,262         |

Tabela 10.6. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty kwadratowej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości  $15 \times 15$  [106]

| $N_y/N_x$ | Rozwiązanie MRS dla siatki $15 \times 15$ |                |                |
|-----------|-------------------------------------------|----------------|----------------|
|           | $H_1 = 1,5H_2$                            | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ |
| -0,25     | 86,294                                    | 115,113        | 139,153        |
| 0         | 68,731                                    | 95,586         | 117,982        |
| 0,25      | 56,302                                    | 80,498         | 101,144        |
| 0,5       | 47,487                                    | 69,087         | 87,971         |
| 0,75      | 40,998                                    | 60,337         | 77,588         |
| 1,0       | 36,045                                    | 53,477         | 69,276         |

Tabela 10.7. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty prostokątnej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości  $10 \times 10$  [106]

| $N_y/N_x$ | Rozwiązanie MRS dla siatki $10 \times 10$ |                |                |                |
|-----------|-------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|           | $H_1 = H_2$                               | $H_1 = 1,5H_2$ | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ |
| -0,25     | 32,629                                    | 59,182         | 84,980         | 104,062        |
| 0         | 30,590                                    | 55,595         | 80,102         | 98,388         |
| 0,25      | 28,790                                    | 52,414         | 75,740         | 93,279         |
| 0,5       | 27,191                                    | 49,574         | 71,818         | 88,659         |
| 0,75      | 25,760                                    | 47,024         | 68,274         | 84,462         |
| 1,0       | 24,472                                    | 44,721         | 65,058         | 80,637         |

Tabela 10.8. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty prostokątnej o liniowo zmiennej grubości, obciążonej dwukierunkowo zgodnie z rysunkiem 10.5, otrzymane przy użyciu siatki MRS o gęstości  $15 \times 15$  [106]

| $N_y/N_x$ | Rozwiązanie MRS dla siatki $15 \times 15$ |                |                |                |
|-----------|-------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|           | $H_1 = H_2$                               | $H_1 = 1,5H_2$ | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ |
| -0,25     | 32,779                                    | 59,055         | 81,879         | 92,753         |
| 0         | 30,730                                    | 55,472         | 77,154         | 87,623         |
| 0,25      | 28,922                                    | 52,295         | 72,932         | 83,016         |
| 0,5       | 27,315                                    | 49,460         | 69,140         | 78,859         |
| 0,75      | 25,878                                    | 46,914         | 65,717         | 75,090         |
| 1,0       | 24,584                                    | 44,616         | 62,611         | 71,658         |

Na podstawie wyników w tabelach 10.5–10.8 można wyciągnąć wniosek, że przyjmując  $H_1/H_2 = 1,5$ , iloraz uzyskanego obciążenia krytycznego do odpowiadającej jego wartości w płycie o stałej grubości równej  $H_2$ , przy rosnącym ilorazie  $N_y/N_x$ , wynosi 1,64–1,84 i 1,81–1,83 dla płyty odpowiednio kwadratowej i prostokątnej. W przypadku  $H_1/H_2 = 2,0$  relacje te wynoszą odpowiednio 2,72–3,7 i 2,6–2,66, natomiast przy założeniu  $H_1/H_2 = 2,5$  przedziały przyjmują wartości 3,13–4,53 i 3,19–3,3. Zatem dla płyty prostokątnej o zmiennej grubości iloraz  $N_y/N_x$  w mniejszym stopniu wpływa na wzrost wartości obciążenia krytycznego względem odpowiadającej płyty o stałej grubości.

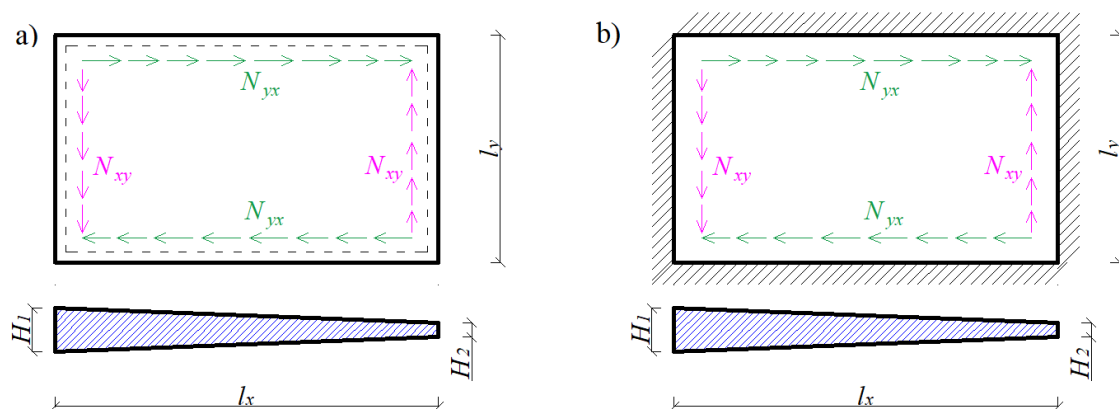
Procentowa różnica między wartościami pierwszego obciążenia krytycznego, uzyskanymi dla płyty kwadratowej o zmiennej grubości oraz siatek  $10 \times 10$  i  $15 \times 15$ , wzrasta wraz ze wzrostem ilorazu  $N_y/N_x$  przy  $H_1/H_2 = 2,0$  oraz  $H_1/H_2 = 2,5$  i wynosi odpowiednio od 0,1% do 1,36% oraz od 1,83% do 4,13%. Dla  $H_1/H_2 = 1,5$  różnica ta maleje od 0,59% do 0,16% wraz ze wzrostem  $N_y/N_x$ . Z kolei w płycie prostokątnej różnice procentowe między wartościami obciążenia krytycznego dla siatek  $10 \times 10$  oraz  $15 \times 15$  są większe w porównaniu z płytą kwadratową w przypadku  $H_1/H_2 = 2,0$  oraz  $H_1/H_2 = 2,5$  i wynoszą odpowiednio od 3,65% do 3,76% oraz od 10,87% do 11,14%. Dla  $H_1/H_2 = 1,5$  różnice te są niewielkie, równe około 0,2%. Można więc wyciągnąć wniosek, że zarówno dla płyty kwadratowej, jak i prostokątnej, przy  $H_1/H_2 \in \{2,0, 2,5\}$ , należałoby wykonać obliczenia obciążenia krytycznego, przyjmując gęstszą siatkę MRS, w celu uzyskania większej zbieżności i tym samym dokładniejszych wyników końcowych. Kryterium zbieżności ustalono jako różnicę procentową między wynikami dla kolejnych siatek nie przekraczającą 1%.

We wszystkich zamieszczonych w niniejszym przykładzie tabelach można zauwa-

żyć, że wraz ze wzrostem ilorazu  $N_y/N_x$  maleją wartości obciążenia krytycznego. Spadki procentowe tych wartości między  $N_y/N_x = -0,25$  i  $N_y/N_x = 1,0$  wynoszą 62,5% i 25% odpowiednio dla płyty kwadratowej i prostokątnej o stałej grubości, przy użyciu siatki MRS o gęstości  $15 \times 15$ . Przyjmując  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz tą samą siatkę MRS, obciążenie krytyczne obliczone dla ilorazu  $N_y/N_x = 1,0$  uległo zmniejszeniu o 50,2% i 22,7%, odpowiednio dla płyty kwadratowej i prostokątnej, w porównaniu z przypadkiem  $N_y/N_x = -0,25$ .

**Przykład 10.3.** [106] *Analiza stateczności płyty prostokątnej podpartej przegubowo lub utwierdzonej na obwodzie oraz obciążonej stałym obciążeniem stycznym*

W przykładzie rozpatrzono płytę o dwóch schematach podparcia na obwodzie, poddaną działaniu obciążenia stycznego  $N_{xy}$  zgodnie z rysunkiem 10.6. Parametry materiałowe płyty przyjęto identyczne jak w dwóch poprzednich przykładach.



Rysunek 10.6. Płyta prostokątna podparta swobodnie (a) lub utwierdzona na obwodzie (b), obciążona stycznie do krawędzi, stanowiąca przedmiot analizy w przykładzie 10.3

W tabeli 10.9 zestawiono wartości obciążenia krytycznego  $\tilde{N}_{cr,xy}$ , wyrażonego w notacji bezwymiarowej, odpowiadającego pierwszej postaci utraty stateczności płyty o stałej grubości wynoszącej 0,05 m. Wzięto pod uwagę płytę kwadratową o długości boku 2,0 m oraz płytę prostokątną o bokach długości 2,0 m i 4,0 m. Wyniki podano dla trzech gęstości siatki MRS i porównano je z dostępnymi w literaturze rozwiązaniami analitycznymi oraz otrzymanymi przy zastosowaniu MEB.

W tabelach 10.10–10.11 zestawiono wartości obciążenia krytycznego analogiczne do tych z tabeli 10.9 z tą różnicą, że płyta charakteryzuje się liniowo zmienną grubością, zgodnie z rysunkiem 10.6, przy czym minimalna grubość  $H_2 = 0,05$  m, natomiast  $H_1 \in \{1,5H_2, 2H_2, 2,5H_2, 3H_2\}$ . Obliczenia wykonano przy użyciu MRS, stosując siatki o gęstościach wynoszących  $10 \times 10$  oraz  $15 \times 15$ .

Tabela 10.9. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty o stałej grubości 0,05 m, obciążonej jak na rysunku 10.6, otrzymane dla trzech gęstości siatki MRS [106]

| Wymiary<br>płyty | Podparcie<br>wg rys. 10.6 | Rozw. anal.<br>[3] | Rozw. MEB<br>[9] | Rozwiązanie MRS |         |         |
|------------------|---------------------------|--------------------|------------------|-----------------|---------|---------|
|                  |                           |                    |                  | 10 × 10         | 15 × 15 | 20 × 20 |
| $l_x = 2,0$ m    | a)                        | 92,182             | 93,009           | 96,945          | 94,127  | 93,192  |
| $l_y = 2,0$ m    | b)                        | 145,182            | 146,833          | 147,220         | 145,250 | 144,820 |
| $l_x = 4,0$ m    | a)                        | 130,279            | 131,683          | 137,260         | 132,650 | 131,120 |
| $l_y = 2,0$ m    | b)                        | 204,103            | 208,200          | 215,04          | 207,260 | 204,920 |

Tabela 10.10. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej jak na rysunku 10.6, otrzymane przy użyciu siatki MRS 10 × 10 [106]

| Wymiary<br>płyty | Podparcie<br>wg rys. 10.6 | Rozwiązanie MRS dla siatki 10 × 10 oraz $H_2 = 0,05$ m |                |                |                |
|------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|                  |                           | $H_1 = 1,5H_2$                                         | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ | $H_1 = 3,0H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | a)                        | 178,794                                                | 275,228        | 381,828        | 494,663        |
| $l_y = 2,0$ m    | b)                        | 269,557                                                | 411,319        | 567,616        | 734,659        |
| $l_x = 4,0$ m    | a)                        | 237,126                                                | 340,711        | 451,021        | 568,533        |
| $l_y = 2,0$ m    | b)                        | 370,971                                                | 525,500        | 687,963        | 860,612        |

Tabela 10.11. Wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej jak na rysunku 10.6, otrzymane przy użyciu siatki MRS 15 × 15 [106]

| Wymiary<br>płyty | Podparcie<br>wg rys. 10.6 | Rozwiązanie MRS dla siatki 15 × 15 oraz $H_2 = 0,05$ m |                |                |                |
|------------------|---------------------------|--------------------------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|                  |                           | $H_1 = 1,5H_2$                                         | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ | $H_1 = 3,0H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | a)                        | 173,122                                                | 264,098        | 360,965        | 457,629        |
| $l_y = 2,0$ m    | b)                        | 266,355                                                | 407,299        | 563,015        | 729,446        |
| $l_x = 4,0$ m    | a)                        | 225,909                                                | 319,572        | 415,975        | 514,998        |
| $l_y = 2,0$ m    | b)                        | 354,487                                                | 495,568        | 638,869        | 786,726        |

Na podstawie danych z tabeli 10.9 można stwierdzić, że przy użyciu siatki MRS o gęstości 15 × 15 otrzymane wartości obciążenia krytycznego różnią się w porównaniu z rozwiązaniem analitycznym dla płyty kwadratowej i prostokątnej odpowiednio o 2,11% i 1,82% w przypadku swobodnego podparcia oraz o 0,05% i 1,55% w sytuacji utwierdzenia płyt na obwodzie. Stosując siatkę 20 × 20, otrzymuje się analogiczne różnice wynoszące odpowiednio 1,1% i 0,65% oraz 0,25% i 0,4%. Zatem najdokładniejsze wartości obciążenia krytycznego uzyskano przy użyciu siatki 20 × 20, w przypadku gdy rozważana płyta o stałej grubości jest utwierdzona na obwodzie. Różnica procentowa w odniesieniu do rozwiązania analitycznego nie przekracza wówczas 1%.

Na podstawie wyników w tabelach 10.10–10.11 można stwierdzić, że iloraz obciążenia krytycznego obliczonego dla  $H_1/H_2 = 1,5$  przez odpowiednią jego wartość w przypadku płyty o stałej grubości równej  $H_2$  wynosi 1,71–1,84. Przyjmując kolejno:  $H_1/H_2 = 2,0$ ,  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz  $H_1/H_2 = 3,0$ , ilorazy te wynoszą odpowiednio: 2,39–2,84, 3,08–3,94 oraz 3,8–5,10. Większe wartości zawarte w podanych przedziałach dotyczą płyt kwadratowych.

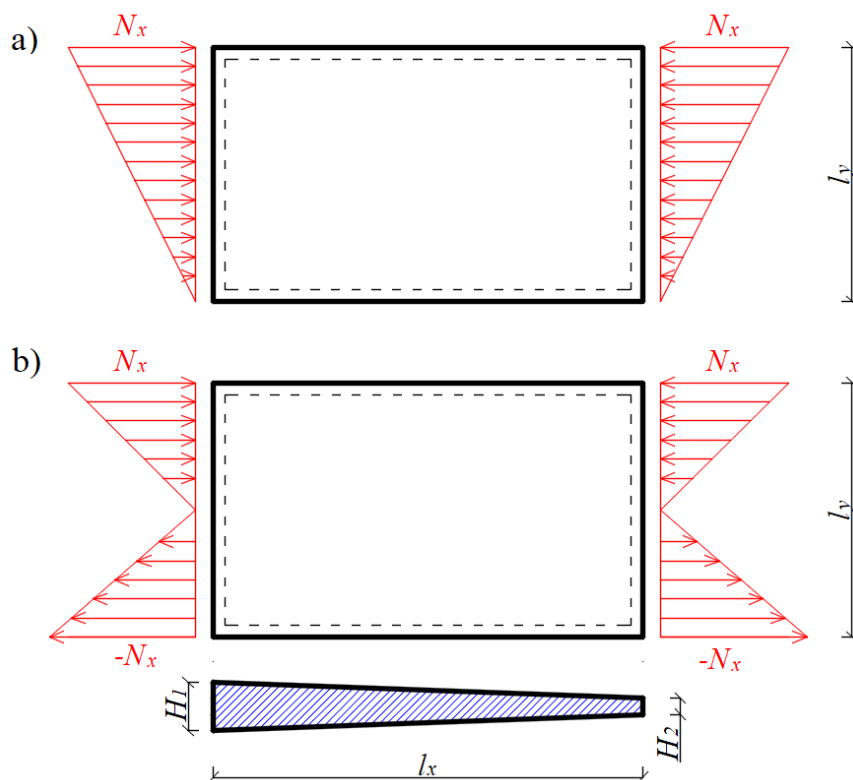
Z danych w tabelach 10.10–10.11 można odczytać ponadto, że różnica procentowa wyników uzyskanych przy użyciu siatki  $15 \times 15$  w porównaniu z siatką  $10 \times 10$  wynosi dla:  $H_1/H_2 = 1,5$ ,  $H_1/H_2 = 2,0$ ,  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz  $H_1/H_2 = 3,0$  odpowiednio: 3,17%–4,44%, 4,04%–5,70%, 5,46%–7,14% oraz 7,49%–8,59%, przy czym większe wartości w przedziałach dotyczą płyty prostokątnej. Z podanych różnic procentowych wynika, że wartości obciążenia krytycznego należy obliczyć dla gęstszych siatek MRS w celu zaobserwowania wyraźnej zbieżności uzyskiwanych rozwiązań. Przyjęto kryterium, zgodnie z którym różnice procentowe między wartościami otrzymanymi dla kolejnych siatek MRS nie powinny przekroczyć 1%.

Podsumowując dane zestawione we wszystkich zamieszczonych w niniejszym przykładzie tabelach, można zaobserwować, że największe wartości pierwszego obciążenia krytycznego otrzymano dla płyty prostokątnej utwierdzonej na obwodzie, a najmniejsze w przypadku płyty kwadratowej podpartej swobodnie.

**Przykład 10.4.** [106] *Analiza stateczności płyty prostokątnej podpartej przegubowo na obwodzie oraz obciążonej liniowo zmiennym obciążeniem normalnym*

W przykładzie rozpatrzono płytę swobodnie podpartą na obwodzie o dwóch schematach obciążenia normalnego, przedstawionych na rysunku 10.7. Parametry materiałowe płyty przyjęto identyczne jak we wcześniej rozważanych przykładach niniejszego podrozdziału. Obciążenie przedstawione na rysunku 10.7a) działa ściskająco na płytę, rozłożone jest wzdłuż jej krawędzi o długości  $l_y$  oraz opisane jedną funkcją liniową. Obciążenie pokazane na rysunku 10.7b) rozłożone jest wzdłuż tych samych krawędzi oraz określone przy pomocy dwóch funkcji liniowych, przy czym na połowie krawędzi działa ono ściskająco, a w pozostałej jej części rozciągająco na płytę.

Wykonując analizę stateczności płyty o zmiennym obciążeniu normalnym, należy wprowadzić modyfikację do macierzy  $\Delta_G$  występującej w uogólnionym problemie własnym opisanym wzorem (10.17). Modyfikacja ta wynika ze zmiennych wartości obciążenia w poszczególnych węzłach siatki MRS zdefiniowanej na powierzchni płyty. Wartość obciążenia zmienia się wraz ze zmianą współrzędnej  $y$ . Na rysun-

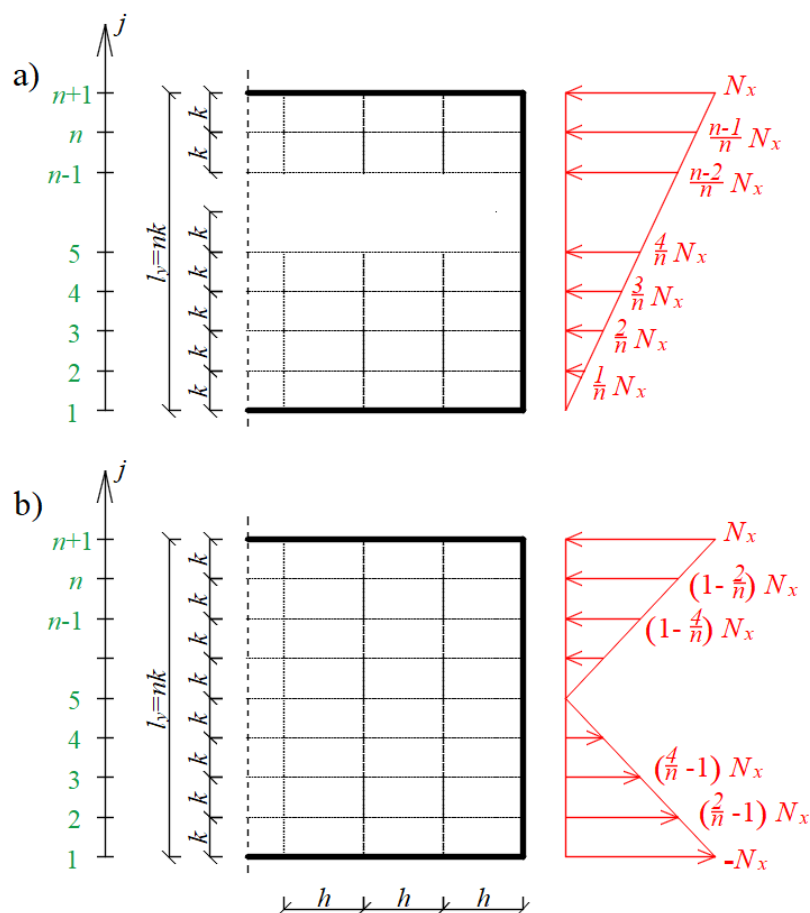


Rysunek 10.7. Płyta prostokątna podparta swobodnie na obwodzie, poddana działaniu zmiennego obciążenia normalnego  $N_x$  w dwóch wariantach, analizowana w przykładzie 10.4

ku 10.8 przedstawiono podział boku płyty wzdłuż kierunku  $y$  w wyniku nałożenia siatki MRS o wymiarach  $m \times n$ . Ponadto pokazano odpowiadający podział obciążenia dla każdego z dwóch wariantów z rysunku 10.7. W przypadku dyskretyzacji płyty zgodnie z rysunkiem 10.8b) należy przyjąć, że  $n$  jest liczbą parzystą. Z przedstawionych schematów obciążenia płyty wynika, że w macierzach  $\Delta_G^{(x)}$ ,  $\Delta_G^{(y)}$  oraz  $\Delta_G^{(xy)}$  składających się na macierz  $\Delta_G$ , mających struktury blokowe wyrażone wzorami (10.9)–(10.16), należy przemnożyć elementy macierzy-bloków w  $j$ -tym wierszu ( $j = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ ) przez następujące wartości:

- dla obciążenia z rysunku 10.8a) – przez wartość  $(j - 1)/n$ ,
- dla obciążenia z rysunku 10.8b) – przez wartość  $(j - 0,5n - 1)/(0,5n)$ .

W tabelach 10.12–10.13 zestawiono wartości obciążenia krytycznego  $\tilde{N}_{cr,x}$  odpowiadającego trzem pierwszym postaciom utraty stateczności, wyrażonego w notacji bezwymiarowej, dla płyt odpowiednio kwadratowej o długości boku 2,0 m oraz prostokątnej o długości boków  $l_x \times l_y = 3,0 \times 2,0$  m. Przyjęto grubość płyt równą 0,05 m. Wyniki uzyskane na podstawie MRS podano dla trzech różnych siatek i porówna-



Rysunek 10.8. Schemat obliczeniowy płyty prostokątnej poddanej działaniu liniowo zmiennego obciążenia normalnego  $N_x$  w dwóch wariantach przedstawionych na rysunku 10.7

no je z dostępnymi w literaturze rozwiązaniami analitycznymi oraz otrzymanymi przy zastosowaniu MEB. W tabeli 10.12 rozpatrzono obciążenie płyty według rysunku 10.7a), natomiast w tabeli 10.13 zgodnie z rysunkiem 10.7b).

W tabelach 10.14–10.17 przedstawiono wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych, otrzymane dla płyty o liniowo zmiennej grubości, której przekrój pokazano na rysunku 10.7. Obciążenie przyjęto według wariantu a) w tabelach 10.14–10.15 oraz zgodnie z wariantem b) w tabelach 10.16–10.17. Założono grubość  $H_2 = 0,05$  m oraz  $H_1 \in \{1,5H_2, 2,0H_2, 2,5H_2, 3,0H_2\}$ . Wyniki podano dla dwóch gęstości siatki MRS, odpowiednio  $10 \times 10$  i  $15 \times 15$  w tabelach 10.14–10.15 oraz  $10 \times 10$  i  $16 \times 16$  w tabelach 10.16–10.17.

Z danych w tabeli 10.12 wynika, że w przypadku liniowo zmiennego obciążenia  $N_x$  o stałym znaku, działającego na płytę kwadratową o stałej grubości, różnice procentowe między wartością pierwszego obciążenia krytycznego otrzymaną przy pomocy MRS a rozwiązaniem analitycznym wynoszą: 3,4%, 0,75% i 0,25%, odpowiednio dla

Tabela 10.12. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o stałej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7a), otrzymane dla trzech gęstości siatki MRS

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozw. anal.<br>[2, 3] | Rozw. MEB<br>[9] | Rozwiązanie MRS |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------|------------------|-----------------|----------------|----------------|
|                  |                  |                       |                  | $5 \times 5$    | $10 \times 10$ | $15 \times 15$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 76,983                | 77,386           | 74,267          | 76,386         | 76,783         |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | –                     | 115,735          | 104,312         | 112,019        | 113,524        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | –                     | 194,371          | 151,560         | 180,320        | 186,257        |
| $l_x = 3,0$ m    | 1                | 124,357               | 124,521          | 116,460         | 121,940        | 123,010        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | –                     | –                | 132,080         | 135,710        | 136,390        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | –                     | –                | 144,100         | 164,400        | 168,630        |

Tabela 10.13. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o stałej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7b), otrzymane dla trzech gęstości siatki MRS [106]

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozw. anal.<br>[2, 3] | Rozw. MEB<br>[9] | Rozwiązanie MRS |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------|------------------|-----------------|----------------|----------------|
|                  |                  |                       |                  | $6 \times 6$    | $10 \times 10$ | $16 \times 16$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 252,662               | 254,801          | 229,890         | 243,600        | 248,650        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | –                     | 269,193          | 246,110         | 259,540        | 264,410        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | –                     | 340,384          | 285,230         | 314,850        | 326,200        |
| $l_x = 3,0$ m    | 1                | 356,786               | 359,733          | 331,570         | 347,380        | 353,170        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | –                     | –                | 337,641         | 362,295        | 371,679        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | –                     | –                | 370,347         | 419,396        | 439,074        |

Tabela 10.14. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7a), otrzymane przy użyciu siatki MRS  $10 \times 10$ 

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozwiązanie MRS – siatka $10 \times 10$ |                |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|                  |                  | $H_1 = 1,5H_2$                          | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ | $H_1 = 3,0H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 132,425                                 | 184,234        | 230,908        | 271,063        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 213,102                                 | 334,199        | 456,427        | 572,081        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 330,188                                 | 503,047        | 682,300        | 831,988        |
| $l_x = 3,0$ m    | 1                | 181,328                                 | 231,689        | 278,866        | 322,662        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 269,947                                 | 390,773        | 506,907        | 624,420        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 324,074                                 | 529,272        | 737,979        | 965,493        |

siatek:  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$  i  $15 \times 15$ . W przypadku płyty prostokątnej analogiczne różnice są równe: 6,35%, 1,94% i 1,08%. Można zatem stwierdzić, że zadowalającą dokładność pierwszego obciążenia krytycznego uzyskano przy użyciu siatek  $10 \times 10$  oraz  $15 \times 15$

Tabela 10.15. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7a), otrzymane przy użyciu siatki MRS  $15 \times 15$ 

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozwiązanie MRS – siatka $15 \times 15$ |                |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|                  |                  | $H_1 = 1,5H_2$                          | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ | $H_1 = 3,0H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 133,019                                 | 183,444        | 225,662        | 256,558        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 216,683                                 | 341,850        | 469,498        | 588,920        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 343,659                                 | 529,321        | 714,029        | 867,681        |
| $l_x = 3,0$ m    | 1                | 183,464                                 | 234,959        | 282,294        | 324,288        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 275,468                                 | 406,224        | 530,824        | 649,202        |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 332,890                                 | 555,507        | 771,025        | 970,506        |

Tabela 10.16. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7b), otrzymane przy użyciu siatki MRS  $10 \times 10$ 

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozwiązanie MRS – siatka $10 \times 10$ |                |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|                  |                  | $H_1 = 1,5H_2$                          | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ | $H_1 = 3,0H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 356,822                                 | 451,530        | 540,705        | 622,997        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 510,940                                 | 725,508        | 930,977        | 1140,952       |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 616,705                                 | 972,349        | 1343,347       | 1769,970       |
| $l_x = 3,0$ m    | 1                | 475,490                                 | 571,600        | 661,893        | 749,692        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 634,626                                 | 845,837        | 1067,032       | 1311,396       |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 763,057                                 | 1110,739       | 1529,413       | 2033,606       |

Tabela 10.17. Wartości trzech pierwszych obciążeń krytycznych płyty o liniowo zmiennej grubości, obciążonej zgodnie z rysunkiem 10.7b), otrzymane przy użyciu siatki MRS  $16 \times 16$ 

| Wymiary<br>płyty | $\tilde{N}_{cr}$ | Rozwiązanie MRS – siatka $16 \times 16$ |                |                |                |
|------------------|------------------|-----------------------------------------|----------------|----------------|----------------|
|                  |                  | $H_1 = 1,5H_2$                          | $H_1 = 2,0H_2$ | $H_1 = 2,5H_2$ | $H_1 = 3,0H_2$ |
| $l_x = 2,0$ m    | 1                | 364,463                                 | 463,849        | 554,657        | 633,851        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 528,820                                 | 765,167        | 986,202        | 1192,906       |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 642,443                                 | 1040,035       | 1416,934       | 1779,426       |
| $l_x = 3,0$ m    | 1                | 489,469                                 | 592,692        | 687,517        | 775,426        |
| $l_y = 2,0$ m    | 2                | 667,448                                 | 901,182        | 1116,439       | 1322,201       |
| $H_2 = 0,05$ m   | 3                | 819,499                                 | 1177,892       | 1518,804       | 1871,232       |

dla płyty odpowiednio kwadratowej i prostokątnej. Przyjęto kryterium dokładności około 1%.

Na podstawie analizy danych w tabeli 10.13 można stwierdzić, że w przypadku

plyty kwadratowej o stałej grubości, obciążonej liniowo zmiennym obciążeniem  $N_x$  o różnych znakach, różnice procentowe między wartością pierwszego obciążenia krytycznego uzyskaną przy zastosowaniu MRS a rozwiązaniem analitycznym wynoszą: 9,01%, 3,59% i 1,59%, odpowiednio dla siatek:  $5 \times 5$ ,  $10 \times 10$  i  $16 \times 16$ . Analogiczne różnice dotyczące płyty prostokątnej przyjmują wartości: 7,07%, 2,64% i 1,01%. Zatem w celu uzyskania zadowalającej dokładności pierwszego obciążenia krytycznego, przy założeniu kryterium około 1%, obliczenia dla płyty kwadratowej należałoby przeprowadzić, stosując gęstszą siatkę MRS, np.  $18 \times 18$  lub  $20 \times 20$ . W przypadku płyty prostokątnej można przyjąć siatkę MRS  $16 \times 16$  jako wystarczającą.

Z wartości zestawionych w tabeli 10.15 wynika, że w przypadku liniowo zmiennego obciążenia  $N_x$  o stałym znaku, przyjmując  $H_1/H_2 = 1,5$ , iloraz pierwszego obciążenia krytycznego płyty o zmiennej oraz stałej grubości równej  $H_2$  wynosi 1,49 i 1,73, odpowiednio dla płyty prostokątnej i kwadratowej, przy użyciu siatki MRS  $15 \times 15$ . Dla  $H_1/H_2 = 2,0$ ,  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz  $H_1/H_2 = 3,0$  ilorazy te wynoszą odpowiednio: 1,91 i 2,39, 2,29 i 2,94 oraz 2,64 i 3,34. Można więc wyciągnąć wniosek, że krotność wzrostu pierwszego obciążenia krytycznego płyty o zmiennej grubości względem wartości tego obciążenia dla odpowiadającej płyty o stałej grubości jest mniejsza od ilorazu  $H_1/H_2$  w przypadku płyty prostokątnej oraz większa od niego dla płyty kwadratowej.

Z danych w tabelach 10.14–10.15 można odczytać, że różnica procentowa wyników uzyskanych przy zastosowaniu siatki  $15 \times 15$  w odniesieniu do siatki  $10 \times 10$  wynosi dla ilorazów:  $H_1/H_2 = 1,5$ ,  $H_1/H_2 = 2,0$ ,  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz  $H_1/H_2 = 3,0$  odpowiednio: 0,45%–4,08%, 0,43%–5,22%, 2,27%–4,65% oraz 2,94%–5,35% w przypadku płyty kwadratowej. W podanych przedziałach procentowych większe wartości różnic dotyczą pierwszego obciążenia krytycznego dla  $H_1/H_2 = 3,0$  oraz trzeciego obciążenia krytycznego dla pozostałych ilorazów  $H_1/H_2$ . W przypadku płyty prostokątnej analogiczne różnice procentowe między wynikami otrzymanymi przy użyciu siatek  $10 \times 10$  i  $15 \times 15$  wynoszą dla kolejnych ilorazów  $H_1/H_2$  odpowiednio: 1,18%–2,72%, 1,41%–4,96%, 1,23%–4,47% oraz 0,50%–3,97%. W podanych przedziałach większe wartości różnic dotyczą drugiego obciążenia krytycznego dla ilorazów  $H_1/H_2 = 2,5$  i  $H_1/H_2 = 3,0$  oraz trzeciego obciążenia krytycznego w przypadku pozostałych relacji  $H_1/H_2$ . Z przedstawionych różnic procentowych wynika, że wartości obciążeń krytycznych należy obliczyć, przyjmując gęstsze siatki MRS, w celu zaobserwowania wyraźnej zbieżności uzyskiwanych wyników. Można przyjąć, że zbieżność ta rozpoczyna się od siatki MRS, dla której otrzymane wartości obciążeń krytycznych nie

różnią się więcej niż o 1% w porównaniu z najbliższą przyjętą siatką o mniejszej gęstości.

Na podstawie wyników zamieszczonych w tabeli 10.17 można wyciągnąć wniosek, że w przypadku liniowo zmiennego obciążenia  $N_x$  o różnych znakach, zakładając  $H_1/H_2 = 1,5$ , iloraz pierwszego obciążenia krytycznego płyty o zmiennej grubości do wartości tego obciążenia dla odpowiadającej płyty o stałej grubości równej  $H_2$  wynosi 1,39 i 1,47, odpowiednio dla płyty prostokątnej i kwadratowej, przyjmując siatkę  $16 \times 16$ . Dla  $H_1/H_2 = 2,0$ ,  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz  $H_1/H_2 = 3,0$  ilorazy te wynoszą odpowiednio: 1,68 i 1,87, 1,95 i 2,23 oraz 2,20 i 2,55. Przedstawione wartości są mniejsze od odpowiadających im w płycie z obciążeniem o stałym znaku i nie przekraczają odpowiednich relacji  $H_1/H_2$ .

Z danych zawartych w tabelach 10.16–10.17 wynika, że różnica procentowa wartości obciążenia krytycznego uzyskanych przy użyciu siatek MRS  $15 \times 15$  oraz  $10 \times 10$  wynosi dla  $H_1/H_2 = 1,5$ ,  $H_1/H_2 = 2,0$ ,  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz  $H_1/H_2 = 3,0$  odpowiednio: 2,14%–4,17%, 2,73%–6,96%, 2,58%–5,48% oraz 0,53%–1,74% w przypadku płyty kwadratowej. W podanych przedziałach procentowych większe wartości różnic dotyczą drugiego obciążenia krytycznego dla  $H_1/H_2 = 2,5$  i  $H_1/H_2 = 3,0$  oraz trzeciego obciążenia krytycznego w pozostałych wariantach  $H_1/H_2$ . W przypadku płyty prostokątnej analogiczne różnice procentowe między wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu siatek  $10 \times 10$  i  $15 \times 15$  wynoszą dla kolejnych ilorazów  $H_1/H_2$  odpowiednio: 2,94%–7,40%, 3,69%–6,54%, 0,69%–4,63% oraz 0,82%–7,98%. W podanych przedziałach procentowych większe wartości różnic dotyczą drugiego obciążenia krytycznego dla  $H_1/H_2 = 2,0$  i  $H_1/H_2 = 2,5$  oraz trzeciego obciążenia krytycznego przy założeniu pozostałych ilorazów  $H_1/H_2$ . Z podanych różnic procentowych wynika, że wartości obciążeń krytycznych należy obliczyć dla gęstszych siatek MRS, stosując kryterium zbieżności określone podczas interpretacji wyników zawartych w tabelach 10.14–10.15.

Porównując ze sobą wyniki w tabelach 10.14–10.15 oraz 10.16–10.17, można stwierdzić, że większe wartości obciążeń krytycznych otrzymano dla płyty, na którą nałożono liniowo zmienne obciążenie o różnych znakach, zgodnie z rysunkiem 10.7b). Uzyskane w tym przypadku wartości pierwszego i drugiego obciążenia krytycznego wzrosły ponad 2-krotnie w odniesieniu do płyty z obciążeniem o stałym znaku według rysunku 10.7a).



## 11. Podsumowanie i wnioski końcowe

Niniejszą dysertację poświęcono szeroko rozumianej analizie dźwigarów powierzchniowych – płyt cienkich – z uwzględnieniem ortotropii materiałowej, obecności ośrodka zewnętrznego w postaci płynu oraz dodatkowych więzów lepkosprężystych. Główny element pracy stanowiła analiza dynamiki płyt zanurzonych w płynie lub posadowionych na podporach lepkosprężystych, w ujęciu deterministycznym i losowym. Zaprezentowaną na początku dysertacji analizę statyki należy traktować jako rozdział wprowadzający w główny nurt poznawczy, a zadania stateczności początkowej płyt w ujęciu metody różnic skończonych, przedstawione na końcu pracy, stanowią jego naturalne, krótkie uzupełnienie.

W niżej przedstawionych podrozdziałach zestawiono najważniejsze wnioski z badań przeprowadzonych w dysertacji, które podzielono na cztery kategorie [116]. Dokonano skróconej analizy uzyskanych wyników w celu udzielenia odpowiedzi na sformułowane pytania badawcze oraz oceny poprawności postawionych hipotez (wnioski poznawcze, merytoryczne). Następnie, w ramach wniosków metodycznych, oceniono pracę ze względu na poprawność przyjętej metodyki badawczej. W podrozdziale poświęconym wnioskom aplikacyjnym przedstawiono możliwości i zakres wykorzystania wyników pracy w praktyce inżynierskiej oraz naukowej. Ostatnia grupa wniosków, tzn. wnioski prognostyczne, zawiera wskazanie kierunków dalszych badań nad problemami związanymi z tematyką dysertacji.

### 11.1. Wnioski poznawcze

W niniejszej rozprawie doktorskiej przeprowadzono analizy pozwalające udzielić odpowiedzi na postawione w rozdziale 2 pytania badawcze. Odnosząc się do sformułowanych pytań, składających się na główny problem badawczy, można wyciągnąć niżej zapisane wnioski:

1. Wpływ czynników, takich jak umieszczenie płyty w płynnym ośrodku zewnętrznym, wyposażenie jej w lepkosprężyste tłumiki drgań oraz anizotropowa struktura, na wartości częstości drgań własnych, przedstawia się następująco:
  - a) Umieszczenie płyty w ośrodku wodnym spowodowało zmniejszenie wartości jej częstości drgań własnych w porównaniu z płytą znajdującą się w próżni. Wielkość tego spadku zależy od:

- sposobu podparcia płyty – w sytuacji swobodnego podparcia na obwodzie otrzymano większy spadek w porównaniu z podparciem typu wspornikowego,
- postaci funkcji sztywności płyty – w przypadku liniowo zmiennej grubości analizowany spadek wartości częstości drgań własnych płyty wspornikowej zmniejsza się wraz ze wzrostem jej grubości przy utwierdzonej krawędzi,
- materiału płyty – w przypadku materiału ortotropowego otrzymano znaczny spadek częstości drgań własnych płyty, w wyniku zanurzenia jej w płynie, w porównaniu z analizowaną płytą o identycznych wymiarach, wykonaną z materiału izotropowego,
- głębokości zanurzenia płyty w wodzie – spadek wartości częstości drgań własnych zwiększa się wraz ze wzrostem tej głębokości.

Masa dołączona, uwzględniająca obecność płynu, ma zatem znaczny wpływ na charakterystyki dynamiczne płyty.

b) Wyposażenie płyty w lepkosprężyste tłumiki drgań zaszkodziło zwiększeniem wartości częstości drgań własnych powstałego układu w porównaniu z płytą nie posiadającą tłumików. Wielkość tego wzrostu zależy od:

- liczby tłumików zamocowanych do płyty – im większa jest ta liczba, tym większe są wartości częstości drgań własnych układu płyta–tłumiki,
- wartości parametrów charakteryzujących tłumiki zamocowane do płyty,
- temperatury otoczenia tłumików – wzrost wartości częstości drgań własnych układu płyta–tłumiki zmniejsza się wraz ze wzrostem temperatury otoczenia w porównaniu z temperaturą referencyjną.

Jako przyczynę wzrostu częstości drgań można wskazać zwiększenie sztywności układu z powodu występowania elementów sprężystych w tłumikach.

c) Materiał, z którego wykonano analizowaną płytę ma wpływ na wartości jej częstości drgań własnych. W pracy badano efekty zmiany materiału z izotropowego (stal) na ortotropowy (bor–żywica epoksydowa) dla płyty swobodnie podpartej. Odnotowano następujące obserwacje:

- W przypadku umieszczenia obu badanych płyt w próżni stwierdzono, że zmiana materiału z izo- na ortotropowy spowodowała wzrost wartości pierwszej częstości drgań własnych o 12% oraz spadek drugiej i trzeciej częstości odpowiednio o 25% i 35% (przykład 4.4).
- W sytuacji całkowitego zanurzenia badanych płyt w wodzie wykazano, że wskutek rozważanej zmiany materiału nastąpił spadek wartości trzech

pierwszych częstości drgań własnych odpowiednio o 42%, 61% oraz 55% (przykład 5.4).

Zmiana materiału badanego elementu płytowego może zatem spowodować zarówno zmniejszenie, jak i zwiększenie wartości wybranej częstości drgań własnych.

2. Na podstawie przykładów zamieszczonych w rozdziałach 3–6, gdzie te same zagadnienia analizowano przy zastosowaniu różnych metod numerycznych spośród MES, MRS oraz MEB, można odnotować następujące spostrzeżenia:
  - a) W przypadku analizy statycznej płyt, przeprowadzonej przy użyciu MES oraz MRS (rozdział 3), stwierdzono, że efektywność zastosowanej metody w znacznej mierze zależy od schematu podparcia badanej płyty.
    - Dla prostokątnej płyty wspornikowej z przykładu 3.1 szybszą zbieżność wartości ugięcia wybranych jej punktów otrzymano, korzystając z metody elementów skończonych. Przy zastosowaniu metody różnic skończonych konieczne było użycie gęstszej siatki w celu uzyskania poprawnych wyników.
    - Analizując różne schematy podparcia kwadratowych płyt z przykładu 3.2, stwierdzono, że wartości ugięcia ich punktu środkowego obliczone przy użyciu MES były bliższe wynikom analitycznym w porównaniu z MRS w przypadku płyty utwierdzonej na obwodzie, podpartej swobodnie na dwóch krawędziach oraz podpartej w sposób mieszany (dwie krawędzie swobodnie podparte i dwie krawędzie utwierdzone). Z kolei w sytuacji swobodnego podparcia płyty na obwodzie dokładniejsze wyniki oraz ich szybszą zbieżność otrzymano przy zastosowaniu MRS.
  - b) Przeprowadzając analizę dynamiczną płyt umieszczonych w próżni, zgodnie z metodologiami MES oraz MRS (rozdział 4), stwierdzono, że spośród dwóch badanych schematów podparcia (swobodne podparcie na obwodzie lub utwierdzenie na jednej krawędzi – przykłady 4.1 oraz 4.2) najbliższe wynikom analitycznym częstości drgań własnych otrzymano przy zastosowaniu MES. W sytuacji użycia MRS w analizie płyty podpartej swobodnie na obwodzie otrzymano wyniki o zadowalającej dokładności, natomiast analizując płytę wspornikową, sformułowano wniosek o konieczności zastosowania gęstszej siatki w porównaniu z odpowiadającą dyskretyzacją MES.
  - c) Podczas badań drgań własnych płyt zanurzonych w płynie, przeprowadzonych przy użyciu kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB (rozdział 5), stwierdzono, że efektywność zastosowanych metod zależy od

schematu podparcia badanych płyt, ich głębokości zanurzenia w cieczy oraz numeru rozważanej częstości drgań.

- Na podstawie analizy w przykładzie 5.1 prostokątnej płyty podpartej swobodnie na obwodzie oraz zanurzonej całkowicie w wodzie, wykazano, że zastosowanie kombinacji metod MRS–MEB pozwoliło otrzymać dokładniejsze wartości czterech pierwszych częstości drgań własnych w porównaniu z połączeniem metod MES–MEB. Jako kryterium dokładności przyjęto w tym przypadku różnicę w odniesieniu do wyników uzyskanych przy pomocy MEB, zawartych w dostępnej literaturze. Jeśli różnica nie przekroczyła 1%, to wyniki uznano za wystarczająco dokładne.
  - W przypadku prostokątnej płyty wspornikowej zanurzonej całkowicie w wodzie, rozważanej w przykładzie 5.2, dokładniejsze wartości pierwszej i trzeciej częstości drgań własnych uzyskano przy zastosowaniu połączenia metod MRS–MEB. Z kolei dla drugiej i czwartej częstości korzystniejsze okazało się użycie kombinacji MES–MEB. W celu oceny dokładności odniesiono się do zawartych w literaturze wyników otrzymanych analitycznie. Dla obu zastosowanych kombinacji metod numerycznych sformułowano wnioski o konieczności przyjęcia gęstszych siatek MES oraz MRS w porównaniu z przypadkiem płyty podpartej swobodnie na obwodzie.
  - Podczas analizy w przykładzie 5.5 prostokątnej płyty wspornikowej zanurzonej częściowo w wodzie w pozycji pionowej otrzymano najbliższe analitycznym wartości pierwszej i czwartej częstości drgań własnych przy zastosowaniu kombinacji metod MRS–MEB dla większości przypadków głębokości zanurzenia. Kombinacja MES–MEB okazała się być dokładniejsza przy wyznaczaniu drugiej i trzeciej częstości drgań własnych.
  - Badając w przykładzie 5.6 prostokątną płytę wspornikową zanurzoną w wodzie w pozycji poziomej, z uwzględnieniem granicy ośrodków próżnia–woda, dokładniejsze wartości pierwszej i czwartej częstości drgań własnych otrzymano przy użyciu kombinacji metod MRS–MEB dla większości przypadków względnej głębokości zanurzenia płyty. Wyniki obliczeń drugiej i trzeciej częstości drgań własnych bardziej zbliżone do analitycznych uzyskano przy zastosowaniu kombinacji MES–MEB.
- d) W przypadku analizy dynamicznej układu płyt zanurzonych w płynie, przeprowadzonej przy użyciu kombinacji metod numerycznych MES–MEB oraz MRS–MEB (rozdział 6), stwierdzono, że efektywność zastosowanych metod zależy od schematu podparcia badanych płyt, sposobu ich ułożenia względem

siebie oraz numeru rozważanej częstości drgań. O podobieństwie wyników uzyskanych za pomocą obu kombinacji metod MES–MEB i MRS–MEB decyduje zbliżona gęstość siatki podobszarów cieczy, której odpowiada gęstsza siatka MRS w porównaniu z siatką MES.

- W przypadku układu dwóch swobodnie podpartych płyt zanurzonych w płynie, leżących w jednej płaszczyźnie (przykład 6.1) kombinacja metod MES–MEB pozwoliła otrzymać dokładniejsze wartości pierwszej i drugiej częstości drgań własnych, tzn. bliższe wynikom uzyskanym przy użyciu MEB, zawartym w dostępnej literaturze. Z kolei obliczając częstości od czwartej do szóstej, korzystniejsza okazała się być kombinacja MRS–MEB.
  - Podczas analizy układu dwóch wspornikowych płyt zanurzonych w płynie, leżących w dwóch płaszczyznach równoległych (przykład 6.2) otrzymano dokładniejsze wartości pierwszej, drugiej, piątej i szóstej częstości drgań własnych przy użyciu kombinacji metod MRS–MEB, tzn. bardziej zbliżone do zawartych w literaturze rozwiązań uzyskanych w wyniku zastosowania MEB. Z kolei korzystniejsze wyniki obliczeń trzeciej i czwartej częstości drgań otrzymano, stosując kombinację MES–MEB.
3. W przykładzie 7.1 wyznaczono zależność pierwszej częstości drgań własnych od temperatury otoczenia na podstawie analizy płyty wspornikowej wyposażonej w trzy lepkosprężyste tłumiki drgań. W wyniku przeprowadzonych badań sformułowano następujące wnioski:
- Wraz ze wzrostem temperatury pierwsza częstość drgań własnych układu płyta–tłumiki maleje i dąży do ustalonej wartości, która jest bliska częstości drgań własnych płyty nie posiadającej tłumików (różnica wynosi około 1,14%).
  - Dla temperatur o wartościach zbliżonych do temperatury referencyjnej pierwsza częstość drgań własnych badanego układu jest o około 10% wyższa w porównaniu z wartością tej częstości w przypadku płyty bez tłumików.
  - Można określić wartość temperatury, powyżej której pierwsza częstość drgań własnych płyty z tłumikami pozostaje stała (w analizowanym przykładzie ta temperatura wynosi około 8°C).
4. W przykładach zawartych w rozdziale 8 otrzymano następujące optymalne lokalizacje ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchniach analizowanych płyt:
- dla płyty wspornikowej wyposażonej w jeden tłumik lepkosprężysty (przykład 8.1) – w pobliżu środka jej swobodnej krawędzi,

- dla płyty utwierdzonej na dwóch sąsiednich krawędziach i swobodnie podpartej na trzeciej krawędzi, wyposażonej w cztery tłumiki lepkosprężyste (przykład 8.2) – w czterech sąsiednich węzłach siatki MES znajdujących się w pobliżu miejsca występowania ekstremalnego przemieszczenia na wykresie pierwszej postaci drgań własnych płyty.

W każdym przypadku zastosowano metodę optymalizacyjną roju cząstek (PSO), w której przyjęto kryterium maksymalizacji bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań ( $\gamma_1$ ).

5. Na podstawie przykładów zamieszczonych w rozdziałach 4–6 oraz w rozdziale 10 można sformułować poniższe wnioski odnośnie zależności między wartościami częstości drgań własnych lub obciążeń krytycznych otrzymanymi dla płyty o liniowo zmiennej grubości  $H$ , gdzie  $H_2 \leq H \leq H_1$ , oraz odpowiadającej jej płyty o stałej grubości  $H = H_2$ :
  - a) Analizując w przykładzie 4.3 dynamikę wspornikowej płyty o liniowo zmiennej grubości, umieszczonej w próżni, stwierdzono, że pierwsza częstość drgań własnych otrzymana przy spełnieniu zależności  $H_1/H_2 = 2$  (gdzie  $H_1$  oraz  $H_2$  – grubości przy krawędziach płyty, odpowiednio utwierdzonej oraz przeciwległej swobodnej) jest 2,15-krotnie większa w porównaniu z wartością tej częstości uzyskanej dla płyty o stałej grubości  $H = H_2$ . W przypadku  $H_1/H_2 = 3$  oraz  $H_1/H_2 = 4$  wzrost rozważanej częstości drgań jest odpowiednio 3,4- oraz 4,7-krotny.
  - b) W przypadku analizy dynamicznej zanurzonej całkowicie w wodzie wspornikowej płyty charakteryzującej się liniowo zmienną grubością (przykład 5.3) spełniającą zależności kolejno:  $H_1/H_2 = 2$ ,  $H_1/H_2 = 3$  oraz  $H_1/H_2 = 4$  stwierdzono, że otrzymana pierwsza częstość drgań własnych jest odpowiednio: 2,3-, 3,8-, oraz 5,5-krotnie większa w porównaniu z płytą o stałej grubości  $H = H_2$ .
  - c) Analiza dynamiczna wspornikowej płyty o liniowo zmiennej grubości, zanurzonej częściowo w wodzie w pozycji pionowej (przykład 5.7) pozwoliła sformułować wniosek, że w przypadku  $H_1/H_2 = 2$  otrzymano około 2,2–2,3-krotny wzrost wartości pierwszej częstości drgań własnych w porównaniu z odpowiednią płytą o stałej grubości  $H = H_2$ . Dla  $H_1/H_2 = 3$  analogiczny wzrost tej częstości jest 3,8-krotny.
  - d) W przypadku układu dwóch płyt swobodnie podpartych o liniowo zmiennej grubości, zanurzonych całkowicie w wodzie oraz leżących w jednej płaszczyźnie (przykład 6.3) stwierdzono, że spełnienie warunku  $H_1/H_2 = 2$  dla każdej

z płyt układu (gdzie  $H_1$  oraz  $H_2$  oznaczają odpowiednio maksymalną oraz minimalną grubość płyty, mierzone wzdłuż podpartych krawędzi) skutkuje około 1,7-krotnym wzrostem wartości częstości drgań własnych w porównaniu z układem płyt o stałej grubości  $H = H_2$ .

- e) Analizując w przykładzie 6.4 układ dwóch płyt wspornikowych o liniowo zmiennej grubości, zanurzonych całkowicie w wodzie oraz leżących w dwóch płaszczyznach równoległych, otrzymano około 2,3-krotny wzrost pierwszej i drugiej częstości drgań własnych w wyniku zmiany grubości płyt układu ze stałej (tzn.  $H = H_2$ ) na liniowo zmienną, spełniającą zależność  $H_1/H_2 = 2$ .
- f) W przypadku analizy stateczności płyt prostokątnych, podpartych swobodnie lub utwierdzonych na obwodzie, wpływ ich liniowo zmiennej grubości  $H$  (spełniającej nierówność  $H_2 \leq H \leq H_1$ ) na wartość obciążenia krytycznego zależy od schematu jego działania.
  - Na podstawie analizy płyty jednokierunkowo ściskanej (przykład 10.1) o liniowo zmiennej grubości spełniającej zależność  $H_1/H_2 = 1,5$  stwierdzono, że otrzymana wartość pierwszego obciążenia krytycznego wzrosła 1,8-krotnie w odniesieniu do płyty mającej stałą grubość  $H = H_2$ . W sytuacji gdy  $H_1/H_2 = 2$  oraz  $H_1/H_2 = 2,5$  wzrost rozważanego obciążenia krytycznego jest odpowiednio 2,5- oraz 3-krotny.
  - W przypadku płyty obciążonej w dwóch kierunkach stałym obciążeniem normalnym, ściskającym lub rozciągającym płytę (przykład 10.2), spełnienie warunku  $H_1/H_2 = 1,5$  skutkuje około 1,64–1,84-krotnym wzrostem wartości pierwszego obciążenia krytycznego w porównaniu z odpowiednią płytą o stałej grubości  $H = H_2$ . Dla  $H_1/H_2 = 2$  oraz  $H_1/H_2 = 2,5$  analizowane zwiększenie wartości pierwszego obciążenia krytycznego płyty jest odpowiednio 2,6–3,7-krotne oraz 3,13–4,53-krotne, w zależności od kształtu jej powierzchni środkowej (prostokątna lub kwadratowa).
  - Analizując płytę obciążoną stycznie do krawędzi (przykład 10.3), której liniowo zmienna grubość spełnia zależności kolejno:  $H_1/H_2 = 1,5$ ,  $H_1/H_2 = 2$  oraz  $H_1/H_2 = 2,5$ , otrzymano odpowiednio: 1,71–1,84-krotny, 2,39–2,84-krotny oraz 3,08–3,94-krotny wzrost wartości pierwszego obciążenia krytycznego w porównaniu z odpowiednią płytą o stałej grubości  $H = H_2$ . Większe wartości w podanych przedziałach dotyczą płyt kwadratowych.
  - Pierwsze obciążenie krytyczne płyty obciążonej liniowo zmiennym obciążeniem normalnym o stałym znaku (przykład 10.4, rysunek 10.7a) wzrosło

w odniesieniu do płyty o stałej grubości odpowiednio: 1,49–1,73-krotnie, 1,91–2,39-krotnie oraz 2,29–2,94-krotnie w wyniku zmiany grubości na liniowo zmienną, spełniającą kolejno zależności:  $H_1/H_2 = 1,5$ ,  $H_1/H_2 = 2$  oraz  $H_1/H_2 = 2,5$ . Większe wartości w podanych przedziałach otrzymano dla płyt kwadratowych.

- Analizując płytę obciążoną liniowo zmiennym obciążeniem normalnym o różnych znakach (przykład 10.4, rysunek 10.7b), otrzymano odpowiednio: 1,39–1,47-krotne, 1,68–1,87-krotne oraz 1,95–2,23-krotne zwiększenie wartości pierwszego obciążenia krytycznego jako skutek przejścia ze stałej na liniowo zmienną grubość płyty, która spełnia kolejno warunki:  $H_1/H_2 = 1,5$ ,  $H_1/H_2 = 2$  oraz  $H_1/H_2 = 2,5$ . Większe wartości w podanych przedziałach dotyczą płyt kwadratowych.

W tabeli 11.1 zestawiono krotności wzrostu wartości pierwszej częstości drgań własnych w wyniku zmiany grubości płyty ze stałej ( $H = H_2$ ) na liniowo zmienną taką, że iloraz maksymalnej ( $H_1$ ) i minimalnej grubości ( $H_2$ ) należy do zbioru  $H_1/H_2 \in \{2, 3, 4\}$ . Krotności wyrażono ilorazem  $\omega_1^{(1)}/\omega_1^{(2)}$ , gdzie  $\omega_1^{(1)}$  oraz  $\omega_1^{(2)}$  oznaczają pierwszą częstość drgań własnych wyznaczoną dla płyty o odpowiednio liniowo zmiennej oraz stałej grubości.

Tabela 11.1. Krotność wzrostu pierwszej częstości drgań własnych w wyniku zmiany grubości płyt lub ich układów, analizowanych w rozdziałach 4–6, ze stałej na liniowo zmienną

| Rodzaj płyty<br>lub układu płyt     | Przykład<br>z rozdz. 4–6 | $\omega_1^{(1)}/\omega_1^{(2)}$ dla $H_1/H_2$ : |     |     |
|-------------------------------------|--------------------------|-------------------------------------------------|-----|-----|
|                                     |                          | 2                                               | 3   | 4   |
| wspornikowa w próżni                | 4.3                      | 2,15                                            | 3,4 | 4,7 |
| wspornikowa, całkowicie w wodzie    | 5.3                      | 2,3                                             | 3,8 | 5,5 |
| wspornikowa, częściowo w wodzie     | 5.7                      | 2,2–2,3                                         | 3,8 | –   |
| układ płyt swobodnie podp. w wodzie | 6.3                      | 1,7                                             | –   | –   |
| układ płyt wspornikowych w wodzie   | 6.4                      | 2,3                                             | –   | –   |

W tabeli 11.2 zestawiono krotności wzrostu wartości pierwszego obciążenia krytycznego na skutek zmiany grubości płyty, analogicznie jak w tabeli 11.1, przy czym przyjęto, że  $H_1/H_2 \in \{1,5, 2, 2,5\}$ . Krotności zapisano jako iloraz  $N_{cr,1}/N_{cr,2}$ , gdzie  $N_{cr,1}$  oraz  $N_{cr,2}$  oznaczają pierwsze obciążenie krytyczne wyznaczone dla płyty o odpowiednio liniowo zmiennej oraz stałej grubości.

6. W przykładzie 9.1 wykonano analizę probabilistyczną płyty wspornikowej wyposażonej w trzy lepkosprężyste tłumiki drgań. Wyznaczono wartości znormalizowanego gradientu wrażliwości dla wybranych parametrów projektowych mają-

Tabela 11.2. Krotność wzrostu pierwszego obciążenia krytycznego ze względu na zmianę grubości płyt, analizowanych w przykładach 10.1–10.4, ze stałej na liniowo zmienną

| Rodzaj obciążenia             | Przykład z rozdz. 10 | $N_{cr,1}/N_{cr,2}$ dla ilorazów $H_1/H_2$ : |           |           |
|-------------------------------|----------------------|----------------------------------------------|-----------|-----------|
|                               |                      | 1,5                                          | 2         | 2,5       |
| normalne 1-kierunkowe         | 10.1                 | 1,8                                          | 2,5       | 3,0       |
| normalne 2-kierunkowe         | 10.2                 | 1,64–1,84                                    | 2,6–3,7   | 3,13–4,53 |
| styczne do krawędzi płyty     | 10.3                 | 1,71–1,84                                    | 2,39–2,84 | 3,08–3,94 |
| liniowo zmiennie (rys. 10.7a) | 10.4                 | 1,49–1,73                                    | 1,91–2,39 | 2,29–2,94 |
| liniowo zmiennie (rys. 10.7b) | 10.4                 | 1,39–1,47                                    | 1,68–1,87 | 1,95–2,23 |

cych wpływ na wartości częstości drgań własnych układu płyta–tłumiki. Na podstawie przeprowadzonych badań sformułowano wniosek, że szczególnie wrażliwe na zjawiska losowe są geometryczne parametry projektowe, tzn. grubość płyty oraz długość jej boku. Największa ujemna wartość gradientu, wynosząca  $-1,908$ , została wyznaczona dla długości boku płyty. Z kolei w przypadku grubości płyty otrzymano największą dodatnią wartość gradientu równą  $1,136$ .

Na podstawie przedstawionej powyżej analizy wyników badań można uznać, że odpowiedź na postawione pytania badawcze została udzielona, a problem badawczy rozwiązany.

W kolejnych, niżej opisanych punktach dokonano oceny poprawności hipotez 1–4 zestawionych w rozdziale 2. Sformułowano w tej kwestii następujące wnioski:

1. W większości przypadków pojedynczych płyt zanurzonych w płynie zastosowanie kombinacji metod numerycznych MRS–MEB pozwoliło otrzymać dokładniejsze wartości pierwszej częstości drgań własnych w porównaniu z użyciem połączenia metod MES–MEB. Jako kryterium porównawcze, umożliwiające dokonanie oceny dokładności, przyjęto rozwiązania analityczne lub otrzymane zgodnie z metodologią MEB, zawarte w dostępnej literaturze.

Analizując pozostałe częstości drgań, jak również układy płyt zanurzonych w płynie, można stwierdzić, że efektywność zastosowanych metod numerycznych zależy od czynników, takich jak schemat podparcia płyty, głębokość jej zanurzenia w cieczy czy sposób ułożenia względem siebie płyt stanowiących układ.

2. Na podstawie analizy przeprowadzonej w przykładzie 7.1 można stwierdzić, że spełnione zostało kryterium poprawności postawionej hipotezy 2, tzn. dla temperatur bliskich temperaturze referencyjnej otrzymano pierwszą częstość drgań własnych układu płyta–tłumiki różniącą się o około 10% od odpowiedniej war-

tości dla płyty bez tłumików. Ustalone kryterium nie zostało jednak spełnione w przypadku płyty analizowanej w przykładzie 8.1, gdzie przy optymalnym rozmieszczeniu czterech tłumików otrzymano w temperaturze referencyjnej wzrost pierwszej częstości drgań własnych układu o około 7,5% w porównaniu z płytą bez tłumików.

3. Badania przeprowadzone w przykładach 8.1–8.2 pozwalają dowieść słuszności hipotezy 3, ponieważ w wyniku zastosowania metody optymalizacyjnej roju cząstek wraz z kryterium maksymalizacji bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań otrzymano optymalne rozmieszczenie ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni badanych płyt.
4. Na podstawie obliczeń wykonanych w przykładzie 9.1 dowiedziono poprawności hipotezy 4, tzn. wykazano, że odpowiedź dynamiczna badanej płyty jest najbardziej wrażliwa na geometryczne parametry projektowe. Dla tych parametrów uzyskano wartości znormalizowanego gradientu wrażliwości spełniające założone kryterium poprawności hipotezy.

Podsumowując powyższe spostrzeżenia, można stwierdzić, że na podstawie badań przeprowadzonych w dysertacji wykazano słuszność hipotez 3 i 4. Ponadto nieznaczne osłabienie sformułowanego kryterium poprawności hipotezy 2 pozwoliłoby wyciągnąć pozytywny wniosek również o jej słuszności. Z kolei hipoteza 1 została spełniona dla części spośród rozważanych w pracy przypadków.

Ostatecznie uznano, że osiągnięto zamierzony cel rozprawy, ponieważ zawarte w niej analizy umożliwiły przedstawienie rozwiązania problemu badawczego oraz przeprowadzenie dyskusji odnośnie spełnienia kryteriów świadczących o poprawności postawionych hipotez.

## 11.2. Wnioski metodyczne

W niniejszym podrozdziale przedstawiono wnioski stanowiące ocenę poprawności zastosowanej w dysertacji metodyki badawczej. Użyte w pracy metody numeryczne można podzielić na cztery grupy, które stosowano w analizie konkretnego zadania badawczego. Zestawiono je poniżej wraz z najważniejszymi wnioskami wynikającymi z przeprowadzonych badań oraz oceną wiarygodności uzyskanych wyników.

1. metoda elementów skończonych (MES), metoda różnic skończonych (MRS), metoda elementów brzegowych w połączeniu z metodą elementów skończonych

- (MES–MEB) lub metoda elementów brzegowych w połączeniu z metodą różnic skończonych (MRS–MEB)
- a) Metody użyto w analizie statycznej (MES, MRS) oraz dynamicznej płyt umieszczonych w próżni (MES, MRS) lub zanurzonych całkowicie bądź częściowo w płynie (MES–MEB, MRS–MEB), a także w analizie ich stateczności (MRS).
  - b) Jako kryterium poprawności użytych metod przyjęto nie większą niż 1% różnicę między uzyskanymi wynikami a wartościami zawartymi w literaturze, otrzymanymi analitycznie lub zgodnie z metodologią MEB.
  - c) Zastosowanie wymienionych metod numerycznych lub ich odpowiednio dobranej kombinacji (MES, MRS, MES–MEB, MRS–MEB) pozwoliło otrzymać poprawne wartości szukanych przemieszczeń punktów płyty, charakterystyk dynamicznych lub obciążeń krytycznych przy użyciu siatki MES lub MRS o właściwie dobranej gęstości.
  - d) Porównanie wyników przeprowadzonych analiz z wartościami pochodzącymi z literatury było możliwe wyłącznie dla płyt o stałej grubości, przy typowych przypadkach podparcia i obciążenia.
  - e) Spełnienie przyjętego kryterium poprawności dla standardowych schematów płyt pozwoliło uogólnić prowadzone badania na bardziej złożone zagadnienia (płyty o zmiennej grubości, charakteryzujące się nietypowymi warunkami podparcia) oraz stwierdzić o wiarygodności uzyskanych wyników.
2. metoda elementów skończonych w połączeniu z metodą podprzestrzennych iteracji oraz metodą kontynuacji
- a) Metody zastosowano, wykonując analizę dynamiczną płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań oraz rozwiązując nieliniowe problemy własne.
  - b) Wyniki uzyskane przy pomocy metody elementów skończonych oraz metody kontynuacji uznano za poprawne, ponieważ przebieg wykresu zależności pierwszej częstości drgań własnych (lub bezwymiarowego współczynnika tłumienia pierwszej postaci drgań) układu płyta–tłumiki od temperatury otoczenia płyty okazał się zbliżony do charakteru wykresu otrzymanego w pracy [31], sporządzonego dla ram wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań.
  - c) Zastosowane dwa sposoby rozwiązywania nieliniowych problemów własnych<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> Pierwszy sposób polegał na użyciu wyłącznie metody kontynuacji w celu rozwiązania pełnego problemu własnego. W sposobie drugim użyto metodę podprzestrzennych iteracji jako narzędzie pomocnicze służące zredukowaniu wymiaru pierwotnego zadania, które następnie rozwiązywano, stosując metodę kontynuacji.

można przyjąć jako poprawne w analizowanych zagadnieniach, ponieważ otrzymano identyczne wyniki przy użyciu każdego z nich. Korzystniejsze okazało się jednak dołączenie metody podprzestrzennych iteracji do obliczeń numerycznych z uwagi na mniejszy nakład obliczeniowy potrzebny do rozwiązania zredukowanego problemu własnego.

- d) O wiarygodności uzyskanych wyników świadczy fakt wzrostu otrzymywanych wartości częstości drgań własnych w miarę wyposażania badanej płyty w kolejne tłumiki lepkosprężyste. Jest to spowodowane zwiększeniem sztywności układu płyta–tłumiki ze względu na występowanie elementów sprężystych w tłumikach.
  - e) Uzyskane wyniki można uogólnić na dowolną liczbę tłumików lepkosprężystych zamocowanych do płyty, posiadających dowolnie przyjęte wartości parametrów.
3. metoda optymalizacji rojem cząstek (PSO) w połączeniu z metodą elementów skończonych oraz metodą kontynuacji
- a) Metody umożliwiły rozwiązanie zadania optymalnego rozmieszczenia ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty w celu uzyskania maksymalnego efektu tłumienia jej wybranej postaci drgań.
  - b) Stwierdza się, że zastosowana metodyka jest poprawna, a uzyskane wyniki wiarygodne, ponieważ w analizowanych zagadnieniach otrzymano optymalne położenie jednego, jak również czterech tłumików na powierzchniach płyt, odpowiednio wspornikowej oraz charakteryzującej się mieszanym sposobem podparcia. Optymalna lokalizacja tłumików została skoncentrowana w przewidywanym obszarze występowania ekstremalnych przemieszczeń na wykresach rozważanej postaci drgań własnych badanych płyt.
  - c) Efektywność metody optymalizacyjnej PSO zależy od doboru wartości jej parametrów charakterystycznych (współczynniki uczenia, waga inercji), a także rodzaju przyjętej funkcji celu.
  - d) Uzyskane wyniki można uogólnić na zadania optymalizacyjne dla przypadków większej ustalonej liczby tłumików zamocowanych do płyt podpartych w nietypowy sposób.
4. metody obliczania charakterystyk probabilistycznych zmiennej losowej: metoda półanalityczna (SAM), uogólniona metoda perturbacji stochastycznej (SPT), metoda symulacyjna Monte-Carlo (MCS), w połączeniu z metodami wymienionymi w p. 1 i 2
- a) Metody zastosowano w analizie dynamicznej płyt bądź ich układów zanurzo-

- nych w cieczy lub wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań, w ujęciu losowym.
- b) Zastosowanie kombinacji metod MES–MEB oraz MRS–MEB przy wyznaczaniu charakterystyk probabilistycznych, w analizie dynamicznej układu dwóch płyt zanurzonych w płynie, pozwoliło otrzymać bardzo podobne wyniki końcowe. Większą różnicę zaobserwowano jedynie na wykresach kurtozy, sporządzonych dla zmiennej losowo gęstości płynu. Można zatem obie kombinacje metod MES–MEB oraz MRS–MEB uznać za poprawne w kontekście wyznaczania momentów losowych.
- c) Przy zastosowaniu każdej z trzech alternatywnych metod probabilistycznych (SAM, MCS, SPT) otrzymano w przeprowadzonych analizach zbliżone do siebie wartości momentów losowych, obliczanych dla wybranych częstości drgań własnych płyt. Nieco większe odstępstwo wyników, w porównaniu z metodami SAM oraz SPT, zaobserwowano w przypadku metody MCS, co jest efektem jej symulacyjnego charakteru. Obliczenia przeprowadzone przy użyciu metody SAM można przyjąć jako dokładne w kontekście probabilistycznym, a zatem zgodność wyników uzyskanych trzema metodami (SAM, SPT, MCS) stanowi potwierdzenie ich poprawności.

### 11.3. Wnioski aplikacyjne

Zawarte w niniejszej dysertacji wyniki badań otrzymano przy użyciu następujących autorskich procedur obliczeniowych opracowanych w środowisku numerycznym Octave:

1. algorytm całkowania numerycznego mający na celu utworzenie macierzy sztywności czterowęzłowego elementu skończonego typu plQ4 [1], użytego do opisu deformacji płyty cienkiej,
2. algorytm tworzenia macierzy operatorów różnicowych umożliwiający przeprowadzenie analizy statycznej, dynamicznej lub stateczności płyt cienkich o stałej lub zmiennej grubości, zgodnie z metodologią MRS,
3. algorytm budowy macierzy bezwładności płyty oraz płynu zastosowany w celu przeprowadzenia analizy dynamicznej płyt zanurzonych całkowicie lub częściowo w płynie w ujęciu połączonych metod elementów skończonych i brzegowych (MES–MEB) lub metod różnic skończonych i elementów brzegowych (MRS–MEB),

4. rozszerzenie algorytmów z p. 3 na przypadek analizy dynamicznej układów dwóch płyt zanurzonych całkowicie w płynie,
5. algorytm numerycznego rozwiązywania nieliniowego problemu własnego, zgodnie z zasadami metody kontynuacji, pozwalający przeprowadzić analizę dynamiczną płyty spoczywającej na skończonej liczbie podpór lepkosprężystych, opisanych przy pomocy modelu klasycznego lub ułamkowego,
6. algorytm wyznaczania optymalnego rozmieszczenia ustalonej liczby tłumików lepkosprężystych na powierzchni płyty przy użyciu metody roju cząstek (PSO) wraz z kryterium maksymalizacji efektu tłumienia wybranej postaci drgań.

Ponadto w pracy zawarto wyniki analizy dynamicznej płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań w ujęciu losowym, opracowane na podstawie przygotowanego w środowisku Maple autorskiego algorytmu umożliwiającego wyznaczanie charakterystyk probabilistycznych przy użyciu metody półanalitycznej. W algorytmie zawarto również procedurę obliczania znormalizowanego gradientu wrażliwości dla parametrów projektowych, opracowaną w celu oceny wpływu ich losowości na odpowiedź dynamiczną badanego układu.

Przedstawione wyżej procedury obliczeniowe, opracowane na potrzeby przeprowadzenia zawartych w pracy analiz, charakteryzują się względną prostotą i mają charakter aplikacyjny. Mogą zostać wykorzystane w praktyce inżynierskiej w celu utworzenia oprogramowania przydatnego przy projektowaniu płytowych elementów konstrukcyjnych. Algorytmy można rozbudować tak, aby stanowiły pomocne narzędzie przy projektowaniu układów, takich jak np. płyty fundamentowe, powierzchnie sterowe statków lub elementy maszyn.

Zamieszczone w pracy procedury służące przeprowadzeniu analizy dynamicznej płyt wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań można praktycznie wykorzystać w celu utworzenia modelu podłoża lepkosprężystego oraz wyznaczenia charakterystyk dynamicznych płyty na takim podłożu. Układ płyta–podłoże lepkosprężyste stanowi model np. płyty fundamentowej na podłożu gruntowym.

W dysertacji w sposób inżynierski uproszczono złożone zagadnienia z hydrosprężystości, co umożliwia wykorzystanie ich w praktyce projektowej. Zaprezentowane analizy dynamiczne płyt o zmiennej grubości, zanurzonych w płynie, można zastosować w procesie projektowania powierzchni sterowych statków.

## 11.4. Wnioski prognostyczne

Na podstawie przeprowadzonych analiz sugeruje się następujące kierunki dalszych badań, pozwalających wyjaśnić kolejne problemy związane z tematyką niniejszej rozprawy:

1. analiza statyczna, dynamiczna i stateczności płyt przeprowadzona przy użyciu MES:
  - rozszerzenie analiz na przypadek płyt o nietypowych kształtach,
  - zastosowanie np. trójkątnych elementów skończonych w celu dyskretyzacji powierzchni środkowej płyty,
  - rozbudowanie zadania na sytuację, gdy płyta wykazuje uszkodzenia powierzchniowe w postaci zarysowań,
2. analiza statyczna, dynamiczna i stateczności płyt przeprowadzona przy użyciu MRS:
  - uwzględnienie przypadku płyt o grubości zmieniającej się w sposób nieliniowy,
3. zadanie dynamiki płyt spoczywających na podporach lepkosprężystych:
  - rozbudowanie zadania w celu przeprowadzenia analizy płyt fundamentowych o dowolnym kształcie, spoczywających na podłożu lepkosprężystym,
  - dostosowanie procedur obliczeniowych do przypadku tłumików zamocowanych w dwóch punktach do powierzchni płyty i nie łączących jej z podłożem,
  - zastąpienie tłumików lepkosprężystych mocowanych do płyty warstwami lepkosprężystymi zlokalizowanymi w obrębie jej grubości,
4. analiza dynamiczna pojedynczych płyt lub układów dwóch płyt zanurzonych w płynie:
  - rozszerzenie zadania na przypadek układów dowolnej liczby płyt,
  - uwzględnienie interakcji płyt z płynem ściśliwym.
5. zadanie wyznaczenia optymalnej lokalizacji tłumików na powierzchni płyty przy użyciu metody PSO:
  - przyjęcie innej funkcji celu niż zastosowana w dysertacji,
6. badania niezawodności elementów konstrukcyjnych wyposażonych w lepkosprężyste tłumiki drgań opisane za pomocą modelu ułamkowego:
  - kontynuowanie badań związanych z zastosowaniem miary bezpieczeństwa obliczanej przy użyciu entropii względnej i teorii Bhattacharyya.



# Bibliografia

- [1] M. Kuczma, *Podstawy mechaniki konstrukcji prętowych z pamięcią kształtu*, Oficyna Wydawnicza Uniwersytetu Zielonogórskiego, Zielona Góra, (2010).
- [2] K. Girkman, *Plane Girders*, Arkady, Warszawa, (1957).
- [3] S. Timoshenko, S. Woinowsky-Krieger, *Teoria płyt i powłok*, Arkady, Warszawa, (1962).
- [4] R. D. Cook, D. S. Malkus, M. E. Plesha, R. J. Witt, *Concepts and Applications of Finite Element Analysis*, 4th Edition, John Wiley & Sons, (1989).
- [5] O. Zienkiewicz, R. Taylor, J. Zhu, *The Finite element Method: Its Basis and Fundamentals*, Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, (2013).
- [6] K. J. Bathe, *Finite element procedures*, New Jersey, Prentice Hall, (1996).
- [7] G. Rakowski, Z. Kasprzyk, *Metoda elementów skończonych w mechanice konstrukcji*, Oficyna Wydawnicza Politechniki Warszawskiej, Warszawa, (2016).
- [8] J. Pietrzak, G. Rakowski, K. Wrześniowski, *Macierzowa analiza konstrukcji*, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa-Poznań, (1979).
- [9] M. Guminiak, *Metoda elementów brzegowych w analizie płyt*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, (2016).
- [10] Z. Pawlak, M. Guminiak, *The application of fundamental solutions in static analysis of thin plates resting on the internal elastic support*, Foundations of Civil and Environmental Engineering, 11 (2008) 67–96.
- [11] W. Nowacki, *Dynamika konstrukcji*, Arkady, (1961).
- [12] M. S. Nerantzaki, J. T. Katsikadelis, *An Analog Equation Solution to dynamic analysis of plates with variable thickness*, Engng. Analysis Bound. Elem., 17, 2 (1996) 145–152.
- [13] J. T. Katsikadelis, *ΣΥΝΟΠΙΑΚΑ ΣΤΟΙΧΕΙΑ, Τόμος II: Ανάλυση Πλακών, 2<sup>η</sup> Έκδοση*, ΕΜΠ, (2010).
- [14] J. T. Katsikadelis, *The Boundary Element Method for Plate Analysis*, National Technical University of Athens, Athens, Greece, (2014).
- [15] W. P. Jones, J. A. Moore, *Simplified aerodynamic theory of oscillating thin surfaces in subsonic flow*, J. Am. Inst. Aeronaut. Assoc., 11, 9 (1973) 1305–1307.
- [16] M. K. Kwak, *Hydroelastic vibration of rectangular plate*, ASME Journal of Applied Mechanics, 63 (1996) 110–111.
- [17] R. Sygulski, *Drgania własne siatek cięgnowych z uwzględnieniem masy otaczającego powietrza*, Arch. Civil Engng., XXIX, 4, (1983).
- [18] R. Sygulski, *Vibration of Simply Supported Plates in Contact with Liquid by Using Membrane Curvilinear Elements*, Vibrations in Physical Systems, 31, 3 (2020) 2020323-1–2020323-8.

- 
- [19] R. Sygulski, *Dynamic analysis of open membrane structures interacting with air*, Int. J. Numer. Methods Eng., 37 (1994) 1807–1823.
- [20] Y. Fu, W. G. Price, *Interactions between a partially or totally immersed vibrating cantilever plate and the surrounding liquid*, Journal of Sound and Vibration, 118, 3 (1987) 495–513.
- [21] C-C. Liang, C-C. Liao, Y-S. Tai, W-H. Lai, *The free vibration analysis of submerged cantilever plates*, Ocean Engineering, 28 (2001) 1225–1245.
- [22] J. S. Lee, S. W. Lee, *Fluid-structure interaction analysis on a flexible plate normal to a free stream at low Reynolds number*, J. Fluids Struct., 29 (2012) 18–34.
- [23] J. Rakowski, M. Guminiak, *Non-linear vibration of Timoshenko beams by Finite Element Method*, J. Theoret. and Appl. Mech., 53, 3 (2015) 731–743.
- [24] M. Guminiak, R. Sygulski, *Vibration of Plates Partially and Totally Immersed in Fluid by the Boundary Element Method*, AIP Conference Proceedings, 2239 (2020) 02007-1–02007-10.
- [25] A. Lenartowicz, M. Guminiak, *Free Vibrations of Iso- and Orthotropic Plates Considering Plate Variable Thickness and Interaction with Water*, Vibrations in Physical Systems, 31, 2 (2020) 2020216-1–2020216-8.
- [26] A. Lenartowicz, M. Guminiak, *Free vibrations of Kirchhoff plates considering plate variable thickness and interaction with water including water boundaries*, Vibrations in Physical Systems, 32, 1 (2021) 2021208-1–2021208-7.
- [27] J. P. Wolf, C. Song, *Finite-Element Modeling of Unbounded Media*, Eleventh World Conference on Earthquake Engineering, Paper No. 70, Elsevier Science Ltd.: Amsterdam, The Netherlands, (1996).
- [28] J. P. Wolf, *The Scaled Boundary Finite Element Method*, John Wiley & Sons Ltd., Chichester, UK, (2003).
- [29] M. R. Motley, M. R. Kramer, Y. L. Young, *Free surface and solid boundary effects on the free vibration of cantilevered composite plates*, Compos. Struct., 96 (2013) 365–375.
- [30] Lewandowski R., *Dynamika konstrukcji budowlanych*, T. 2, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, (2018).
- [31] R. Lewandowski, M. Przychodzki, *Wpływ temperatury na właściwości dynamiczne ram z lepkosprężystymi tłumikami drgań*, Czasopismo Inżynierii Lądowej, Środowiska i Architektury - Journal of Civil Engineering, Environment and Architecture, T. 33, z. 63, nr 1/I (2016) 431–438.
- [32] K. Kasai, A. Sato, *A constitutive rule for viscoelastic material considering heat conduction and heat transfer*, The Second International Conference on Urban Earthquake Engineering (2005) 459–466.
- [33] A. Lenartowicz, M. Przychodzki, *Influence of temperature on dynamic properties*

- of plates with viscoelastic dampers*, Vibrations in Physical Systems, 31, 3 (2020) 2020310-1–2020310-8.
- [34] J. Garcia-Barruetabeña, F. Cortés, J. M. Abete, P. Fernández, M. J. Lamela, A. Fernández-Canteli, *Experimental characterization and modelization of the relaxation and complex moduli of a flexible adhesive*, Materials and Design, 32 (2011) 2783–2796.
- [35] R. Lewandowski, *Influence of temperature on dynamic properties of structures with viscoelastic dampers*, Journal of Structural Engineering, 145, 2 (2019).
- [36] R. Lewandowski, *Non-Linear Free Vibrations of Beams by the Finite Element and Continuation Methods*, Journal of Sound and Vibration, 170 (1994) 577–593.
- [37] R. Lewandowski, Z. Pawlak, *Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers modeled by rheological models with fractional derivatives*, Journal of Sound and Vibration, 330 (2011) 923–936.
- [38] R. Lewandowski, A. Bartkowiak, H. Maciejewski, *Dynamic analysis of frames with viscoelastic dampers: A comparison of damper models*, Struct. Eng. Mech., 41 (2012), 113–137.
- [39] Z. Pawlak, R. Lewandowski, *The continuation method for the eigenvalue problem of structures with viscoelastic dampers*, Computers and Structures, 125 (2013) 53–61.
- [40] R. Lewandowski, M. Baum, *Dynamic characteristics of multilayered beams with viscoelastic layers described by the fractional Zener model*, Arch. Appl. Mech., 85 (2015) 1793–1814.
- [41] M. Łasecka-Plura, R. Lewandowski, *The subspace iteration method for nonlinear eigenvalue problems occurring in the dynamics of structures with viscoelastic elements*, Computers and Structures, 254 (2021) 106571-1–106571-14.
- [42] R. M. Christensen, *Theory of Viscoelasticity*, 2nd ed., Academic Press, Cambridge, MA, USA, (1982).
- [43] S. Park, *Analytical modeling of viscoelastic dampers for structural and vibration control*, International Journal of Solids and Structures, 38 (2001) 8065–8092.
- [44] L.-Y. Lu, G.-L. Lin, M.-H. Shih, *An experimental study on a generalized Maxwell model for nonlinear viscoelastic dampers used in seismic isolation*, Eng. Struct., 34 (2012) 111–123.
- [45] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Press, (1999).
- [46] T.-S. Chang, M. P. Singh, *Seismic analysis of structures with a fractional derivative model of viscoelastic dampers*, Earthq. Eng. Eng. Vib., 1 (2002) 251–260.
- [47] Y. Kun, L. Li, T. Jiaxiang, *Stochastic seismic response of structures with added viscoelastic dampers modeled by fractional derivative*, Earthq. Eng. Eng. Vib., 1 (2003) 133–139.
- [48] Y. Luo, P. D. Spanos, J. Chen, *Stochastic response determination of multi-dimensional*

- nonlinear systems endowed with fractional derivative elements by the GE-GDEE*, Int. J. Non Lin. Mech., 147 (2022) 104247.
- [49] F. Shubin, Z. Zhidong, *Application of the generalized multiscale finite element method in an inverse random source problem*, J. Comput. Phys., 429 (2021) 110032.
- [50] W. Sumelka, B. Łuczak, T. Gajewski, G. Voyiadjis, *Modeling of AAA in the framework of time-fractional damage hyperelasticity*, Int. J. Solids Struct., 206 (2020) 30–42.
- [51] Y. Zhou, Y. Zhang, *Noether symmetries for fractional generalized Birkhoffian systems in terms of classical and combined Caputo derivatives*, Acta Mech., 231 (2020) 3017–3029.
- [52] W. Sumelka, G. Z. Voyiadjis, *A hyper-elastic fractional damage material model with memory*, Int. J. Solids Struct., 124 (2017) 151–160.
- [53] H. Movaffaghi, O. Friberg, *Optimal placement of dampers in structures using genetic algorithm*, Eng. Comput., 23 (2006) 597–606.
- [54] A. Bogdanovic, Z. T. Rakicevic, D. Filipovski, *Comparison between two optimization procedures for damper location in steel frame structures*, Proceedings of the Second European Conference on Earthquake Engineering and Seismology, Istanbul, Turkey, August 25–29 (2014).
- [55] H. Wang, A. Li, C. Jiao, B. F. Spencer, *Damper placement for seismic control of super-long-span suspension bridges based on the first-order optimization method*, Sci. China Ser. E. Technol. Sci., 53 (2010) 2008–2014.
- [56] M. P. Singh, L. M. Moreschi, *Optimal placement of dampers for passive response control*, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 31 (2002) 955–976.
- [57] O. Lavan, R. Levy, *Optimal design of supplemental viscous dampers for linear framed structures*, Earthq. Eng. Struct. Dyn., 35 (2006) 337–356.
- [58] A. Bogdanovic, Z. Rakicevic, *Optimal Damper Placement Using Combined Fitness Function*, Front. Built Environ., 5, 4 (2019).
- [59] A. S. Kokil, M. Shrikhande, *Optimal Placement of Supplemental Dampers in Seismic Design of Structures*, JSEE Fall, 9 (2007) 125–135.
- [60] K. Fujita, A. Moustafa, I. Takewaki, *Optimal placement of viscoelastic dampers and supporting members under variable critical excitations*, Earthq. Struct., 1 (2010) 43–67.
- [61] M. Gürgöze, P. Müller, *Optimal positioning of dampers in multi-body systems*, J. Sound Vib., 158 (1992) 517–530.
- [62] R. Sulaksitaningrum, B. S. Umniati, I. P. E. Sarassantica, C. B. Casita, M. M. A. Pratama, E. Santoso, M. Sulton, *The optimal damper placement configuration for three-dimensional RC building*, IOP Conf. Ser. Mater. Sci. Eng., 669 (2019) 012056.
- [63] H. E. Estekanchi, M. C. Basim, *Optimal damper placement in steel frames by the Endurance Time method*, Struct. Des. Tall Spéc. Build., 20 (2011) 612–630.
- [64] J. Kennedy, R. Eberhart, *Particle swarm optimization*, Proceedings of the ICNN'95

- 
- International Conference on Neural Networks, Perth, Australia, November 27–December 1 (1995) Vol. 4, 1942–1948.
  - [65] R.E. Perez, K. Behdinan, *Particle swarm approach for structural design optimization*, Computers and Structures, 85 (2007) 1579–1588.
  - [66] A. Engelbrecht, *Particle swarm optimization: Velocity initialization*, Proceedings of the 2012 IEEE Congress on Evolutionary Computation, Brisbane, QLD, Australia, June 10–15 (2012) Vol. 10, 1–8.
  - [67] K. R. Harrison, B. M. Ombuki-Berman, A. P. Engelbrecht, *Optimal parameter regions for particle swarm optimization algorithms*, Proceedings of the 2017 IEEE Congress on Evolutionary Computation (CEC), Donostia, Spain, June 5–8 (2017) Vol. 5, 349–356.
  - [68] K. R. Harrison, A. P. Engelbrecht, B. M. Ombuki-Berman, *Optimal parameter regions and the time-dependence of control parameter values for the particle swarm optimization algorithm*, Swarm. Evol. Comput., 41 (2018) 20–35.
  - [69] L. Shao, Y. Bai, Y. Qiu, Z. Du, *Particle Swarm Optimization Algorithm Based on Semantic Relations and Its Engineering Applications*, Syst. Eng. Procedia, 5 (2012) 222–227.
  - [70] H. Wang, H. Sun, C. Li, S. Rahnamayan, J.-S. Pan, *Diversity enhanced particle swarm optimization with neighborhood search*, Inf. Sci., 223 (2013) 119–135.
  - [71] M. Imran, R. Hashim, N. E. A. Khalid, *An Overview of Particle Swarm Optimization Variants*, Procedia Eng., 53 (2013) 491–496.
  - [72] C. W. Cleghorn, A. P. Engelbrecht, *A generalized theoretical deterministic particle swarm model*, Swarm Intell., 8 (2014) 35–59.
  - [73] W.-B. Du, Y. Gao, C. Liu, Z. Zheng, Z. Wang, *Adequate is better: Particle swarm optimization with limited-information*, Appl. Math. Comput., 268 (2015) 832–838.
  - [74] K. R. Harrison, A. P. Engelbrecht, B. M. Ombuki-Berman, *Self-adaptive particle swarm optimization: A review and analysis of convergence*, Swarm Intell., 12 (2017) 187–226.
  - [75] D. Freitas, L. G. Lopes, F. Morgado-Dias, *Particle Swarm Optimization: A Historical Review Up to the Current Developments*, Entropy, 22 (2020) 362.
  - [76] A. Lenartowicz, M. Przychodzki, M. Guminiak, T. Garbowski, *Optimal Placement of Viscoelastic Vibration Dampers for Kirchhoff Plates Based on PSO Method*, Materials, 14, 21 (2021) 6616-1–6616-16.
  - [77] M. Kamiński, *The Stochastic Perturbation Method for Computational Mechanics*, Wiley, Chichester (2013).
  - [78] M. Kamiński, *On iterative scheme in determination of the probabilistic moments of the structural response in the stochastic perturbation-based Finite Element Method*, Int. J. Numer. Methods Eng., 104 (2015) 1038–1060.

- [79] J. D. Arregui-Mena, L. Margetts, P. M. Mummery, *Practical Application of the Stochastic Finite Element Method*, Arch. Computat. Method. Eng., 23 (2014) 171–190.
- [80] J.-G. Han, W.-X. Ren, Y. Huang, *A wavelet-based stochastic finite element method of thin plate bending*, Appl. Math. Model., 31 (2007) 181–193.
- [81] S. Chandra, K. Sepahvand, V. A. Matsagar, S. Marburg, *Stochastic dynamic analysis of composite plate with random temperature increment*, Compos. Struct., 226 (2019) 111159.
- [82] C.-K. Hoi, H.-C. Noh, *Stochastic finite element analysis of plate structures by weighted integral method*, Struct. Eng. Mech., 4 (1996) 703–715.
- [83] M. Mestrovic, *Stochastic Finite Element Analysis of Plates, Theories of Plates and Shells Critical Review and New Application*, Proceedings of the Euromech Colloquium 444, Bremen, Germany, September 22–25 (2002).
- [84] L. Zhu, B. Yan, Y. Wang, Y. Dun, J. Ma, C. Li, *Inspection of blade profile and machining deviation analysis based on sample points optimization and NURBS knot insertion*, Thin-Walled Struct., 162 (2021) 107540.
- [85] R. W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of structures*, Computers & Structures, Inc.: Berkeley, CA, USA, (1995).
- [86] M. Kamiński, A. Lenartowicz, M. Guminiak, M. Przychodzki, *Selected Problems of Random Free Vibrations of Rectangular Thin Plates with Viscoelastic Dampers*, Materials, 15, 19 (2022) 6811-1–6811-15.
- [87] M. Kamiński, *On Shannon entropy computations in selected plasticity problems*, Int. J. Numer. Methods Eng., 122 (2021) 5128–5143.
- [88] R. Bredow, M. Kamiński, *Structural safety of the steel hall under dynamic excitation using the relative probabilistic entropy concept*, Materials, 15 (2022) 3587.
- [89] M. Kamiński, M. Guminiak, A. Lenartowicz, M. Łasecka-Plura, M. Przychodzki, W. Sumelka, *Stochastic nonlinear eigenvibrations of thin elastic plates resting on time-fractional viscoelastic supports*, Probabilistic Engineering Mechanics, 74 (2023) 103522-1–103522-4.
- [90] S. Cheng, X. Jia, *Reliability analysis of Reissner plate bending problems by stochastic spline fictitious boundary element method*, Eng. Anal. Bound. Elem., 51 (2015) 37–43.
- [91] M. Guminiak, M. Kamiński, *On semi-analytical Stochastic Boundary Element Method and its application to eigenproblem of thin elastic plate immersed into a fluid*, Eng. Anal. Bound. Elem., 134 (2022) 219–230.
- [92] M. S. Chowdhury, C. M. Song, W. Gao, *Probabilistic fracture mechanics by using Monte Carlo simulation and the scaled boundary finite element method*, Eng. Fract. Mech., 78 (2011) 2369–2389.
- [93] A. Bhattacharyya, *On a measure of divergence between two multinomial populations*, Indian J. Stat., 7 (1946) 401–406.

- 
- [94] Y. Xiang, Y. Liu, *Application of inverse first-order reliability method for probabilistic fatigue life prediction*, Probabilist. Eng. Mech., 26, 2 (2011) 148–156.
- [95] M. Kamiński, M. Guminiak, A. Lenartowicz, M. Łasecka-Plura, M. Przychodzki, W. Sumelka, *Eigenvibrations of Kirchhoff Rectangular Random Plates on Time-Fractional Viscoelastic Supports via the Stochastic Finite Element Method*, Materials, 16, 24 (2023) 7527-1–7527-32.
- [96] M. Guminiak, M. Kamiński, A. Lenartowicz, M. Przychodzki, *Stochastic Vibrations of a System of Plates Immersed in Fluid Using a Coupled Boundary Element, Finite Element, and Finite Difference Methods Approach*, Materials, 16, 9 (2023) 3583-1–3583-30.
- [97] S. P. Timoshenko, J. M. Gere, *Theory of elastic stability*, McGraww-Hill Book, (1961).
- [98] M. S. Nerantzaki, J. T. Katsikadelis, *Buckling of plates with variable thickness – An analog equation solution*, Engineering Analysis with Boundary Elements, 18, 2 (1996) 149–154.
- [99] B. Chinnaboorn, S. Chucheepsakul, J. T. Katsikadelis, *A BEM-based meshless method for buckling analysis of elastic plates with various boundary conditions*, International Journal of Structural Stability and Dynamics, 7, 1 (2007) 81–89.
- [100] N. G. Babouskos, J. T. Katsikadelis, *Flutter instability of damped plates under combined conservative and nonconservative loads*, Archive of Applied Mechanics, 79 (2009) 541–556.
- [101] J. T. Katsikadelis, N. G. Babouskos, *Nonlinear flutter instability of thin damped plates: A solution by the analog equation method*, Journal of Mechanics of Materials and Structures, 4, 7–8 (2009) 1395–1414.
- [102] M. Guminiak, T. Jankowiak, *The analysis of internally supported thin plates by the Boundary Element Method. Part 3 – Initial stability analysis*, Foundations of Civil and Environmental Engineering, 10 (2007) 51–67.
- [103] M. Guminiak, *Initial stability analysis of plates considering continuous internal supports by BEM*, Scientific Research of the Institute of Mathematic and Computer Science, 1, 8 (2009) 47–62.
- [104] M. Guminiak, *An alternative approach of initial stability analysis of Kirchhoff plates by the Boundary Element Method*, Engineering Transactions, 62, 1 (2014) 33–59.
- [105] R. Sygulski, M. Guminiak, Ł. Polus, *The Stability of a Steel Welded Girder with Bending and Shear Forces Included*, Acta Mechanica et Automatica, 11, 1 (2017) 14–19.
- [106] A. Lenartowicz, M. Guminiak, M. Przychodzki, *Initial stability analysis of thin plates in terms of the Finite Difference Method*, 24th International Conference on Computer Methods in Mechanics, 42nd Solid Mechanics Conference, Świnoujście, September 5–8 (2022).
- [107] J. Rakowski, M. Guminiak, *Teoria sprężystości i plastyczności. Reologia*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, wydanie I, Poznań, (2018).

- [108] M. Samborski, M. Słowik, *Belka czy płyta? Klasyfikacja elementów konstrukcyjnych w świetle teorii wytrzymałości materiałów i literatury inżynierskiej*, Budownictwo i Architektura, 16, 3 (2017) 103–112.
- [109] J. Ma, Y. Ren, *Free vibration and chatter stability of a rotating thin-walled composite bar*, Advances in Mech. Engng., 10, 9 (2018) 1–10.
- [110] J. Osiowski, *Zarys rachunku operatorowego. Teoria i zastosowania w elektrotechnice*, wydanie trzecie poprawione, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, (1981).
- [111] A. Lenartowicz, M. Przychodzki, M. Łasecka-Plura, M. Guminiak, *Eigenvibrations of plates with VE supports in terms of continuation and subspace iteration methods*, 24th International Conference on Computer Methods in Mechanics, 42nd Solid Mechanics Conference, Świnoujście, September 5–8 (2022).
- [112] M. Komosiński, *Optymalizacja za pomocą roju cząstek*, <http://www.alife.pl/optymalizacja-rojem-czastek> (dostęp: 26.06.2023).
- [113] M. Wiatrak, E. Figielska, *Zastosowanie algorytmu optymalizacji rojem cząstek do znajdowania ekstremów globalnych wybranych funkcji testowych*, Zaszty Naukowe Warszawskiej Wyższej Szkoły Informatyki, 13, 9 (2015) 7–19.
- [114] M. Przychodzki, *Wybrane metody sztucznej inteligencji w sterowaniu układami aktywnej redukcji drgań konstrukcji ramowych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, (2014).
- [115] M. Kamiński, M. Guminiak, A. Lenartowicz, M. Łasecka-Plura, M. Przychodzki, W. Sumelka, *An application of fractional derivatives and subspace iteration method for random eigenvibrations of plates resting on viscoelastic supports*, 5th Polish Congress of Mechanics, 25th International Conference on Computer Methods in Mechanics, Gliwice, September 4–7 (2022).
- [116] K. Wisłocki, *Metodologia i redakcja prac naukowych*, Wydawnictwo Politechniki Poznańskiej, Poznań, (2013).

## A. Uwzględnienie warunków podparcia płyt w metodzie różnic skończonych

W niniejszym dodatku zamieszczono szczegółowy opis przekształceń macierzy operatorów różnicowych  $\Delta$ , wyrażonej wzorem (3.86) oraz stanowiącej macierz układu równań (3.85), ze względu na warunki podparcia analizowanych płyt. Przekształcenia opisane w kolejnych podrozdziałach wykonano dla trzech podstawowych sposobów zamocowania płyt. Uwzględnienie warunków podparcia pozwala wyeliminować wartości ugięć w tzw. punktach fikcyjnych, zlokalizowanych poza powierzchnią płyty, podczas zapisywania równania różnicowego (3.39) dla kolejnych węzłów siatki MRS pokazanych na rysunku 3.4. W równaniu (3.39) ugięcia w punktach fikcyjnych, odpowiadające pewnym parom indeksów  $i$  oraz  $j$ , należy zastępować wybranymi równaniami spośród (3.71)–(3.84). Każda para indeksów  $(i, j)$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, m + 1$  oraz  $j = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ , oznacza konkretny węzeł siatki MRS. Sposób indeksacji węzłów pokazano na rysunku 3.4 i zgodnie z nim indeksy  $i$  oraz  $j$  oznaczają numer odpowiednio pionowej oraz poziomej linii wchodzącej w skład siatki MRS. Ponadto przyjęto, że wartości indeksów  $i$  oraz  $j$  rosną w kierunku odpowiednio od strony lewej do prawej oraz od dołu do góry.

### A.1. Płyta podparta przegubowo na obwodzie

W przypadku płyty podpartej przegubowo na obwodzie należy wziąć pod uwagę zerowe ugięcia w punktach siatki MRS leżących na krawędziach płyty. Ponadto uwzględnia się zerowe momenty zginające  $M_x$  oraz  $M_y$  na krawędziach odpowiednio lewej/prawej oraz dolnej/górnej.

1. Uwzględnienie zerowych ugięć na dolnej/górnej krawędzi płyty

- a) Ze wzoru (3.73) wynika, że:

$$w_{11} = w_{21} = w_{31} = \dots = w_{m+1,1} = 0,$$

$$w_{1,n+1} = w_{2,n+1} = w_{3,n+1} = \dots = w_{m+1,n+1} = 0.$$

- b) W macierzy blokowej (3.86) należy pierwszy i ostatni wiersz oraz pierwszą i ostatnią kolumnę przekształcić w ten sposób, że macierze-bloki na przekątnej głównej ( $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_{n+1}$ ) zastępuje się macierzami jednostkowymi, a w miejsce

pozostałych macierzy-bloków ( $\mathbf{B}_1, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_1, \mathbf{E}_1, \mathbf{B}_n, \mathbf{C}_{n-1}, \mathbf{D}_n, \mathbf{E}_{n-1}$ ) wstawia się macierze zerowe.

2. Uwzględnienie zerowych ugięć na lewej/prawej krawędzi płyty

a) Ze wzoru (3.71) wynika, że:

$$w_{11} = w_{12} = w_{13} = \dots = w_{1,n+1} = 0,$$

$$w_{m+1,1} = w_{m+1,2} = w_{m+1,3} = \dots = w_{m+1,n+1} = 0.$$

b) W macierzy blokowej (3.86) należy przekształcić poszczególne macierze-bloki w taki sposób, że pierwszy i ostatni wiersz oraz pierwszą i ostatnią kolumnę wypełnia się zerami, a na przekątnej głównej w tych wierszach i kolumnach przyjmuje się wartość jednostkową.

3. Uwzględnienie zerowych momentów zginających  $M_y$  oraz  $M_x$  na krawędziach odpowiednio dolnej/górnej oraz lewej/prawej

a) Podczas zapisywania równania (3.39) dla punktów wewnętrznych płyty, bezpośrednio sąsiadujących z punktami na jej krawędziach (czyli dla  $j \in \{2, n\}$ ,  $i \in \{2, 3, 4, \dots, m\}$  oraz dla  $i \in \{2, m\}$ ,  $j \in \{3, 4, \dots, n-1\}$ ), należy dokonać poniższych modyfikacji pozwalających wyeliminować ugięcia  $w_{i0}$ ,  $w_{i,n+2}$ ,  $w_{0,j}$  oraz  $w_{m+2,j}$  w punktach fikcyjnych leżących na zewnątrz płyty, w bezpośrednim sąsiedztwie jej krawędzi. Skorzystano z warunków (3.72) oraz (3.74).

Dla  $j = 2$ :

$$\underline{i = 2} \Rightarrow (\alpha_{10})_{22}w_{02} = -(\alpha_{10})_{22}w_{22} \text{ oraz } (\alpha_{11})_{22}w_{20} = -(\alpha_{11})_{22}w_{22},$$

$$\underline{i = 3, 4, 5, \dots, m-1} \Rightarrow (\alpha_{11})_{i2}w_{i0} = -(\alpha_{11})_{i2}w_{i2},$$

$$\underline{i = m} \Rightarrow (\alpha_{11})_{m2}w_{m0} = -(\alpha_{11})_{m2}w_{m2} \text{ oraz } (\alpha_{13})_{m2}w_{m+2,2} = -(\alpha_{13})_{m2}w_{m2}.$$

Dla  $j = 3, 4, 5, \dots, n-1$ :

$$\underline{i = 2} \Rightarrow (\alpha_{10})_{2j}w_{0j} = -(\alpha_{10})_{2j}w_{2j},$$

$$\underline{i = m} \Rightarrow (\alpha_{13})_{mj}w_{m+2,j} = -(\alpha_{13})_{mj}w_{mj}.$$

Dla  $j = n$ :

$$\underline{i = 2} \Rightarrow (\alpha_{10})_{2n}w_{0n} = -(\alpha_{10})_{2n}w_{2n} \text{ oraz } (\alpha_{12})_{2n}w_{2,n+2} = -(\alpha_{12})_{2n}w_{2n},$$

$$\underline{i = 3, 4, 5, \dots, m-1} \Rightarrow (\alpha_{12})_{in}w_{i,n+2} = -(\alpha_{12})_{in}w_{in},$$

$$\underline{i = m} \Rightarrow (\alpha_{12})_{mn}w_{m,n+2} = -(\alpha_{12})_{mn}w_{mn} \text{ oraz } (\alpha_{13})_{mn}w_{m+2,n} = -(\alpha_{13})_{mn}w_{mn}.$$

b) Z powyższego zapisu wynika, że w macierzy (3.86) zmodyfikować należy tylko macierze-bloki  $\mathbf{A}_j$  wyrażone wzorem (3.87). Przyjmują one wówczas następujące postacie:

- macierz  $\mathbf{A}_2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_2)_{22} & (\alpha_4)_{22} & (\alpha_{13})_{22} & & & & & \\ 0 & (\alpha_2)_{32} & (\mathbf{A}_2)_{33} & (\alpha_4)_{32} & (\alpha_{13})_{32} & & & & \\ & (\alpha_{10})_{42} & (\alpha_2)_{42} & (\mathbf{A}_2)_{44} & (\alpha_4)_{42} & (\alpha_{13})_{42} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (\alpha_{10})_{m-1,2} & (\alpha_2)_{m-1,2} & (\mathbf{A}_2)_{m-1,m-1} & (\alpha_4)_{m-1,2} & 0 & \\ & & & & (\alpha_{10})_{m,2} & (\alpha_2)_{m,2} & (\mathbf{A}_2)_{m,m} & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad (\text{A.1})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_2)_{22} &= (\alpha_1 - \alpha_{10} - \alpha_{11})_{22}, \\ (\mathbf{A}_2)_{i,i} &= (\alpha_1 - \alpha_{11})_{i,2} \text{ dla } i = 3, 4, 5, \dots, m-1, \\ (\mathbf{A}_2)_{m,m} &= (\alpha_1 - \alpha_{11} - \alpha_{13})_{m,2}, \end{aligned}$$

- macierze  $\mathbf{A}_j$  dla  $j = 3, 4, 5, \dots, n-1$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_j)_{22} & (\alpha_4)_{2j} & (\alpha_{13})_{2j} & & & & & \\ 0 & (\alpha_2)_{3j} & (\alpha_1)_{3j} & (\alpha_4)_{3j} & (\alpha_{13})_{3j} & & & & \\ & (\alpha_{10})_{4j} & (\alpha_2)_{4j} & (\alpha_1)_{4j} & (\alpha_4)_{4j} & (\alpha_{13})_{4j} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (\alpha_{10})_{m-1,j} & (\alpha_2)_{m-1,j} & (\alpha_1)_{m-1,j} & (\alpha_4)_{m-1,j} & 0 & \\ & & & & (\alpha_{10})_{m,j} & (\alpha_2)_{m,j} & (\mathbf{A}_j)_{m,m} & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad (\text{A.2})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A}_j)_{22} &= (\alpha_1 - \alpha_{10})_{2j}, \\ (\mathbf{A}_j)_{m,m} &= (\alpha_1 - \alpha_{13})_{m,j}, \end{aligned}$$

- macierz  $\mathbf{A}_n$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_n)_{22} & (\alpha_4)_{2,n} & (\alpha_{13})_{2,n} & & & & & \\ 0 & (\alpha_2)_{3,n} & (\mathbf{A}_n)_{33} & (\alpha_4)_{3,n} & (\alpha_{13})_{3,n} & & & & \\ & (\alpha_{10})_{4,n} & (\alpha_2)_{4,n} & (\mathbf{A}_n)_{44} & (\alpha_4)_{4,n} & (\alpha_{13})_{4,n} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (\alpha_{10})_{m-1,n} & (\alpha_2)_{m-1,n} & (\mathbf{A}_n)_{m-1,m-1} & (\alpha_4)_{m-1,n} & 0 & \\ & & & & (\alpha_{10})_{m,n} & (\alpha_2)_{m,n} & (\mathbf{A}_n)_{m,m} & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad (\text{A.3})$$

gdzie:

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}_n)_{22} &= (\alpha_1 - \alpha_{10} - \alpha_{12})_{2,n}, \\ (\mathbf{A}_n)_{i,i} &= (\alpha_1 - \alpha_{12})_{i,n} \text{ dla } i = 3, 4, 5, \dots, m-1, \\ (\mathbf{A}_n)_{m,m} &= (\alpha_1 - \alpha_{12} - \alpha_{13})_{m,n}.\end{aligned}$$

Ostatecznie, dla przypadku płyty podpartej swobodnie na obwodzie, macierz  $\Delta$  układu równań (3.85) można zapisać w postaci:

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{B}_2 & \mathbf{C}_2 & & & & & \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_2 & \mathbf{A}_3 & \mathbf{B}_3 & \mathbf{C}_3 & & & & \\ & \mathbf{E}_2 & \mathbf{D}_3 & \mathbf{A}_4 & \mathbf{B}_4 & \mathbf{C}_4 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \mathbf{E}_{n-3} & \mathbf{D}_{n-2} & \mathbf{A}_{n-1} & \mathbf{B}_{n-1} & \mathbf{0} & \\ & & & & \mathbf{E}_{n-2} & \mathbf{D}_{n-1} & \mathbf{A}_n & \mathbf{0} & \\ & & & & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} & \end{bmatrix}_{(n+1) \times (n+1)}, \quad (\text{A.4})$$

gdzie:

- macierze  $\mathbf{A}_j$  ( $j = 2, 3, 4, \dots, n$ ) wyznacza się zgodnie ze wzorami (A.1)–(A.3),
- macierze  $\mathbf{B}_j$  i  $\mathbf{D}_j$  ( $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$ ) wyrażone są wzorami (3.88) i (3.90),
- macierze  $\mathbf{C}_j$  i  $\mathbf{E}_j$  ( $j = 2, 3, 4, \dots, n-2$ ) określają wzory (3.89) i (3.91),
- macierz  $\mathbf{I}$  – jednostkowa o wymiarze  $(m+1) \times (m+1)$ ,
- macierz  $\mathbf{0}$  – zerowa o wymiarze  $(m+1) \times (m+1)$ .

### Uwaga

W sytuacji tzw. mieszanego podparcia płyty na obwodzie, tzn. przegubowo na wybranych krawędziach i w sposób utwierdzony na pozostałych z nich, warunki zerowania się momentów zginających (3.72) i (3.74) należy zastąpić dla krawędzi utwierdzonych warunkami zerowania się kątów obrotu (3.76) oraz (3.78). Oznacza to, że wzory (A.1)–(A.3) ulegają następującym modyfikacjom:

- dolna krawędź utwierdzona – współczynnik  $\alpha_{11}$  należy dodawać zamiast odejmować, obliczając elementy na przekątnej głównej macierzy  $\mathbf{A}_2$  (wzór (A.1)),
- górna krawędź utwierdzona – współczynnik  $\alpha_{12}$  należy dodawać zamiast odejmować, obliczając elementy na przekątnej głównej macierzy  $\mathbf{A}_n$  (wzór (A.3)),
- lewa krawędź utwierdzona – współczynnik  $\alpha_{10}$  należy dodawać zamiast odejmować, obliczając elementy na przekątnej głównej macierzy  $\mathbf{A}_j$  (wzory (A.1)–(A.3)),

- prawa krawędź utwierdzona – współczynnik  $\alpha_{13}$  należy dodawać zamiast odejmować, obliczając elementy na przekątnej głównej macierzy  $\mathbf{A}_j$  (wzory (A.1)-(A.3)).

## A.2. Płyta podparta swobodnie na dwóch krawędziach

W podrozdziale rozpatrzono płytę swobodnie podpartą na jej lewej i prawej krawędzi zgodnie z rysunkiem 3.5b). Uwzględniając warunki brzegowe, należy wziąć pod uwagę zerowe ugięcia oraz zerowe momenty zginające  $M_x$  w punktach siatki MRS leżących na lewej i prawej krawędzi płyty. Ponadto w rozważanej sytuacji obowiązują dodatkowe warunki dotyczące swobodnej krawędzi dolnej oraz górnej.

1. Uwzględnienie zerowych ugięć na lewej/prawej krawędzi płyty

- a) Ze wzoru (3.71) wynika, że:

$$w_{11} = w_{12} = w_{13} = \dots = w_{1,n+1} = 0,$$

$$w_{m+1,1} = w_{m+1,2} = w_{m+1,3} = \dots = w_{m+1,n+1} = 0.$$

- b) W macierzy blokowej (3.86) dokonuje się identycznego przekształcenia jak w podrozdziale A.1 w p. 2, tzn. w każdej składowej macierzy-bloku pierwszy i ostatni wiersz oraz pierwszą i ostatnią kolumnę należy wypełnić zerami, a na przekątnej głównej w tych wierszach i kolumnach wstawia się wartość jednostkową.

2. Uwzględnienie zerowych momentów zginających  $M_x$  na krawędzi lewej/prawej

- a) Zapisując równanie (3.39) dla punktów wewnętrznych płyty, bezpośrednio sąsiadujących z punktami na jej krawędzi lewej/prawej (czyli dla  $i = \{2, m\}$ ,  $j = \{1, 2, 3, \dots, n+1\}$ ), należy dokonać poniższych modyfikacji w celu wyeliminowania ugięć  $w_{0,j}$  oraz  $w_{m+2,j}$  w punktach fikcyjnych leżących na zewnątrz płyty, w bezpośrednim sąsiedztwie jej lewej i prawej krawędzi. Z warunku (3.72) wynika, że

$$\underline{\text{dla } j = 1, 2, 3, \dots, n+1:}$$

$$\underline{i = 2} \Rightarrow (\alpha_{10})_{2j} w_{0j} = -(\alpha_{10})_{2j} w_{2j},$$

$$\underline{i = m} \Rightarrow (\alpha_{13})_{mj} w_{m+2,j} = -(\alpha_{13})_{mj} w_{mj}.$$

- b) Dla  $j \in \{3, 4, 5, \dots, n-1\}$  należy zmodyfikować wszystkie macierze-bloki  $\mathbf{A}_j$  zgodnie ze wzorem (A.2).
- c) Dla  $j \in \{1, 2, n, n+1\}$  należy w macierzach  $\mathbf{A}_j$  dokonać modyfikacji jak w p. b), a ponadto niezbędne są dalsze przekształcenia, opisane poniżej w p. 3, ze względu na krawędź swobodną dolną/górną.

## 3. Uwzględnienie swobodnej krawędzi dolnej/górnej

- a) Przy pomocy warunków (3.81) i (3.82) można wyeliminować z równań (3.39) ugięcia  $w_{i,0}$ ,  $w_{i,-1}$ ,  $w_{i,n+2}$  oraz  $w_{i,n+3}$  występujące w punktach fikcyjnych leżących poniżej dolnej oraz powyżej górnej krawędzi płyty.
- b) Przyjęto następujący, uproszczony zapis wzorów (3.81) i (3.82):

$$w_{i,j+1} = -w_{i,j-1} + \beta_1 w_{ij} + \beta_2 (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}), \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} w_{i,j+2} = & w_{i,j-2} + \gamma_1 w_{i,j-1} + \gamma_2 w_{ij} + \gamma_3 (w_{i-1,j-1} + w_{i+1,j-1}) + \\ & + \gamma_4 (w_{i-1,j} + w_{i+1,j}) + \gamma_5 (w_{i-2,j} + w_{i+2,j}), \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

gdzie:

$$\beta_1 = 2 \left( 1 + \nu \frac{k^2}{h^2} \right), \quad (\text{A.7})$$

$$\beta_2 = -\nu \frac{k^2}{h^2}, \quad (\text{A.8})$$

$$\gamma_1 = -4 \left[ 1 + (2 - \nu) \frac{k^2}{h^2} \right], \quad (\text{A.9})$$

$$\gamma_2 = \left[ 6\nu(2 - \nu) \frac{k^4}{h^4} + 8 \frac{k^2}{h^2} + 4 \right], \quad (\text{A.10})$$

$$\gamma_3 = 2(2 - \nu) \frac{k^2}{h^2}, \quad (\text{A.11})$$

$$\gamma_4 = -4 \left[ \frac{k^2}{h^2} + \nu(2 - \nu) \frac{k^4}{h^4} \right], \quad (\text{A.12})$$

$$\gamma_5 = \nu(2 - \nu) \frac{k^4}{h^4}. \quad (\text{A.13})$$

Korzystając ze wzoru (A.5), można wyrazić ugięcia  $w_{i,0}$  oraz  $w_{i,n+2}$ , dla kolejnych indeksów  $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ , przy pomocy ugięć występujących w obrębie płyty.

Dla  $j = 1$ :

$$\underline{i = 1} \Rightarrow w_{10} = -\overbrace{w_{12}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{11}}^0 + \beta_2 (\overbrace{w_{01}}^{-w_{21}} + w_{21}) = 0,$$

$$\underline{i = 2} \Rightarrow w_{20} = -w_{22} + \beta_1 w_{21} + \beta_2 (\overbrace{w_{11}}^0 + w_{31}) = -w_{22} + \beta_1 w_{21} + \beta_2 w_{31},$$

$$\underline{i = 3} \Rightarrow w_{30} = -w_{32} + \beta_1 w_{31} + \beta_2 (w_{21} + w_{41}),$$

$\vdots$

$$\underline{i = m-1} \Rightarrow w_{m-1,0} = -w_{m-1,2} + \beta_1 w_{m-1,1} + \beta_2 (w_{m-2,1} + w_{m,1}),$$

$$\underline{i = m} \Rightarrow w_{m,0} = -w_{m,2} + \beta_1 w_{m,1} + \beta_2 (w_{m-1,1} + \overbrace{w_{m+1,1}}^0) = -w_{m,2} + \beta_1 w_{m,1} + \beta_2 w_{m-1,1},$$

$$\underline{i = m+1} \Rightarrow w_{m+1,0} = -\overbrace{w_{m+1,2}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{m+1,1}}^0 + \beta_2 (w_{m,1} + \overbrace{w_{m+2,1}}^{-w_{m,1}}) = 0.$$

Dla  $j = n + 1$ :

$$\underline{i = 1} \Rightarrow w_{1,n+2} = -\overbrace{w_{1,n}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{1,n+1}}^0 + \beta_2 (\overbrace{w_{0,n+1}}^{-w_{2,n+1}} + w_{2,n+1}) = 0,$$

$$\underline{i = 2} \Rightarrow w_{2,n+2} = -w_{2,n} + \beta_1 w_{2,n+1} + \beta_2 (\overbrace{w_{1,n+1}}^0 + w_{3,n+1}) = -w_{2,n} + \beta_1 w_{2,n+1} + \beta_2 w_{3,n+1},$$

$$\underline{i = 3} \Rightarrow w_{3,n+2} = -w_{3,n} + \beta_1 w_{3,n+1} + \beta_2 (w_{2,n+1} + w_{4,n+1}),$$

$\vdots$

$$\underline{i = m - 1} \Rightarrow w_{m-1,n+2} = -w_{m-1,n} + \beta_1 w_{m-1,n+1} + \beta_2 (w_{m-2,n+1} + w_{m,n+1}),$$

$$\begin{aligned} \underline{i = m} \Rightarrow w_{m,n+2} &= -w_{m,n} + \beta_1 w_{m,n+1} + \beta_2 (w_{m-1,n+1} + \overbrace{w_{m+1,n+1}}^0) = \\ &= -w_{m,n} + \beta_1 w_{m,n+1} + \beta_2 w_{m-1,n+1}, \end{aligned}$$

$$\underline{i = m + 1} \Rightarrow w_{m+1,n+2} = -\overbrace{w_{m+1,n}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{m+1,n+1}}^0 + \beta_2 (w_{m,n+1} + \overbrace{w_{m+2,n+1}}^{-w_{m,n+1}}) = 0.$$

Przy użyciu wzoru (A.6) można przedstawić ugięcia  $w_{i,-1}$  oraz  $w_{i,n+3}$ , przyjmując  $i = 2, 3, 4, \dots, m$ , tak aby zależały one od odpowiednich ugięć wewnątrz płyty.

Dla  $j = 1$ :

$i = 2$ :

$$\begin{aligned} w_{2,-1} &= w_{23} - \gamma_1 w_{20} - \gamma_2 w_{21} - \gamma_3 (\overbrace{w_{10}}^0 + w_{30}) - \gamma_4 (\overbrace{w_{11}}^0 + w_{31}) - \gamma_5 (\overbrace{w_{01}}^{-w_{21}} + w_{41}) = \\ &= w_{23} + \gamma_1 w_{22} + \varphi_1 w_{21} + \varphi_2 w_{31} + \gamma_3 w_{32} + \varphi_3 w_{41}, \end{aligned}$$

$i = 3$ :

$$\begin{aligned} w_{3,-1} &= w_{33} - \gamma_1 w_{30} - \gamma_2 w_{31} - \gamma_3 (w_{20} + w_{40}) - \gamma_4 (w_{21} + w_{41}) - \gamma_5 (\overbrace{w_{11}}^0 + w_{51}) = \\ &= w_{33} + \gamma_1 w_{32} + \varphi_4 w_{31} + \varphi_2 (w_{21} + w_{41}) + \gamma_3 (w_{22} + w_{42}) + \varphi_3 w_{51}, \end{aligned}$$

$i = 4$ :

$$\begin{aligned} w_{4,-1} &= w_{43} - \gamma_1 w_{40} - \gamma_2 w_{41} - \gamma_3 (w_{30} + w_{50}) - \gamma_4 (w_{31} + w_{51}) - \gamma_5 (w_{21} + w_{61}) = \\ &= w_{43} + \gamma_1 w_{42} + \varphi_4 w_{41} + \varphi_2 (w_{31} + w_{51}) + \gamma_3 (w_{32} + w_{52}) + \varphi_3 (w_{21} + w_{61}), \end{aligned}$$

$\vdots$

$i = m - 2$ :

$$\begin{aligned} w_{m-2,-1} &= w_{m-2,3} + \gamma_1 w_{m-2,2} + \varphi_4 w_{m-2,1} + \varphi_2 (w_{m-3,1} + w_{m-1,1}) + \\ &+ \gamma_3 (w_{m-3,2} + w_{m-1,2}) + \varphi_3 (w_{m-4,1} + w_{m,1}), \end{aligned}$$

$i = m - 1$ :

$$w_{m-1,-1} = w_{m-1,3} - \gamma_1 w_{m-1,0} - \gamma_2 w_{m-1,1} - \gamma_3 (w_{m-2,0} + w_{m,0}) +$$

$$\begin{aligned}
& -\gamma_4(w_{m-2,1} + w_{m,1}) - \gamma_5(w_{m-3,1} + \overbrace{w_{m+1,1}}^0) = w_{m-1,3} + \gamma_1 w_{m-1,2} + \varphi_4 w_{m-1,1} + \\
& + \varphi_2(w_{m-2,1} + w_{m,1}) + \gamma_3(w_{m-2,2} + w_{m,2}) + \varphi_3 w_{m-3,1},
\end{aligned}$$

$i = m$ :

$$\begin{aligned}
w_{m,-1} &= w_{m,3} - \gamma_1 w_{m,0} - \gamma_2 w_{m,1} - \gamma_3(w_{m-1,0} + \overbrace{w_{m+1,0}}^0) - \gamma_4(w_{m-1,1} + \overbrace{w_{m+1,1}}^0) + \\
& - \gamma_5(w_{m-2,1} + \overbrace{w_{m+2,1}}^{-w_{m,1}}) = w_{m,3} + \gamma_1 w_{m,2} + \varphi_1 w_{m,1} + \varphi_2 w_{m-1,1} + \gamma_3 w_{m-1,2} + \varphi_3 w_{m-2,1}.
\end{aligned}$$

Dla  $j = n + 1$ :

$i = 2$ :

$$\begin{aligned}
w_{2,n+3} &= w_{2,n-1} + \gamma_1 w_{2,n} + \gamma_2 w_{2,n+1} + \gamma_3(\overbrace{w_{1,n}}^0 + w_{3,n}) + \gamma_4(\overbrace{w_{1,n+1}}^0 + w_{3,n+1}) + \\
& + \gamma_5(\overbrace{w_{0,n+1}}^{-w_{2,n+1}} + w_{4,n+1}) = w_{2,n-1} + \gamma_1 w_{2,n} + (\gamma_2 - \gamma_5) w_{2,n+1} + \gamma_3 w_{3,n} + \gamma_4 w_{3,n+1} + \\
& + \gamma_5 w_{4,n+1},
\end{aligned}$$

$i = 3$ :

$$\begin{aligned}
w_{3,n+3} &= w_{3,n-1} + \gamma_1 w_{3,n} + \gamma_2 w_{3,n+1} + \gamma_3(w_{2,n} + w_{4,n}) + \gamma_4(w_{2,n+1} + w_{4,n+1}) + \\
& + \gamma_5(w_{1,n+1} + w_{5,n+1}),
\end{aligned}$$

$i = 4$ :

$$\begin{aligned}
w_{4,n+3} &= w_{4,n-1} + \gamma_1 w_{4,n} + \gamma_2 w_{4,n+1} + \gamma_3(w_{3,n} + w_{5,n}) + \gamma_4(w_{3,n+1} + w_{5,n+1}) + \\
& + \gamma_5(w_{2,n+1} + w_{6,n+1}),
\end{aligned}$$

$\vdots$

$i = m - 2$ :

$$\begin{aligned}
w_{m-2,n+3} &= w_{m-2,n-1} + \gamma_1 w_{m-2,n} + \gamma_2 w_{m-2,n+1} + \gamma_3(w_{m-3,n} + w_{m-1,n}) + \\
& + \gamma_4(w_{m-3,n+1} + w_{m-1,n+1}) + \gamma_5(w_{m-4,n+1} + w_{m,n+1}),
\end{aligned}$$

$i = m - 1$ :

$$\begin{aligned}
w_{m-1,n+3} &= w_{m-1,n-1} + \gamma_1 w_{m-1,n} + \gamma_2 w_{m-1,n+1} + \gamma_3(w_{m-2,n} + w_{m,n}) + \\
& + \gamma_4(w_{m-2,n+1} + w_{m,n+1}) + \gamma_5(w_{m-3,n+1} + \overbrace{w_{m+1,n+1}}^0) = w_{m-1,n-1} + \gamma_1 w_{m-1,n} + \\
& + \gamma_2 w_{m-1,n+1} + \gamma_3(w_{m-2,n} + w_{m,n}) + \gamma_4(w_{m-2,n+1} + w_{m,n+1}) + \gamma_5 w_{m-3,n+1},
\end{aligned}$$

$i = m$ :

$$\begin{aligned}
w_{m,n+3} &= w_{m,n-1} + \gamma_1 w_{m,n} + \gamma_2 w_{m,n+1} + \gamma_3(w_{m-1,n} + \overbrace{w_{m+1,n}}^0) + \\
& + \gamma_4(w_{m-1,n+1} + \overbrace{w_{m+1,n+1}}^0) + \gamma_5(w_{m-2,n+1} + \overbrace{w_{m+2,n+1}}^{-w_{m,n+1}}) = w_{m,n-1} + \gamma_1 w_{m,n} + \\
& + (\gamma_2 - \gamma_5) w_{m,n+1} + \gamma_3 w_{m-1,n} + \gamma_4 w_{m-1,n+1} + \gamma_5 w_{m-2,n+1}.
\end{aligned}$$

W powyższych wzorach przyjęto następujące oznaczenia:

$$\varphi_1 = -(\gamma_2 + \gamma_1\beta_1 + \gamma_3\beta_2 - \gamma_5), \quad (\text{A.14})$$

$$\varphi_2 = -(\gamma_4 + \gamma_3\beta_1 + \gamma_1\beta_2), \quad (\text{A.15})$$

$$\varphi_3 = -(\gamma_5 + \gamma_3\beta_2), \quad (\text{A.16})$$

$$\varphi_4 = -(\gamma_1\beta_1 + \gamma_2 + 2\gamma_3\beta_2). \quad (\text{A.17})$$

Macierz  $\Delta$  układu (3.85) charakteryzuje się postacią blokową wyrażoną wzorem (3.86). Poszczególne bloki tej macierzy, w sytuacji swobodnego podparcia płyty na dwóch krawędziach, można wyznaczyć, korzystając z niżej zestawionych wzorów:

- macierze  $\mathbf{A}_j$  ( $j = 3, 4, 5, \dots, n-1$ ) – wzór (A.2),
- macierze  $\mathbf{B}_j$  ( $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$ ) – wzór (3.88),
- macierze  $\mathbf{C}_j$  ( $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$ ) – wzór (3.89),
- macierze  $\mathbf{D}_j$  ( $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$ ) – wzór (3.90),
- macierze  $\mathbf{E}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n-2$ ) – wzór (3.91),
- macierz  $\mathbf{A}_1$  – poniższy wzór (A.18):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_1)_{22} & (\mathbf{A}_1)_{23} & (\mathbf{A}_1)_{24} & & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_1)_{32} & (\mathbf{A}_1)_{33} & (\mathbf{A}_1)_{34} & (\mathbf{A}_1)_{35} & & & & & & \\ & (\mathbf{A}_1)_{42} & (\mathbf{A}_1)_{43} & (\mathbf{A}_1)_{44} & (\mathbf{A}_1)_{45} & (\mathbf{A}_1)_{46} & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & (\mathbf{A}_1)_{m-1,m-3} & (\mathbf{A}_1)_{m-1,m-2} & (\mathbf{A}_1)_{m-1,m-1} & (\mathbf{A}_1)_{m-1,m} & 0 & & & \\ & & & & (\mathbf{A}_1)_{m,m-2} & (\mathbf{A}_1)_{m,m-1} & (\mathbf{A}_1)_{m,m} & 0 & & & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & & & \end{bmatrix}, \quad (\text{A.18})$$

gdzie:

$$(\mathbf{A}_1)_{22} = (\alpha_1)_{21} - (\alpha_{10})_{21} + (\alpha_3)_{21}\beta_1 + (\alpha_8)_{21}\beta_2 + (\alpha_{11})_{21}\varphi_1,$$

$$(\mathbf{A}_1)_{i,i} = (\alpha_1)_{i,1} + (\alpha_3)_{i,1}\beta_1 + (\alpha_6)_{i,1}\beta_2 + (\alpha_8)_{i,1}\beta_2 + (\alpha_{11})_{i,1}\varphi_4 \text{ dla}$$

$$i = 3, 4, 5, \dots, m-1,$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m,m} = (\alpha_1)_{m,1} - (\alpha_{13})_{m,1} + (\alpha_3)_{m,1}\beta_1 + (\alpha_6)_{m,1}\beta_2 + (\alpha_{11})_{m,1}\varphi_1,$$

$$(\mathbf{A}_1)_{i,i+1} = (\alpha_4)_{i,1} + (\alpha_3)_{i,1}\beta_2 + (\alpha_8)_{i,1}\beta_1 + (\alpha_{11})_{i,1}\varphi_2 \text{ dla } i = 2, 3, 4, \dots, m-1,$$

$$(\mathbf{A}_1)_{i,i-1} = (\alpha_2)_{i,1} + (\alpha_6)_{i,1}\beta_1 + (\alpha_3)_{i,1}\beta_2 + (\alpha_{11})_{i,1}\varphi_2 \text{ dla } i = 3, 4, 5, \dots, m,$$

$$(\mathbf{A}_1)_{i,i+2} = (\alpha_{13})_{i,1} + (\alpha_8)_{i,1}\beta_2 + (\alpha_{11})_{i,1}\varphi_3 \text{ dla } i = 2, 3, 4, \dots, m-2,$$

$$(\mathbf{A}_1)_{i,i-2} = (\alpha_{10})_{i,1} + (\alpha_6)_{i,1}\beta_2 + (\alpha_{11})_{i,1}\varphi_3 \text{ dla } i = 4, 5, 6, \dots, m,$$

- macierz  $\mathbf{B}_1$  – poniższy wzór (A.19):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{B}_1)_{22} & (\mathbf{B}_1)_{23} & & & & & & \\ & (\mathbf{B}_1)_{32} & (\mathbf{B}_1)_{33} & (\mathbf{B}_1)_{34} & & & & & \\ & & (\mathbf{B}_1)_{43} & (\mathbf{B}_1)_{44} & (\mathbf{B}_1)_{45} & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & (\mathbf{B}_1)_{m-1,m-2} & (\mathbf{B}_1)_{m-1,m-1} & (\mathbf{B}_1)_{m-1,m} & & \\ & & & & & (\mathbf{B}_1)_{m,m-1} & (\mathbf{B}_1)_{m,m} & 0 & \\ & & & & & & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad (\text{A.19})$$

gdzie:

$$\begin{aligned} (\mathbf{B}_1)_{i,i} &= (\alpha_5)_{i,1} - (\alpha_3)_{i,1} + (\alpha_{11})_{i,1}\gamma_1 \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots, m, \\ (\mathbf{B}_1)_{i,i+1} &= (\alpha_9)_{i,1} - (\alpha_8)_{i,1} + (\alpha_{11})_{i,1}\gamma_3 \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots, m-1, \\ (\mathbf{B}_1)_{i,i-1} &= (\alpha_7)_{i,1} - (\alpha_6)_{i,1} + (\alpha_{11})_{i,1}\gamma_3 \quad \text{dla } i = 3, 4, 5, \dots, m, \end{aligned}$$

- macierz  $\mathbf{C}_1$  – poniższy wzór (A.20):

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & (\mathbf{C}_1)_{22} & & & & & & & \\ & & (\mathbf{C}_1)_{33} & & & & & & \\ & & & (\mathbf{C}_1)_{44} & & & & & \\ & & & & \ddots & & & & \\ & & & & & (\mathbf{C}_1)_{m-1,m-1} & & & \\ & & & & & & (\mathbf{C}_1)_{m,m} & & \\ & & & & & & & 1 & \end{bmatrix}, \quad (\text{A.20})$$

gdzie

$$(\mathbf{C}_1)_{i,i} = (\alpha_{12})_{i,1} + (\alpha_{11})_{i,1} \quad \text{dla } i = 2, 3, 4, \dots, m,$$

- macierz  $\mathbf{A}_2$  – poniższy wzór (A.21):

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_2)_{22} & (\mathbf{A}_2)_{23} & (\mathbf{A}_2)_{24} & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_2)_{32} & (\mathbf{A}_2)_{33} & (\mathbf{A}_2)_{34} & (\mathbf{A}_2)_{35} & & & & \\ & (\mathbf{A}_2)_{42} & (\mathbf{A}_2)_{43} & (\mathbf{A}_2)_{44} & (\mathbf{A}_2)_{45} & (\mathbf{A}_2)_{46} & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & (\mathbf{A}_2)_{m-1,m-3} & (\mathbf{A}_2)_{m-1,m-2} & (\mathbf{A}_2)_{m-1,m-1} & (\mathbf{A}_2)_{m-1,m} & 0 & \\ & & & & (\mathbf{A}_2)_{m,m-2} & (\mathbf{A}_2)_{m,m-1} & (\mathbf{A}_2)_{m,m} & 0 & \\ & & & & & 0 & 0 & 1 & \end{bmatrix}, \quad (\text{A.21})$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}_2)_{22} &= (\alpha_1)_{22} - (\alpha_{10})_{22} - (\alpha_{11})_{22}, \\
 (\mathbf{A}_2)_{i,i} &= (\alpha_1)_{32} - (\alpha_{11})_{32} \text{ dla } i = 3, 4, 5, \dots, m-1, \\
 (\mathbf{A}_2)_{m,m} &= (\alpha_1)_{m,2} - (\alpha_{13})_{m,2} - (\alpha_{11})_{m,2}, \\
 (\mathbf{A}_2)_{i,i+1} &= (\alpha_4)_{i,2} \text{ dla } i = 2, 3, 4, \dots, m-1, \\
 (\mathbf{A}_2)_{i,i-1} &= (\alpha_2)_{i,2} \text{ dla } i = 3, 4, 5, \dots, m, \\
 (\mathbf{A}_2)_{i,i+2} &= (\alpha_{13})_{i,2} \text{ dla } i = 2, 3, 4, \dots, m-2, \\
 (\mathbf{A}_2)_{i,i-2} &= (\alpha_{10})_{i,2} \text{ dla } i = 4, 5, 6, \dots, m,
 \end{aligned}$$

- macierz  $\mathbf{D}_1$  – poniższy wzór (A.22):

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & & & & & & & & \\
 0 & (\mathbf{D}_1)_{22} & (\mathbf{D}_1)_{23} & & & & & & & \\
 & (\mathbf{D}_1)_{32} & (\mathbf{D}_1)_{33} & (\mathbf{D}_1)_{34} & & & & & & \\
 & & (\mathbf{D}_1)_{43} & (\mathbf{D}_1)_{44} & (\mathbf{D}_1)_{45} & & & & & \\
 & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & & (\mathbf{D}_1)_{m-1,m-2} & (\mathbf{D}_1)_{m-1,m-1} & (\mathbf{D}_1)_{m-1,m} & & & \\
 & & & & & (\mathbf{D}_1)_{m,m-1} & (\mathbf{D}_1)_{m,m} & 0 & & \\
 & & & & & & 0 & 1 & & 
 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.22})$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{D}_1)_{i,i} &= (\alpha_3)_{i,2} + (\alpha_{11})_{i,2}\beta_1 \text{ dla } i = 2, 3, 4, \dots, m, \\
 (\mathbf{D}_1)_{i,i+1} &= (\alpha_8)_{i,2} + (\alpha_{11})_{i,2}\beta_2 \text{ dla } i = 2, 3, 4, \dots, m-1, \\
 (\mathbf{D}_1)_{i,i-1} &= (\alpha_6)_{i,2} + (\alpha_{11})_{i,2}\beta_2 \text{ dla } i = 3, 4, 5, \dots, m,
 \end{aligned}$$

- macierz  $\mathbf{A}_n$  – poniższy wzór (A.23):

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & & & & & & & \\
 0 & (\mathbf{A}_n)_{22} & (\mathbf{A}_n)_{23} & (\mathbf{A}_n)_{24} & & & & & & \\
 0 & (\mathbf{A}_n)_{32} & (\mathbf{A}_n)_{33} & (\mathbf{A}_n)_{34} & (\mathbf{A}_n)_{35} & & & & & \\
 & (\mathbf{A}_n)_{42} & (\mathbf{A}_n)_{43} & (\mathbf{A}_n)_{44} & (\mathbf{A}_n)_{45} & (\mathbf{A}_n)_{46} & & & & \\
 & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\
 & & & (\mathbf{A}_n)_{m-1,m-3} & (\mathbf{A}_n)_{m-1,m-2} & (\mathbf{A}_n)_{m-1,m-1} & (\mathbf{A}_n)_{m-1,m} & 0 & & \\
 & & & & (\mathbf{A}_n)_{m,m-2} & (\mathbf{A}_n)_{m,m-1} & (\mathbf{A}_n)_{m,m} & 0 & & \\
 & & & & & 0 & 0 & 1 & & 
 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.23})$$





gdzie

$$(\mathbf{E}_{n-1})_{i,i} = (\alpha_{12})_{i,n+1} + (\alpha_{11})_{i,n+1} \text{ dla } i = 2, 3, 4, \dots, m.$$

### Uwaga

W przypadku płyty utwardzonej na dwóch przeciwległych krawędziach należy na nich uwzględnić zerowe kąty obrotu. Oznacza to, że w celu eliminacji ugięć  $w_{0,j}$  oraz  $w_{m+2,j}$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n+1$ ) w punktach fikcyjnych korzysta się z warunku (3.76) i wtedy

$$\begin{aligned} & \text{dla } j = 1, 2, 3, \dots, n+1: \\ & \underline{i=2} \Rightarrow (\alpha_{10})_{2j} w_{0j} = (\alpha_{10})_{2j} w_{2j}, \\ & \underline{i=m} \Rightarrow (\alpha_{13})_{mj} w_{m+2,j} = (\alpha_{13})_{mj} w_{mj}. \end{aligned}$$

Zatem macierze  $\mathbf{A}_j$  przyjmują postacie jak we wzorach (A.18), (A.21), (A.2), (A.23) oraz (A.25) z tą różnicą, że obliczając drugi i przedostatni element przekątnej głównej tych macierzy, współczynniki  $\alpha_{10}$  i  $\alpha_{13}$  należy dodawać zamiast odejmować. W efekcie wyżej zapisanych warunków dla krawędzi utwardzonych zmianie ulegają następujące ugięcia w punktach fikcyjnych:

$$\begin{aligned} w_{10} &= -\overbrace{w_{12}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{11}}^0 + \beta_2 (\overbrace{w_{01}}^{w_{21}} + w_{21}) = 2\beta_2 w_{21}, \\ w_{m+1,0} &= -\overbrace{w_{m+1,2}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{m+1,1}}^0 + \beta_2 (w_{m,1} + \overbrace{w_{m+2,1}}^{w_{m,1}}) = 2\beta_2 w_{m,1}, \\ w_{1,n+2} &= -\overbrace{w_{1,n}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{1,n+1}}^0 + \beta_2 (\overbrace{w_{0,n+1}}^{w_{2,n+1}} + w_{2,n+1}) = 2\beta_2 w_{2,n+1}, \\ w_{m+1,n+2} &= -\overbrace{w_{m+1,n}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{m+1,n+1}}^0 + \beta_2 (w_{m,n+1} + \overbrace{w_{m+2,n+1}}^{w_{m,n+1}}) = 2\beta_2 w_{m,n+1}, \\ w_{2,-1} &= w_{23} - \gamma_1 w_{20} - \gamma_2 w_{21} - \gamma_3 (\overbrace{w_{10}}^0 + w_{30}) - \gamma_4 (\overbrace{w_{11}}^0 + w_{31}) - \gamma_5 (\overbrace{w_{01}}^{w_{21}} + w_{41}) = \\ &= w_{23} + \gamma_1 w_{22} + \varphi'_1 w_{21} + \varphi_2 w_{31} + \gamma_3 w_{32} + \varphi_3 w_{41}, \\ w_{m,-1} &= w_{m,3} - \gamma_1 w_{m,0} - \gamma_2 w_{m,1} - \gamma_3 (w_{m-1,0} + \overbrace{w_{m+1,0}}^0) - \gamma_4 (w_{m-1,1} + \overbrace{w_{m+1,1}}^0) + \\ & - \gamma_5 (w_{m-2,1} + \overbrace{w_{m+2,1}}^{w_{m,1}}) = w_{m,3} + \gamma_1 w_{m,2} + \varphi'_1 w_{m,1} + \varphi_2 w_{m-1,1} + \gamma_3 w_{m-1,2} + \varphi_3 w_{m-2,1}, \\ w_{2,n+3} &= w_{2,n-1} + \gamma_1 w_{2,n} + \gamma_2 w_{2,n+1} + \gamma_3 (\overbrace{w_{1,n}}^0 + w_{3,n}) + \gamma_4 (\overbrace{w_{1,n+1}}^0 + w_{3,n+1}) + \\ & + \gamma_5 (\overbrace{w_{0,n+1}}^{w_{2,n+1}} + w_{4,n+1}) = w_{2,n-1} + \gamma_1 w_{2,n} + (\gamma_2 + \gamma_5) w_{2,n+1} + \gamma_3 w_{3,n} + \gamma_4 w_{3,n+1} + \\ & + \gamma_5 w_{4,n+1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{m,n+3} &= w_{m,n-1} + \gamma_1 w_{m,n} + \gamma_2 w_{m,n+1} + \gamma_3 (w_{m-1,n} + \overbrace{w_{m+1,n}}^0) + \\
&+ \gamma_4 (w_{m-1,n+1} + \overbrace{w_{m+1,n+1}}^0) + \gamma_5 (w_{m-2,n+1} + \overbrace{w_{m+2,n+1}}^{w_{m,n+1}}) = w_{m,n-1} + \gamma_1 w_{m,n} + \\
&+ (\gamma_2 + \gamma_5) w_{m,n+1} + \gamma_3 w_{m-1,n} + \gamma_4 w_{m-1,n+1} + \gamma_5 w_{m-2,n+1},
\end{aligned}$$

gdzie przyjęto oznaczenie:

$$\varphi'_1 = -(\gamma_2 + \gamma_1 \beta_1 + 3\gamma_3 \beta_2 + \gamma_5). \quad (\text{A.28})$$

Dodatkowe zmiany należy zatem wprowadzić w macierzach  $\mathbf{A}_1$  oraz  $\mathbf{A}_{n+1}$ . Macierz  $\mathbf{A}_1$  określa wzór (A.18) z tą różnicą, że drugi i przedostatni element na jej przekątnej głównej oblicza się zgodnie z poniższym zapisem:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_1)_{22} &= (\alpha_1)_{21} - (\alpha_{10})_{21} + (\alpha_3)_{21} \beta_1 + (\alpha_8)_{21} \beta_2 + (\alpha_{11})_{21} \varphi_1 + 2\beta_2 (\alpha_6)_{21}, \\
(\mathbf{A}_1)_{m,m} &= (\alpha_1)_{m,1} - (\alpha_{13})_{m,1} + (\alpha_3)_{m,1} \beta_1 + (\alpha_6)_{m,1} \beta_2 + (\alpha_{11})_{m,1} \varphi_1 + 2\beta_2 (\alpha_8)_{m,1}.
\end{aligned}$$

Macierz  $\mathbf{A}_{n+1}$  wyrażona jest wzorem (A.25), przy czym zmiany dotyczą drugiego i przedostatniego elementu na przekątnej głównej. Obliczając te elementy, należy skorzystać z następujących wzorów:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_{n+1})_{22} &= (\alpha_1)_{2,n+1} - (\alpha_{10})_{2,n+1} + (\alpha_5)_{2,n+1} \beta_1 + (\alpha_9)_{2,n+1} \beta_2 + 2(\alpha_7)_{2,n+1} \beta_2 + \\
&+ (\alpha_{12})_{2,n+1} (\gamma_2 + \gamma_5), \\
(\mathbf{A}_{n+1})_{m,m} &= (\alpha_1)_{m,n+1} - (\alpha_{13})_{m,n+1} + (\alpha_5)_{m,n+1} \beta_1 + (\alpha_7)_{m,n+1} \beta_2 + 2(\alpha_9)_{m,n+1} \beta_2 + \\
&+ (\alpha_{12})_{m,n+1} (\gamma_2 + \gamma_5).
\end{aligned}$$

### A.3. Płyta utwardzona na jednej krawędzi

W podrozdziale rozważono płytę utwardzoną na lewej krawędzi zgodnie z rysunkiem 3.5c). W sytuacji takiego zamocowania należy wziąć pod uwagę zerowe ugięcia oraz zerowe kąty obrotu  $\varphi_y$  w punktach siatki MRS leżących na lewej krawędzi płyty. Uwzględnia się także dodatkowe warunki dotyczące swobodnych krawędzi: dolnej, górnej i prawej oraz swobodnego naroża prawego.

1. Uwzględnienie zerowych ugięć na lewej krawędzi płyty

- a) Ze wzoru (3.71) wynika, że

$$w_{11} = w_{12} = w_{13} = \dots = w_{1,n+1} = 0. \quad (\text{A.29})$$

- b) We wszystkich macierzach składowych tworzących macierz blokową (3.86) wypełnia się zerami pierwszy wiersz i pierwszą kolumnę, a na przekątnej głównej w tym wierszu i kolumnie wstawia się wartość jednostkową.

2. Uwzględnienie zerowych kątów obrotu  $\varphi_y$  na lewej krawędzi płyty

- a) Zapisując równanie (3.39) dla punktów wewnętrznych płyty, bezpośrednio sąsiadujących z punktami na jej lewej krawędzi ( $i = 2, j = 1, 2, 3, \dots, n+1$ ), należy dokonać niżej zapisanej modyfikacji. Wówczas możliwe jest wyeliminowanie ugięć  $w_{0,j}$  w punktach fikcyjnych leżących na zewnątrz płyty, w bezpośrednim sąsiedztwie jej lewej krawędzi. Skorzystano z warunku (3.76).

$$\begin{aligned} & \text{Dla } j = 1, 2, 3, \dots, n+1: \\ & \underline{i=2} \Rightarrow (\alpha_{10})_{2j} w_{0j} = (\alpha_{10})_{2j} w_{2j}. \end{aligned}$$

- b) Z powyższego zapisu wynika, że macierze-bloki  $\mathbf{A}_j$  składające się na macierz (3.86) należy zmodyfikować tak, aby dla  $j = 1, 2, 3, \dots, n+1$  były wyrażone wzorem ogólnym:

$$\left[ \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_j)_{22} & (\mathbf{A}_j)_{23} & (\mathbf{A}_j)_{24} & & & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{A}_j)_{32} & (\mathbf{A}_j)_{33} & (\mathbf{A}_j)_{34} & (\mathbf{A}_j)_{35} & & & & & & & \\ & (\mathbf{A}_j)_{42} & (\mathbf{A}_j)_{43} & (\mathbf{A}_j)_{44} & (\mathbf{A}_j)_{45} & (\mathbf{A}_j)_{46} & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & (\mathbf{A}_j)_{m-1,m-3} & (\mathbf{A}_j)_{m-1,m-2} & (\mathbf{A}_j)_{m-1,m-1} & (\mathbf{A}_j)_{m-1,m} & (\mathbf{A}_j)_{m-1,m+1} & & & & \\ & & & & (\mathbf{A}_j)_{m,m-2} & (\mathbf{A}_j)_{m,m-1} & (\mathbf{A}_j)_{m,m} & (\mathbf{A}_j)_{m,m+1} & & & & \\ & & & & & (\mathbf{A}_j)_{m+1,m-1} & (\mathbf{A}_j)_{m+1,m} & (\mathbf{A}_j)_{m+1,m+1} & & & & \end{array} \right], \quad (\text{A.30})$$

gdzie

$$(\mathbf{A}_j)_{22} = (\alpha_1 + \alpha_{10})_{2j} \text{ dla } j = 3, 4, 5, \dots, n-1.$$

Wartości pozostałych elementów macierzy  $\mathbf{A}_j$  zależą od indeksu  $j$  i ustala się je na podstawie warunków brzegowych dla swobodnych krawędzi oraz naroży płyty.

## 3. Uwzględnienie swobodnej krawędzi dolnej/górnej

- a) Postępując jak w podrozdziale A.2, w p. 3, eliminuje się z równań (3.39) ugięcia:  $w_{i,0}$ ,  $w_{i,-1}$ ,  $w_{i,n+2}$  i  $w_{i,n+3}$ , odpowiadające punktom fikcyjnym leżącym poniżej dolnej oraz powyżej górnej krawędzi płyty. Należy skorzystać z warunków (3.81) i (3.82).
- b) Przyjęto uproszczony zapis warunków (3.81) i (3.82), zgodnie ze wzorami (A.5) i (A.6) przedstawionymi w podrozdziale A.2.

## 4. Uwzględnienie swobodnej krawędzi prawej

- a) Przy użyciu warunków (3.79) i (3.80) możliwa jest eliminacja z równań (3.39) ugięć  $w_{m+2,j}$  oraz  $w_{m+3,j}$  występujących w punktach fikcyjnych leżących na zewnątrz prawej krawędzi płyty.

b) Przyjęto uproszczony zapis wzorów (3.79) i (3.80), przedstawiony poniżej:

$$w_{i+1,j} = -w_{i-1,j} + \beta'_1 w_{ij} + \beta'_2 (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}), \quad (\text{A.31})$$

$$\begin{aligned} w_{i+2,j} = & w_{i-2,j} + \gamma'_1 w_{i-1,j} + \gamma'_2 w_{ij} + \gamma'_3 (w_{i-1,j-1} + w_{i-1,j+1}) + \\ & + \gamma'_4 (w_{i,j-1} + w_{i,j+1}) + \gamma'_5 (w_{i,j-2} + w_{i,j+2}), \end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

gdzie:

$$\beta'_1 = 2 \left( 1 + \nu \frac{h^2}{k^2} \right), \quad (\text{A.33})$$

$$\beta'_2 = -\nu \frac{h^2}{k^2}, \quad (\text{A.34})$$

$$\gamma'_1 = -4 \left[ 1 + (2 - \nu) \frac{h^2}{k^2} \right], \quad (\text{A.35})$$

$$\gamma'_2 = \left[ 6\nu(2 - \nu) \frac{h^4}{k^4} + 8 \frac{h^2}{k^2} + 4 \right], \quad (\text{A.36})$$

$$\gamma'_3 = 2(2 - \nu) \frac{h^2}{k^2}, \quad (\text{A.37})$$

$$\gamma'_4 = -4 \left[ \frac{h^2}{k^2} + \nu(2 - \nu) \frac{h^4}{k^4} \right], \quad (\text{A.38})$$

$$\gamma'_5 = \nu(2 - \nu) \frac{h^4}{k^4}. \quad (\text{A.39})$$

## 5. Uwzględnienie swobodnego naroża prawego

a) Korzystając z warunku (3.84), dokonuje się eliminacji z równań (3.39) ugięć  $w_{m+2,0}$  oraz  $w_{m+2,n+2}$  w punktach fikcyjnych sąsiadujących ze swobodnymi narożami płyty.

b) Wzór (3.84) można zapisać w następującej postaci:

$$\begin{aligned} w_{i+1,j+1} = & w_{i+1,j-1} + w_{i-1,j+1} - w_{i-1,j-1} = \\ = & -3w_{i-1,j-1} + \beta_1 w_{i-1,j} + \beta'_1 w_{i,j-1} + \beta_2 w_{i-2,j} + \\ & + \beta'_2 w_{i,j-2} + (\beta'_2 + \beta_2) w_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Stosując wzór (A.5), można zapisać zależności pozwalające przedstawić ugięcia  $w_{i,0}$  oraz  $w_{i,n+2}$ , gdzie  $i = 1, 2, 3, \dots, m+1$ , przy pomocy ugięć w punktach mieszczących się w obszarze płyty.

Dla  $j = 1$ :

$$i = \underline{1}: w_{10} = -\overbrace{w_{12}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{11}}^0 + \beta_2 (\overbrace{w_{01}}^{w_{21}} + w_{21}) = 2\beta_2 w_{21},$$

$i = 2, 3, 4, \dots, m-1$ : wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$$\underline{i = m}: \quad w_{m,0} = -w_{m,2} + \beta_1 w_{m,1} + \beta_2 (w_{m-1,1} + w_{m+1,1}), \quad (\text{A.41})$$

$$\underline{i = m+1}: \quad w_{m+1,0} = -w_{m+1,2} + \beta_1 w_{m+1,1} + \beta_2 (w_{m,1} + \underline{w_{m+2,1}}). \quad (\text{A.42})$$

Dla  $j = n+1$ :

$$\underline{i = 1}: \quad w_{1,n+2} = -\overbrace{w_{1,n}}^0 + \beta_1 \overbrace{w_{1,n+1}}^0 + \beta_2 (\overbrace{w_{0,n+1}}^{w_{2,n+1}} + w_{2,n+1}) = 2\beta_2 w_{2,n+1},$$

$i = 2, 3, 4, \dots, m-1$ : wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$$\underline{i = m}: \quad w_{m,n+2} = -w_{m,n} + \beta_1 w_{m,n+1} + \beta_2 (w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1}), \quad (\text{A.43})$$

$i = m+1$ :

$$w_{m+1,n+2} = -w_{m+1,n} + \beta_1 w_{m+1,n+1} + \beta_2 (w_{m,n+1} + \underline{w_{m+2,n+1}}). \quad (\text{A.44})$$

Analogiczne postępowanie jak wyżej przeprowadza się w odniesieniu do ugięć  $w_{i,-1}$  oraz  $w_{i,n+3}$ , gdzie  $i = 2, 3, 4, \dots, m+1$ . Należy wówczas użyć wzoru (A.6).

Dla  $j = 1$ :

$i = 2$ :

$$\begin{aligned} w_{2,-1} &= w_{23} - \gamma_1 w_{20} - \gamma_2 w_{21} - \gamma_3 (\overbrace{w_{10}}^0 + w_{30}) - \gamma_4 (\overbrace{w_{11}}^0 + w_{31}) - \gamma_5 (\overbrace{w_{01}}^{w_{21}} + w_{41}) = \\ &= w_{23} + \gamma_1 w_{22} + \varphi_1' w_{21} + \varphi_2 w_{31} + \gamma_3 w_{32} + \varphi_3 w_{41}, \end{aligned}$$

$i = 3, 4, 5, \dots, m-2$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m-1$ :

$$\begin{aligned} w_{m-1,-1} &= w_{m-1,3} - \gamma_1 w_{m-1,0} - \gamma_2 w_{m-1,1} - \gamma_3 (w_{m-2,0} + w_{m,0}) + \\ &- \gamma_4 (w_{m-2,1} + w_{m,1}) - \gamma_5 (w_{m-3,1} + w_{m+1,1}) = w_{m-1,3} + \gamma_1 w_{m-1,2} + \varphi_4 w_{m-1,1} + \\ &+ \varphi_2 (w_{m-2,1} + w_{m,1}) + \gamma_3 (w_{m-2,2} + w_{m,2}) + \varphi_3 (w_{m-3,1} + w_{m+1,1}), \end{aligned}$$

$i = m$ :

$$\begin{aligned} w_{m,-1} &= w_{m,3} - \gamma_1 w_{m,0} - \gamma_2 w_{m,1} - \gamma_3 (w_{m-1,0} + w_{m+1,0}) + \\ &- \gamma_4 (w_{m-1,1} + w_{m+1,1}) - \gamma_5 (w_{m-2,1} + w_{m+2,1}) = w_{m,3} + \gamma_1 w_{m,2} + \\ &+ \varphi_4 w_{m,1} + \varphi_2 (w_{m-1,1} + w_{m+1,1}) + \gamma_3 (w_{m-1,2} + w_{m+1,2}) + \\ &+ \varphi_3 (w_{m-2,1} + \underline{w_{m+2,1}}), \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

$i = m+1$ :

$$\begin{aligned} w_{m+1,-1} &= w_{m+1,3} - \gamma_1 w_{m+1,0} - \gamma_2 w_{m+1,1} - \gamma_3 (w_{m,0} + w_{m+2,0}) + \\ &- \gamma_4 (w_{m,1} + w_{m+2,1}) - \gamma_5 (w_{m-1,1} + w_{m+3,1}) = w_{m+1,3} + \gamma_1 w_{m+1,2} + \\ &+ \varphi_4 w_{m+1,1} + \varphi_2 (w_{m,1} + \underline{w_{m+2,1}}) + \gamma_3 (w_{m,2} + \underline{w_{m+2,2}}) + \\ &+ \varphi_3 (w_{m-1,1} + \underline{w_{m+3,1}}). \end{aligned} \quad (\text{A.46})$$

Dla  $j = n + 1$ :

$i = 2$ :

$$\begin{aligned} w_{2,n+3} &= w_{2,n-1} + \gamma_1 w_{2,n} + \gamma_2 w_{2,n+1} + \gamma_3 (\overbrace{w_{1,n}}^0 + w_{3,n}) + \gamma_4 (\overbrace{w_{1,n+1}}^0 + w_{3,n+1}) + \\ &+ \gamma_5 (\overbrace{w_{0,n+1}}^{w_{2,n+1}} + w_{4,n+1}) = w_{2,n-1} + \gamma_1 w_{2,n} + (\gamma_2 + \gamma_5) w_{2,n+1} + \gamma_3 w_{3,n} + \\ &+ \gamma_4 w_{3,n+1} + \gamma_5 w_{4,n+1}, \end{aligned}$$

$i = 3, 4, 5, \dots, m - 2$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m - 1$ :

$$\begin{aligned} w_{m-1,n+3} &= w_{m-1,n-1} + \gamma_1 w_{m-1,n} + \gamma_2 w_{m-1,n+1} + \gamma_3 (w_{m-2,n} + w_{m,n}) + \\ &+ \gamma_4 (w_{m-2,n+1} + w_{m,n+1}) + \gamma_5 (w_{m-3,n+1} + w_{m+1,n+1}), \end{aligned}$$

$i = m$ :

$$\begin{aligned} w_{m,n+3} &= w_{m,n-1} + \gamma_1 w_{m,n} + \gamma_2 w_{m,n+1} + \gamma_3 (w_{m-1,n} + w_{m+1,n}) + \\ &+ \gamma_4 (w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1}) + \gamma_5 (w_{m-2,n+1} + \underline{w_{m+2,n+1}}), \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

$i = m + 1$ :

$$\begin{aligned} w_{m+1,n+3} &= w_{m+1,n-1} + \gamma_1 w_{m+1,n} + \gamma_2 w_{m+1,n+1} + \gamma_3 (w_{m,n} + \underline{w_{m+2,n}}) + \\ &+ \gamma_4 (w_{m,n+1} + \underline{w_{m+2,n+1}}) + \gamma_5 (w_{m-1,n+1} + \underline{w_{m+3,n+1}}). \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Aby odpowiednio zapisać ugięcia  $w_{m+2,j}$  oraz  $w_{m+3,j}$  występujące w punktach fikcyjnych, gdzie  $j = 1, 2, 3, \dots, n + 1$ , należy wykorzystać wzory (A.31) oraz (A.32).

Dla  $i = m + 1$ :

$$\underline{j = 1}: w_{m+2,1} = -w_{m,1} + \beta'_1 w_{m+1,1} + \beta'_2 (\underline{w_{m+1,0}} + w_{m+1,2}), \quad (\text{A.49})$$

$$\underline{j = 2}: w_{m+2,2} = -w_{m,2} + \beta'_1 w_{m+1,2} + \beta'_2 (w_{m+1,1} + w_{m+1,3}), \quad (\text{A.50})$$

$$\underline{j = 3}: w_{m+2,3} = -w_{m,3} + \beta'_1 w_{m+1,3} + \beta'_2 (w_{m+1,2} + w_{m+1,4}),$$

$\vdots$

$j = n - 1$ :

$$w_{m+2,n-1} = -w_{m,n-1} + \beta'_1 w_{m+1,n-1} + \beta'_2 (w_{m+1,n-2} + w_{m+1,n}),$$

$j = n$ :

$$w_{m+2,n} = -w_{m,n} + \beta'_1 w_{m+1,n} + \beta'_2 (w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}), \quad (\text{A.51})$$

$j = n + 1$ :

$$w_{m+2,n+1} = -w_{m,n+1} + \beta'_1 w_{m+1,n+1} + \beta'_2 (w_{m+1,n} + \underline{w_{m+1,n+2}}). \quad (\text{A.52})$$

Dla  $i = m + 1$ :

$j = 1$ :

$$w_{m+3,1} = w_{m-1,1} + \gamma'_1 w_{m,1} + \gamma'_2 w_{m+1,1} + \gamma'_3 (\underline{w_{m,0}} + w_{m,2}) + \\ + \gamma'_4 (\underline{w_{m+1,0}} + w_{m+1,2}) + \gamma'_5 (\underline{w_{m+1,-1}} + w_{m+1,3}), \quad (\text{A.53})$$

$j = 2$ :

$$w_{m+3,2} = w_{m-1,2} + \gamma'_1 w_{m,2} + \gamma'_2 w_{m+1,2} + \gamma'_3 (w_{m,1} + w_{m,3}) + \\ + \gamma'_4 (w_{m+1,1} + w_{m+1,3}) + \gamma'_5 (\underline{w_{m+1,0}} + w_{m+1,4}), \quad (\text{A.54})$$

$j = 3$ :

$$w_{m+3,3} = w_{m-1,3} + \gamma'_1 w_{m,3} + \gamma'_2 w_{m+1,3} + \gamma'_3 (w_{m,2} + w_{m,4}) + \\ + \gamma'_4 (w_{m+1,2} + w_{m+1,4}) + \gamma'_5 (w_{m+1,1} + w_{m+1,5}),$$

$\vdots$

$j = n - 1$ :

$$w_{m+3,n-1} = w_{m-1,n-1} + \gamma'_1 w_{m,n-1} + \gamma'_2 w_{m+1,n-1} + \gamma'_3 (w_{m,n-2} + w_{m,n}) + \\ + \gamma'_4 (w_{m+1,n-2} + w_{m+1,n}) + \gamma'_5 (w_{m+1,n-3} + w_{m+1,n+1}),$$

$j = n$ :

$$w_{m+3,n} = w_{m-1,n} + \gamma'_1 w_{m,n} + \gamma'_2 w_{m+1,n} + \gamma'_3 (w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) + \\ + \gamma'_4 (w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}) + \gamma'_5 (w_{m+1,n-2} + \underline{w_{m+1,n+2}}), \quad (\text{A.55})$$

$j = n + 1$ :

$$w_{m+3,n+1} = w_{m-1,n+1} + \gamma'_1 w_{m,n+1} + \gamma'_2 w_{m+1,n+1} + \\ + \gamma'_3 (w_{m,n} + \underline{w_{m,n+2}}) + \gamma'_4 (w_{m+1,n} + \underline{w_{m+1,n+2}}) + \\ + \gamma'_5 (w_{m+1,n-1} + \underline{w_{m+1,n+3}}). \quad (\text{A.56})$$

Ugięcia  $w_{m+2,0}$  oraz  $w_{m+2,n+2}$  występujące w punktach fikcyjnych przynaroznych zapisuje się przy pomocy ugięć w obrębie płyty, stosując wzór (A.40).

Dla  $i = m + 1$ :

$j = 1$ :

$$w_{m+2,0} = w_{m+2,2} - w_{m,2} + w_{m,0} = -3w_{m,2} + \beta_1 w_{m,1} + \beta'_1 w_{m+1,2} + \beta_2 w_{m-1,1} + \\ + \beta'_2 w_{m+1,3} + (\beta'_2 + \beta_2) w_{m+1,1},$$

$j = n + 1$ :

$$w_{m+2,n+2} = w_{m+2,n} - w_{m,n} + w_{m,n+2} = -3w_{m,n} + \beta_1 w_{m,n+1} + \beta'_1 w_{m+1,n} + \\ + \beta_2 w_{m-1,n+1} + \beta'_2 w_{m+1,n-1} + (\beta'_2 + \beta_2) w_{m+1,n+1}.$$

Część z zapisanych wyżej wzorów wymaga modyfikacji, ponieważ występują w nich ugięcia w punktach fikcyjnych, które należy wyeliminować. Zostały one w powyższych wzorach podkreślone.

- We wzorze (A.42) w miejsce podkreślonego ugięcia fikcyjnego  $w_{m+2,1}$  należy podstawić wzór (A.49). Otrzymuje się wówczas:

$$w_{m+1,0} = -w_{m+1,2} + \beta_1 w_{m+1,1} + \beta_2 [w_{m,1} - w_{m,1} + \beta'_1 w_{m+1,1} + \beta'_2 (w_{m+1,0} + w_{m+1,2})].$$

Stąd wynika, że

$$w_{m+1,0} = \varphi_5 w_{m+1,1} - w_{m+1,2}, \quad (\text{A.57})$$

gdzie

$$\varphi_5 = \frac{\beta_1 + \beta_2 \beta'_1}{1 - \beta_2 \beta'_2}. \quad (\text{A.58})$$

- Wyżej wyznaczony wzór (A.57) należy podstawić do wzoru (A.49), aby wyeliminować ugięcie  $w_{m+1,0}$ . Wtedy przemieszczenie  $w_{m+2,1}$  można zapisać następująco:

$$\begin{aligned} w_{m+2,1} &= -w_{m,1} + \beta'_1 w_{m+1,1} + \beta'_2 (\varphi_5 w_{m+1,1} - w_{m+1,2} + w_{m+1,2}) = \\ &= -w_{m,1} + \varphi'_5 w_{m+1,1}, \end{aligned} \quad (\text{A.59})$$

gdzie

$$\varphi'_5 = \frac{\beta'_1 + \beta'_2 \beta_1}{1 - \beta_2 \beta'_2}. \quad (\text{A.60})$$

- W celu eliminacji we wzorze (A.44) podkreślonego ugięcia  $w_{m+2,n+1}$  należy użyć wzoru (A.52). Otrzymuje się wtedy:

$$\begin{aligned} w_{m+1,n+2} &= -w_{m+1,n} + \beta_1 w_{m+1,n+1} + \\ &+ \beta_2 [w_{m,n+1} - w_{m,n+1} + \beta'_1 w_{m+1,n+1} + \beta'_2 (w_{m+1,n} + w_{m+1,n+2})] \end{aligned}$$

i następnie wyznacza się przemieszczenie  $w_{m+1,n+2}$ , którego postać podano poniżej:

$$w_{m+1,n+2} = \varphi_5 w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n}. \quad (\text{A.61})$$

- Do wzoru (A.52) należy zastosować powyższy wzór (A.61), podstawiając go w miejsce podkreślonego ugięcia  $w_{m+1,n+2}$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} w_{m+2,n+1} &= -w_{m,n+1} + \beta'_1 w_{m+1,n+1} + \\ &+ \beta'_2 (\varphi_5 w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n} + w_{m+1,n}) = -w_{m,n+1} + \varphi'_5 w_{m+1,n+1}. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

- We wzorze (A.47) należy wyeliminować podkreślone ugięcie  $w_{m+2,n+1}$  przez podstawienie wzoru (A.62). Otrzymuje się wtedy:

$$\begin{aligned}
w_{m,n+3} &= w_{m,n-1} + \gamma_1 w_{m,n} + \gamma_3(w_{m-1,n} + w_{m+1,n}) + \gamma_2 w_{m,n+1} + \\
&+ \gamma_4(w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1}) + \gamma_5(w_{m-2,n+1} - w_{m,n+1} + \varphi'_5 w_{m+1,n+1}) = \\
&= w_{m,n-1} + \gamma_1 w_{m,n} + \gamma_3(w_{m-1,n} + w_{m+1,n}) + (\gamma_2 - \gamma_5)w_{m,n+1} + \\
&+ \gamma_4 w_{m-1,n+1} + (\gamma_4 + \gamma_5 \varphi'_5)w_{m+1,n+1} + \gamma_5 w_{m-2,n+1}.
\end{aligned} \tag{A.63}$$

- We wzorze (A.53) w miejsce podkreślonych przemieszczeń:  $w_{m,0}$ ,  $w_{m+1,0}$  oraz  $w_{m+1,-1}$  należy podstawić wzory odpowiednio: (A.41), (A.57) oraz (A.46). Wówczas:

$$\begin{aligned}
w_{m+3,1} &= w_{m-1,1} + \gamma'_1 w_{m,1} + \gamma'_2 w_{m+1,1} + \gamma'_3[-w_{m,2} + \beta_1 w_{m,1} + \\
&+ \beta_2(w_{m-1,1} + w_{m+1,1}) + w_{m,2}] + \gamma'_4(\varphi_5 w_{m+1,1} - w_{m+1,2} + w_{m+1,2}) + \\
&+ \gamma'_5[w_{m+1,3} + \gamma_1 w_{m+1,2} + \varphi_4 w_{m+1,1} + \varphi_2(w_{m,1} + \underline{w_{m+2,1}})] + \\
&+ \gamma_3(w_{m,2} + \underline{w_{m+2,2}}) + \varphi_3(w_{m-1,1} + \underline{w_{m+3,1}}) + w_{m+1,3}.
\end{aligned}$$

W powyższym wzorze eliminuje się podkreślone ugięcia  $w_{m+2,1}$  oraz  $w_{m+2,2}$  przez podstawienie wzorów odpowiednio (A.59) oraz (A.50). Wtedy:

$$\begin{aligned}
w_{m+3,1} &= w_{m-1,1} + \gamma'_1 w_{m,1} + \gamma'_2 w_{m+1,1} + \gamma'_3[-w_{m,2} + \beta_1 w_{m,1} + \\
&+ \beta_2(w_{m-1,1} + w_{m+1,1}) + w_{m,2}] + \gamma'_4(\varphi_5 w_{m+1,1} - w_{m+1,2} + w_{m+1,2}) + \\
&+ \gamma'_5\{w_{m+1,3} + \gamma_1 w_{m+1,2} + \varphi_4 w_{m+1,1} + \varphi_2(w_{m,1} - w_{m,1} + \varphi'_5 w_{m+1,1}) + \\
&+ \gamma_3[w_{m,2} - w_{m,2} + \beta'_1 w_{m+1,2} + \beta'_2(w_{m+1,1} + w_{m+1,3})] + \\
&+ \varphi_3(w_{m-1,1} + \underline{w_{m+3,1}}) + w_{m+1,3}\} = \\
&= (1 + \gamma'_3 \beta_2 + \gamma'_5 \varphi_3)w_{m-1,1} + (\gamma'_1 + \gamma'_3 \beta_1)w_{m,1} + [\gamma'_2 + \gamma'_3 \beta_2 + \\
&+ \gamma'_4 \varphi_5 + \gamma'_5(\varphi_4 + \varphi_2 \varphi'_5 + \gamma_3 \beta'_2)]w_{m+1,1} + \gamma'_5 \varphi_3 \underline{w_{m+3,1}} + \\
&+ \gamma'_5(\gamma_1 + \gamma_3 \beta'_1)w_{m+1,2} + \gamma'_5(\gamma_3 \beta'_2 + 2)w_{m+1,3}.
\end{aligned}$$

Z powyższego wyznacza się przemieszczenie  $w_{m+3,1}$ , otrzymując ostatecznie:

$$w_{m+3,1} = \varphi_{11} w_{m-1,1} + \varphi_{12} w_{m,1} + \varphi_{13} w_{m+1,1} + \varphi_{14} w_{m+1,2} + \varphi_{15} w_{m+1,3}, \tag{A.64}$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$\varphi_{11} = \frac{1 + \gamma'_3 \beta_2 + \gamma'_5 \varphi_3}{1 - \gamma'_5 \varphi_3}, \tag{A.65}$$

$$\varphi_{12} = \frac{\gamma'_1 + \gamma'_3 \beta_1}{1 - \gamma'_5 \varphi_3}, \tag{A.66}$$

$$\varphi_{13} = \frac{\gamma'_2 + \gamma'_3\beta_2 + \gamma'_4\varphi_5 + \gamma'_5(\varphi_4 + \varphi_2\varphi'_5 + \gamma_3\beta'_2)}{1 - \gamma'_5\varphi_3}, \quad (\text{A.67})$$

$$\varphi_{14} = \frac{\gamma'_5(\gamma_1 + \gamma_3\beta'_1)}{1 - \gamma'_5\varphi_3}, \quad (\text{A.68})$$

$$\varphi_{15} = \frac{\gamma'_5(2 + \gamma_3\beta'_2)}{1 - \gamma'_5\varphi_3}. \quad (\text{A.69})$$

- Po podstawieniu wzoru (A.57) do (A.54), w miejsce przemieszczenia  $w_{m+1,0}$ , otrzymuje się:

$$\begin{aligned} w_{m+3,2} &= w_{m-1,2} + \gamma'_1 w_{m,2} + \gamma'_2 w_{m+1,2} + \gamma'_3(w_{m,1} + w_{m,3}) + \\ &+ \gamma'_4(w_{m+1,1} + w_{m+1,3}) + \gamma'_5(\varphi_5 w_{m+1,1} - w_{m+1,2} + w_{m+1,4}) = \\ &= w_{m-1,2} + \gamma'_1 w_{m,2} + \gamma'_2 w_{m+1,2} + \gamma'_3(w_{m,1} + w_{m,3}) + \\ &+ \varphi_{24} w_{m+1,1} + \varphi_{23} w_{m+1,2} + \gamma'_4 w_{m+1,3} + \gamma'_5 w_{m+1,4}, \end{aligned} \quad (\text{A.70})$$

gdzie:

$$\varphi_{23} = \gamma'_2 - \gamma'_5, \quad (\text{A.71})$$

$$\varphi_{24} = \gamma'_4 + \gamma'_5\varphi_5. \quad (\text{A.72})$$

- Podkreślone ugięcie  $w_{m+1,n+2}$  występujące we wzorze (A.55) eliminuje się przy pomocy wzoru (A.61), otrzymując:

$$\begin{aligned} w_{m+3,n} &= w_{m-1,n} + \gamma'_1 w_{m,n} + \gamma'_2 w_{m+1,n} + \gamma'_3(w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) + \\ &+ \gamma'_4(w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1}) + \gamma'_5(w_{m+1,n-2} + \varphi_5 w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n}) = \\ &= w_{m-1,n} + \gamma'_1 w_{m,n} + \varphi_{23} w_{m+1,n} + \gamma'_3(w_{m,n-1} + w_{m,n+1}) + \\ &+ \gamma'_4 w_{m+1,n-1} + \varphi_{24} w_{m+1,n+1} + \gamma'_5 w_{m+1,n-2}. \end{aligned} \quad (\text{A.73})$$

- We wzorze (A.48) w miejsce podkreślonych ugięć  $w_{m+2,n}$ ,  $w_{m+2,n+1}$  oraz  $w_{m+3,n+1}$  podstawia się wzory odpowiednio (A.51), (A.62) oraz (A.56). Wówczas:

$$\begin{aligned} w_{m+1,n+3} &= w_{m+1,n-1} + \gamma_1 w_{m+1,n} + \gamma_2 w_{m+1,n+1} + \\ &+ \gamma_3[w_{m,n} - w_{m,n} + \beta'_1 w_{m+1,n} + \beta'_2(w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1})] + \\ &+ \gamma_4(w_{m,n+1} - w_{m,n+1} + \varphi'_5 w_{m+1,n+1}) + \\ &+ \gamma_5[w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n+1} + \gamma'_1 w_{m,n+1} + \gamma'_2 w_{m+1,n+1} + \gamma'_3(w_{m,n} + \underline{w_{m,n+2}}) + \\ &+ \gamma'_4(w_{m+1,n} + \underline{w_{m+1,n+2}}) + \gamma'_5(w_{m+1,n-1} + \underline{w_{m+1,n+3}})]. \end{aligned}$$

Po dalszym rozwinięciu powyższego wzoru, przez wstawienie w nim zamiast podkreślonych przemieszczeń  $w_{m,n+2}$  oraz  $w_{m+1,n+2}$  wzorów odpowiednio (A.43) oraz (A.61), uzyskuje się następującą jego postać:

$$\begin{aligned} w_{m+1,n+3} = & w_{m+1,n-1} + \gamma_1 w_{m+1,n} + \gamma_2 w_{m+1,n+1} + \\ & + \gamma_3 [w_{m,n} - w_{m,n} + \beta'_1 w_{m+1,n} + \beta'_2 (w_{m+1,n-1} + w_{m+1,n+1})] + \\ & + \gamma_4 (w_{m,n+1} - w_{m,n+1} + \varphi'_5 w_{m+1,n+1}) + \\ & + \gamma_5 \{w_{m-1,n+1} + w_{m-1,n+1} + \gamma'_1 w_{m,n+1} + \gamma'_2 w_{m+1,n+1} + \\ & + \gamma'_3 [w_{m,n} - w_{m,n} + \beta_1 w_{m,n+1} + \beta_2 (w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1})] + \\ & + \gamma'_4 (w_{m+1,n} + \varphi_5 w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n}) + \gamma'_5 (w_{m+1,n-1} + \underline{w_{m+1,n+3}})\}. \end{aligned}$$

Po wyznaczeniu przemieszczenia  $w_{m+1,n+3}$  otrzymuje się następujący wzór:

$$\begin{aligned} w_{m+1,n+3} = & \varphi_6 w_{m+1,n-1} + \varphi_7 w_{m+1,n} + \varphi_8 w_{m+1,n+1} + \\ & + \varphi_9 w_{m-1,n+1} + \varphi_{10} w_{m,n+1}, \end{aligned} \quad (\text{A.74})$$

gdzie użyto oznaczeń:

$$\varphi_6 = \frac{1 + \gamma_3 \beta'_2 + \gamma_5 \gamma'_5}{1 - \gamma_5 \gamma'_5}, \quad (\text{A.75})$$

$$\varphi_7 = \frac{\gamma_1 + \gamma_3 \beta'_1}{1 - \gamma_5 \gamma'_5}, \quad (\text{A.76})$$

$$\varphi_8 = \frac{\gamma_3 \beta'_2 + \gamma_2 + \gamma_4 \varphi'_5 + \gamma_5 \gamma'_2 + \gamma_5 \gamma'_3 \beta_2 + \gamma_5 \gamma'_4 \varphi_5}{1 - \gamma_5 \gamma'_5}, \quad (\text{A.77})$$

$$\varphi_9 = \frac{\gamma_5 (2 + \gamma'_3 \beta_2)}{1 - \gamma_5 \gamma'_5}, \quad (\text{A.78})$$

$$\varphi_{10} = \frac{\gamma_5 (\gamma'_1 + \gamma'_3 \beta_1)}{1 - \gamma_5 \gamma'_5}. \quad (\text{A.79})$$

- Podkreślone ugięcia:  $w_{m,n+2}$ ,  $w_{m+1,n+2}$  oraz  $w_{m+1,n+3}$  występujące we wzorze (A.56) eliminuje się, stosując wzory odpowiednio: (A.43), (A.61) oraz (A.74). Otrzymuje się wówczas:

$$\begin{aligned} w_{m+3,n+1} = & w_{m-1,n+1} + \gamma'_1 w_{m,n+1} + \gamma'_2 w_{m+1,n+1} + \\ & + \gamma'_3 [w_{m,n} - w_{m,n} + \beta_1 w_{m,n+1} + \beta_2 (w_{m-1,n+1} + w_{m+1,n+1})] + \\ & + \gamma'_4 (w_{m+1,n} + \varphi_5 w_{m+1,n+1} - w_{m+1,n}) + \gamma'_5 (w_{m+1,n-1} + \varphi_6 w_{m+1,n-1} + \\ & + \varphi_7 w_{m+1,n} + \varphi_8 w_{m+1,n+1} + \varphi_9 w_{m-1,n+1} + \varphi_{10} w_{m,n+1}). \end{aligned}$$

Powyższy wzór można zapisać w następującej, uproszczonej formie:

$$\begin{aligned} w_{m+3,n+1} = & \varphi'_9 w_{m-1,n+1} + \varphi'_{10} w_{m,n+1} + \varphi'_8 w_{m+1,n+1} + \\ & + \varphi'_6 w_{m+1,n-1} + \varphi'_7 w_{m+1,n}, \end{aligned} \quad (\text{A.80})$$

gdzie przyjęto oznaczenia:

$$\varphi'_6 = \gamma'_5(1 + \varphi_6), \quad (\text{A.81})$$

$$\varphi'_7 = \gamma'_5\varphi_7, \quad (\text{A.82})$$

$$\varphi'_8 = \gamma'_2 + \gamma'_3\beta_2 + \gamma'_4\varphi_5 + \gamma'_5\varphi_8, \quad (\text{A.83})$$

$$\varphi'_9 = 1 + \gamma'_3\beta_2 + \gamma'_5\varphi_9, \quad (\text{A.84})$$

$$\varphi'_{10} = \gamma'_1 + \gamma'_3\beta_1 + \gamma'_5\varphi_{10}. \quad (\text{A.85})$$

- W miejsce podkreślonego przemieszczenia  $w_{m+2,1}$  we wzorze (A.45) należy podstawić wzór (A.59), otrzymując:

$$\begin{aligned} w_{m,-1} &= w_{m,3} + \gamma_1 w_{m,2} + \varphi_4 w_{m,1} + \varphi_2(w_{m-1,1} + w_{m+1,1}) + \\ &+ \gamma_3(w_{m-1,2} + w_{m+1,2}) + \varphi_3(w_{m-2,1} - w_{m,1} + \varphi'_5 w_{m+1,1}) = \\ &= \varphi_3 w_{m-2,1} + \varphi_2 w_{m-1,1} + \varphi_{16} w_{m,1} + \varphi_{17} w_{m+1,1} + \\ &+ \gamma_3(w_{m-1,2} + w_{m+1,2}) + \gamma_1 w_{m,2} + w_{m,3}, \end{aligned} \quad (\text{A.86})$$

gdzie:

$$\varphi_{16} = \varphi_4 - \varphi_3, \quad (\text{A.87})$$

$$\varphi_{17} = \varphi_2 + \varphi_3\varphi'_5. \quad (\text{A.88})$$

- We wzorze (A.46) należy wyeliminować ugięcia:  $w_{m+2,1}$ ,  $w_{m+2,2}$  oraz  $w_{m+3,1}$  przez podstawienie wzorów odpowiednio: (A.59), (A.50) oraz (A.64). Otrzymuje się wtedy:

$$\begin{aligned} w_{m+1,-1} &= w_{m+1,3} + \gamma_1 w_{m+1,2} + \varphi_4 w_{m+1,1} + \\ &+ \varphi_2(w_{m,1} - w_{m,1} + \varphi'_5 w_{m+1,1}) + \\ &+ \gamma_3[w_{m,2} - w_{m,2} + \beta'_1 w_{m+1,2} + \beta'_2(w_{m+1,1} + w_{m+1,3})] + \\ &+ \varphi_3(w_{m-1,1} + \varphi_{11} w_{m-1,1} + \varphi_{12} w_{m,1} + \\ &+ \varphi_{13} w_{m+1,1} + \varphi_{14} w_{m+1,2} + \varphi_{15} w_{m+1,3}) = \\ &= \varphi_{18} w_{m-1,1} + \varphi_{19} w_{m,1} + \varphi_{20} w_{m+1,1} + \varphi_{21} w_{m+1,2} + \varphi_{22} w_{m+1,3}, \end{aligned} \quad (\text{A.89})$$

gdzie zastosowano oznaczenia:

$$\varphi_{18} = \varphi_3(1 + \varphi_{11}), \quad (\text{A.90})$$

$$\varphi_{19} = \varphi_3\varphi_{12}, \quad (\text{A.91})$$

$$\varphi_{20} = \varphi_4 + \varphi_3\varphi_{13} + \gamma_3\beta'_2 + \varphi_2\varphi'_5, \quad (\text{A.92})$$

$$\varphi_{21} = \varphi_3\varphi_{14} + \gamma_1 + \gamma_3\beta'_1, \quad (\text{A.93})$$

$$\varphi_{22} = \varphi_3\varphi_{15} + \gamma_3\beta'_2 + 1. \quad (\text{A.94})$$

Wyżej wyprowadzone wzory umożliwiają przedstawienie ugięć w punktach fikcyjnych jako liniową kombinację przemieszczeń punktów mieszczących się w obrębie płyty. Na ich podstawie można następnie zapisać zmodyfikowane postacie macierzy-bloków składających się na macierz  $\Delta$ , której strukturę wyraża wzór (3.86).

Poniżej zestawiono poszczególne elementy macierzy  $\mathbf{A}_j$  określonej wzorem (A.30).

Dla  $j = 1$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{A}_1)_{22} = (\alpha_1)_{21} + (\alpha_{10})_{21} + 2\beta_2(\alpha_6)_{21} + \beta_1(\alpha_3)_{21} + \beta_2(\alpha_8)_{21} + \varphi'_1(\alpha_{11})_{21},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{23} = (\alpha_4)_{21} + \beta_2(\alpha_3)_{21} + \beta_1(\alpha_8)_{21} + \varphi_2(\alpha_{11})_{21},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{24} = (\alpha_{13})_{21} + \beta_2(\alpha_8)_{21} + \varphi_3(\alpha_{11})_{21},$$

$i = 3$ :

$$(\mathbf{A}_1)_{32} = (\alpha_2)_{31} + \beta_2(\alpha_3)_{31} + \beta_1(\alpha_6)_{31} + \varphi_2(\alpha_{11})_{31},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{33} = (\alpha_1)_{31} + \beta_2(\alpha_6)_{31} + \beta_1(\alpha_3)_{31} + \beta_2(\alpha_8)_{31} + \varphi_4(\alpha_{11})_{31},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{34} = (\alpha_4)_{31} + \beta_2(\alpha_3)_{31} + \beta_1(\alpha_8)_{31} + \varphi_2(\alpha_{11})_{31},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{35} = (\alpha_{13})_{31} + \beta_2(\alpha_8)_{31} + \varphi_3(\alpha_{11})_{31},$$

$i = 4, 5, 6, \dots, m-2$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m-1$ :

$$(\mathbf{A}_1)_{m-1,m-3} = (\alpha_{10})_{m-1,1} + \beta_2(\alpha_6)_{m-1,1} + \varphi_3(\alpha_{11})_{m-1,1},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m-1,m-2} = (\alpha_2)_{m-1,1} + \beta_2(\alpha_3)_{m-1,1} + \beta_1(\alpha_6)_{m-1,1} + \varphi_2(\alpha_{11})_{m-1,1},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m-1,m-1} = (\alpha_1)_{m-1,1} + \beta_2(\alpha_6)_{m-1,1} + \beta_1(\alpha_3)_{m-1,1} + \beta_2(\alpha_8)_{m-1,1} + \varphi_4(\alpha_{11})_{m-1,1},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m-1,m} = (\alpha_4)_{m-1,1} + \beta_2(\alpha_3)_{m-1,1} + \beta_1(\alpha_8)_{m-1,1} + \varphi_2(\alpha_{11})_{m-1,1},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m-1,m+1} = (\alpha_{13})_{m-1,1} + \beta_2(\alpha_8)_{m-1,1} + \varphi_3(\alpha_{11})_{m-1,1},$$

$i = m$ :

$$(\mathbf{A}_1)_{m,m-2} = (\alpha_{10})_{m,1} + \beta_2(\alpha_6)_{m,1} + \varphi_3(\alpha_{11})_{m,1},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m,m-1} = (\alpha_2)_{m,1} + \beta_2(\alpha_3)_{m,1} + \beta_1(\alpha_6)_{m,1} + \varphi_2(\alpha_{11})_{m,1},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m,m} = (\alpha_1)_{m,1} + \beta_2(\alpha_6)_{m,1} + \beta_1(\alpha_3)_{m,1} + \varphi_{16}(\alpha_{11})_{m,1} - (\alpha_{13})_{m,1},$$

$$(\mathbf{A}_1)_{m,m+1} = (\alpha_4)_{m,1} + \beta_2(\alpha_3)_{m,1} + \varphi_5(\alpha_8)_{m,1} + \varphi_{17}(\alpha_{11})_{m,1} + \varphi'_5(\alpha_{13})_{m,1},$$

$i = m+1$ :

$$(\mathbf{A}_1)_{m+1,m-1} = (\alpha_{10})_{m+1,1} + \beta_2(\alpha_6)_{m+1,1} + \beta_2(\alpha_8)_{m+1,1} + \varphi_{18}(\alpha_{11})_{m+1,1} +$$

$$+ \varphi_{11}(\alpha_{13})_{m+1,1},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_1)_{m+1,m} &= (\alpha_2)_{m+1,1} + \beta_1(\alpha_6)_{m+1,1} + \beta_1(\alpha_8)_{m+1,1} + \varphi_{19}(\alpha_{11})_{m+1,1} + \\
&+ \varphi_{12}(\alpha_{13})_{m+1,1} - (\alpha_4)_{m+1,1}, \\
(\mathbf{A}_1)_{m+1,m+1} &= (\alpha_1)_{m+1,1} + \beta_2(\alpha_6)_{m+1,1} + \varphi_5(\alpha_3)_{m+1,1} + (\beta_2 + \beta'_2)(\alpha_8)_{m+1,1} + \\
&+ \beta'_2(\alpha_9)_{m+1,1} + \varphi_{20}(\alpha_{11})_{m+1,1} + \varphi'_5(\alpha_4)_{m+1,1} + \varphi_{13}(\alpha_{13})_{m+1,1}.
\end{aligned}$$

Dla  $j = 2$ :

$i = 2$ :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_2)_{22} &= (\alpha_1 + \alpha_{10} - \alpha_{11})_{22}, \\
(\mathbf{A}_2)_{23} &= (\alpha_4)_{22}, \\
(\mathbf{A}_2)_{24} &= (\alpha_{13})_{22},
\end{aligned}$$

$i = 3$ :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_2)_{32} &= (\alpha_2)_{32}, \\
(\mathbf{A}_2)_{33} &= (\alpha_1 - \alpha_{11})_{32}, \\
(\mathbf{A}_2)_{34} &= (\alpha_4)_{32}, \\
(\mathbf{A}_2)_{35} &= (\alpha_{13})_{32},
\end{aligned}$$

$i = 4, 5, 6, \dots, m - 2$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m - 1$ :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_2)_{m-1,m-3} &= (\alpha_{10})_{m-1,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m-1,m-2} &= (\alpha_2)_{m-1,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m-1,m-1} &= (\alpha_1 - \alpha_{11})_{m-1,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m-1,m} &= (\alpha_4)_{m-1,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m-1,m+1} &= (\alpha_{13})_{m-1,2},
\end{aligned}$$

$i = m$ :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_2)_{m,m-2} &= (\alpha_{10})_{m,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m,m-1} &= (\alpha_2)_{m,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m,m} &= (\alpha_1 - \alpha_{11} - \alpha_{13})_{m,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m,m+1} &= (\alpha_4)_{m,2} + \beta'_1(\alpha_{13})_{m,2},
\end{aligned}$$

$i = m + 1$ :

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}_2)_{m+1,m-1} &= (\alpha_{10} + \alpha_{13})_{m+1,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m+1,m} &= (\alpha_2 - \alpha_4)_{m+1,2} + \gamma'_1(\alpha_{13})_{m+1,2}, \\
(\mathbf{A}_2)_{m+1,m+1} &= (\alpha_1 - \alpha_{11})_{m+1,2} + \beta'_1(\alpha_4)_{m+1,2} + \beta'_2(\alpha_9)_{m+1,2} + \varphi_{23}(\alpha_{13})_{m+1,2}.
\end{aligned}$$

Dla  $j = 3, 4, 5, \dots, n - 1$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{A}_j)_{22} = (\alpha_1 + \alpha_{10})_{2,j},$$

$$(\mathbf{A}_j)_{23} = (\alpha_4)_{2,j},$$

$$(\mathbf{A}_j)_{24} = (\alpha_{13})_{2,j},$$

$i = 3, 4, 5, \dots, m - 1$ :

elementy macierzy zgodnie ze wzorem (3.87),

$i = m$ :

$$(\mathbf{A}_j)_{m,m-2} = (\alpha_{10})_{m,j},$$

$$(\mathbf{A}_j)_{m,m-1} = (\alpha_2)_{m,j},$$

$$(\mathbf{A}_j)_{m,m} = (\alpha_1 - \alpha_{13})_{m,j},$$

$$(\mathbf{A}_j)_{m,m+1} = (\alpha_4)_{m,j} + \beta'_1(\alpha_{13})_{m,j},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{A}_j)_{m+1,m-1} = (\alpha_{10} + \alpha_{13})_{m+1,j},$$

$$(\mathbf{A}_j)_{m+1,m} = (\alpha_2 - \alpha_4)_{m+1,j} + \gamma'_1(\alpha_{13})_{m+1,j},$$

$$(\mathbf{A}_j)_{m+1,m+1} = (\alpha_1)_{m+1,j} + \beta'_1(\alpha_4)_{m+1,j} + \beta'_2(\alpha_9 + \alpha_8)_{m+1,j} + \gamma'_2(\alpha_{13})_{m+1,j}.$$

Dla  $j = n$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{A}_n)_{22} = (\alpha_1 + \alpha_{10} - \alpha_{12})_{2,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{23} = (\alpha_4)_{2,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{24} = (\alpha_{13})_{2,n},$$

$i = 3$ :

$$(\mathbf{A}_n)_{32} = (\alpha_2)_{3,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{33} = (\alpha_1 - \alpha_{12})_{3,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{34} = (\alpha_4)_{3,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{35} = (\alpha_{13})_{3,n},$$

$i = 4, 5, 6, \dots, m - 2$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m - 1$ :

$$(\mathbf{A}_n)_{m-1,m-3} = (\alpha_{10})_{m-1,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{m-1,m-2} = (\alpha_2)_{m-1,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{m-1,m-1} = (\alpha_1 - \alpha_{11})_{m-1,n},$$

$$(\mathbf{A}_2)_{m-1,m} = (\alpha_4)_{m-1,n},$$

$$(\mathbf{A}_2)_{m-1,m+1} = (\alpha_{13})_{m-1,n},$$

$i = m$ :

$$(\mathbf{A}_n)_{m,m-2} = (\alpha_{10})_{m,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{m,m-1} = (\alpha_2)_{m,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{m,m} = (\alpha_1 - \alpha_{12} - \alpha_{13})_{m,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{m,m+1} = (\alpha_4)_{m,n} + \beta'_1(\alpha_{13})_{m,n},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{A}_n)_{m+1,m-1} = (\alpha_{10} + \alpha_{13})_{m+1,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{m+1,m} = (\alpha_2 - \alpha_4)_{m+1,n} + \gamma'_1(\alpha_{13})_{m+1,n},$$

$$(\mathbf{A}_n)_{m+1,m+1} = (\alpha_1 - \alpha_{12})_{m+1,n} + \beta'_1(\alpha_4)_{m+1,n} + \beta'_2(\alpha_8)_{m+1,n} + \varphi_{23}(\alpha_{13})_{m+1,n}.$$

Dla  $j = n + 1$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{22} = (\alpha_1)_{2,n+1} + (\alpha_{10})_{2,n+1} + 2\beta_2(\alpha_7)_{2,n+1} + \beta_1(\alpha_5)_{2,n+1} + \beta_2(\alpha_9)_{2,n+1} +$$

$$+ (\gamma_2 + \gamma_5)(\alpha_{12})_{2,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{23} = (\alpha_4)_{2,n+1} + \beta_2(\alpha_5)_{2,n+1} + \beta_1(\alpha_9)_{2,n+1} + \gamma_4(\alpha_{12})_{2,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{24} = (\alpha_{13})_{2,n+1} + \beta_2(\alpha_9)_{2,n+1} + \gamma_5(\alpha_{12})_{2,n+1},$$

$i = 3$ :

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{32} = (\alpha_2)_{3,n+1} + \beta_1(\alpha_7)_{3,n+1} + \beta_2(\alpha_5)_{3,n+1} + \gamma_4(\alpha_{12})_{3,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{33} = (\alpha_1)_{3,n+1} + \beta_2(\alpha_7)_{3,n+1} + \beta_1(\alpha_5)_{3,n+1} + \beta_2(\alpha_9)_{3,n+1} + \gamma_2(\alpha_{12})_{3,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{34} = (\alpha_4)_{3,n+1} + \beta_2(\alpha_5)_{3,n+1} + \beta_1(\alpha_9)_{3,n+1} + \gamma_4(\alpha_{12})_{3,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{35} = (\alpha_{13})_{3,n+1} + \beta_2(\alpha_9)_{3,n+1} + \gamma_5(\alpha_{12})_{3,n+1},$$

$i = 4, 5, 6, \dots, m - 2$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m - 1$ :

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m-1,m-3} = (\alpha_{10})_{m-1,n+1} + \beta_2(\alpha_7)_{m-1,n+1} + \gamma_5(\alpha_{12})_{m-1,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m-1,m-2} = (\alpha_2)_{m-1,n+1} + \beta_2(\alpha_5)_{m-1,n+1} + \beta_1(\alpha_7)_{m-1,n+1} + \gamma_4(\alpha_{12})_{m-1,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m-1,m-1} = (\alpha_1)_{m-1,n+1} + \beta_2(\alpha_7)_{m-1,n+1} + \beta_1(\alpha_5)_{m-1,n+1} + \beta_2(\alpha_9)_{m-1,n+1} +$$

$$+ \gamma_2(\alpha_{12})_{m-1,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m-1,m} = (\alpha_4)_{m-1,n+1} + \beta_2(\alpha_5)_{m-1,n+1} + \beta_1(\alpha_9)_{m-1,n+1} + \gamma_4(\alpha_{12})_{m-1,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m-1,m+1} = (\alpha_{13})_{m-1,n+1} + \beta_2(\alpha_9)_{m-1,n+1} + \gamma_5(\alpha_{12})_{m-1,n+1},$$

$i = m$ :

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m,m-2} = (\alpha_{10})_{m,n+1} + \beta_2(\alpha_7)_{m,n+1} + \gamma_5(\alpha_{12})_{m,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m,m-1} = (\alpha_2)_{m,n+1} + \beta_1(\alpha_7)_{m,n+1} + \beta_2(\alpha_5)_{m,n+1} + \gamma_4(\alpha_{12})_{m,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m,m} = (\alpha_1)_{m,n+1} + \beta_2(\alpha_7)_{m,n+1} + \beta_1(\alpha_5)_{m,n+1} + (\gamma_2 - \gamma_5)(\alpha_{12})_{m,n+1} +$$

$$- (\alpha_{13})_{m,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m,m+1} = (\alpha_4)_{m,n+1} + \beta_2(\alpha_5)_{m,n+1} + \varphi_5(\alpha_9)_{m,n+1} + (\gamma_4 + \gamma_5\varphi_5')(\alpha_{12})_{m,n+1} +$$

$$+ \varphi_5'(\alpha_{13})_{m,n+1},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m+1,m-1} = (\alpha_{10})_{m+1,n+1} + \beta_2(\alpha_7)_{m+1,n+1} + \beta_2(\alpha_9)_{m+1,n+1} + \varphi_9(\alpha_{12})_{m+1,n+1} +$$

$$+ \varphi_9'(\alpha_{13})_{m+1,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m+1,m} = (\alpha_2)_{m+1,n+1} + \beta_1(\alpha_7)_{m+1,n+1} + \beta_1(\alpha_9)_{m+1,n+1} + \varphi_{10}(\alpha_{12})_{m+1,n+1} +$$

$$+ \varphi_{10}'(\alpha_{13})_{m+1,n+1} - (\alpha_4)_{m+1,n+1},$$

$$(\mathbf{A}_{n+1})_{m+1,m+1} = (\alpha_1)_{m+1,n+1} + \beta_2(\alpha_7)_{m+1,n+1} + \varphi_5(\alpha_5)_{m+1,n+1} +$$

$$+ (\beta_2 + \beta_2')(\alpha_9)_{m+1,n+1} + \beta_2'(\alpha_8)_{m+1,n+1} + \varphi_5'(\alpha_4)_{m+1,n+1} + \varphi_8(\alpha_{12})_{m+1,n+1} +$$

$$+ \varphi_8'(\alpha_{13})_{m+1,n+1}.$$

Macierze  $\mathbf{B}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n$ ), określone dla płyty utwierdzonej na lewej krawędzi, można wyrazić poniższym wzorem:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{B}_j)_{22} & (\mathbf{B}_j)_{23} & & & & & & & \\ & (\mathbf{B}_j)_{32} & (\mathbf{B}_j)_{33} & (\mathbf{B}_j)_{34} & & & & & & \\ & & (\mathbf{B}_j)_{43} & (\mathbf{B}_j)_{44} & (\mathbf{B}_j)_{45} & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & (\mathbf{B}_j)_{m-1,m-2} & (\mathbf{B}_j)_{m-1,m-1} & (\mathbf{B}_j)_{m-1,m} & & & \\ & & & & & (\mathbf{B}_j)_{m,m-1} & (\mathbf{B}_j)_{m,m} & (\mathbf{B}_j)_{m,m+1} & & \\ & & & & & & (\mathbf{B}_j)_{m+1,m} & (\mathbf{B}_j)_{m+1,m+1} & & \end{bmatrix}. \quad (\text{A.95})$$

Dla  $j = 1$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{B}_1)_{22} = (\alpha_5 - \alpha_3)_{21} + \gamma_1(\alpha_{11})_{21},$$

$$(\mathbf{B}_1)_{23} = (\alpha_9 - \alpha_8)_{21} + \gamma_3(\alpha_{11})_{21},$$

$i = 3$ :

$$(\mathbf{B}_1)_{32} = (\alpha_7 - \alpha_6)_{31} + \gamma_3(\alpha_{11})_{31},$$

$$(\mathbf{B}_1)_{33} = (\alpha_5 - \alpha_3)_{31} + \gamma_1(\alpha_{11})_{31},$$

$$(\mathbf{B}_1)_{34} = (\alpha_9 - \alpha_8)_{31} + \gamma_3(\alpha_{11})_{31},$$

$$\underline{i = 4, 5, 6, \dots, m-1:}$$

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$$\underline{i = m:}$$

$$(\mathbf{B}_1)_{m,m-1} = (\alpha_7 - \alpha_6)_{m,1} + \gamma_3(\alpha_{11})_{m,1},$$

$$(\mathbf{B}_1)_{m,m} = (\alpha_5 - \alpha_3)_{m,1} + \gamma_1(\alpha_{11})_{m,1},$$

$$(\mathbf{B}_1)_{m,m+1} = (\alpha_9 - \alpha_8)_{m,1} + \gamma_3(\alpha_{11})_{m,1},$$

$$\underline{i = m+1:}$$

$$(\mathbf{B}_1)_{m+1,m} = (\alpha_7 - \alpha_6 - 3\alpha_8 - \alpha_9)_{m+1,1},$$

$$(\mathbf{B}_1)_{m+1,m+1} = (\alpha_5 - \alpha_3)_{m+1,1} + \beta'_1(\alpha_8 + \alpha_9)_{m+1,1} + \varphi_{21}(\alpha_{11})_{m+1,1} + \varphi_{14}(\alpha_{13})_{m+1,1}.$$

$$\underline{\underline{\text{Dla } j = 2, 3, 4, \dots, n-1:}}$$

$$\underline{i = 2:}$$

$$(\mathbf{B}_j)_{22} = (\alpha_5)_{2,j},$$

$$(\mathbf{B}_j)_{23} = (\alpha_9)_{2,j},$$

$$\underline{i = 3, 4, 5, \dots, m-1:}$$

elementy macierzy zgodnie ze wzorem (3.88),

$$\underline{i = m:}$$

$$(\mathbf{B}_j)_{m,m-1} = (\alpha_7)_{m,j},$$

$$(\mathbf{B}_j)_{m,m} = (\alpha_5)_{m,j},$$

$$(\mathbf{B}_j)_{m,m+1} = (\alpha_9)_{m,j} + \beta'_2(\alpha_{13})_{m,j},$$

$$\underline{i = m+1:}$$

$$(\mathbf{B}_j)_{m+1,m} = (\alpha_7 - \alpha_9)_{m+1,j} + \gamma'_3(\alpha_{13})_{m+1,j},$$

$$(\mathbf{B}_j)_{m+1,m+1} = (\alpha_5)_{m+1,j} + \beta'_2(\alpha_4)_{m+1,j} + \beta'_1(\alpha_9)_{m+1,j} + \gamma'_4(\alpha_{13})_{m+1,j}.$$

$$\underline{\underline{\text{Dla } j = n:}}$$

$$\underline{i = 2:}$$

$$(\mathbf{B}_n)_{22} = (\alpha_5)_{2,n} + \beta_1(\alpha_{12})_{2,n},$$

$$(\mathbf{B}_n)_{23} = (\alpha_9)_{2,n} + \beta_2(\alpha_{12})_{2,n},$$

$$\underline{i = 3, 4, 5, \dots, m-1:}$$

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m$ :

$$(\mathbf{B}_n)_{m,m-1} = (\alpha_7)_{m,n} + \beta_2(\alpha_{12})_{m,n},$$

$$(\mathbf{B}_n)_{m,m} = (\alpha_5)_{m,n} + \beta_1(\alpha_{12})_{m,n},$$

$$(\mathbf{B}_n)_{m,m+1} = (\alpha_9)_{m,n} + \beta_2(\alpha_{12})_{m,n} + \beta_2'(\alpha_{13})_{m,n},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{B}_n)_{m+1,m} = (\alpha_7 - \alpha_9)_{m+1,n} + \gamma_3'(\alpha_{13})_{m+1,n},$$

$$(\mathbf{B}_n)_{m+1,m+1} = (\alpha_5)_{m+1,n} + \varphi_5(\alpha_{12})_{m+1,n} + \varphi_5'(\alpha_9)_{m+1,n} + \beta_2'(\alpha_4)_{m+1,n} + \varphi_{24}(\alpha_{13})_{m+1,n}.$$

Macierze  $\mathbf{D}_{j-1}$  ( $j = 2, 3, 4, \dots, n+1$ ), z uwzględnieniem analizowanego wspornikowego zamocowania płyty, określa poniższy wzór:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & (\mathbf{D}_j)_{22} & (\mathbf{D}_j)_{23} & & & & & & & & \\ & (\mathbf{D}_j)_{32} & (\mathbf{D}_j)_{33} & (\mathbf{D}_j)_{34} & & & & & & & \\ & & (\mathbf{D}_j)_{43} & (\mathbf{D}_j)_{44} & (\mathbf{D}_j)_{45} & & & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & & (\mathbf{D}_j)_{m-1,m-2} & (\mathbf{D}_j)_{m-1,m-1} & (\mathbf{D}_j)_{m-1,m} & & & & \\ & & & & & (\mathbf{D}_j)_{m,m-1} & (\mathbf{D}_j)_{m,m} & (\mathbf{D}_j)_{m,m+1} & & & \\ & & & & & & (\mathbf{D}_j)_{m+1,m} & (\mathbf{D}_j)_{m+1,m+1} & & & \end{bmatrix}. \quad (\text{A.96})$$

Dla  $j = 2$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{D}_1)_{22} = (\alpha_3)_{22} + \beta_1(\alpha_{11})_{22},$$

$$(\mathbf{D}_1)_{23} = (\alpha_8)_{22} + \beta_2(\alpha_{11})_{22},$$

$i = 3$ :

$$(\mathbf{D}_1)_{32} = (\alpha_6)_{32} + \beta_2(\alpha_{11})_{32},$$

$$(\mathbf{D}_1)_{33} = (\alpha_3)_{32} + \beta_1(\alpha_{11})_{32},$$

$$(\mathbf{D}_1)_{34} = (\alpha_8)_{32} + \beta_2(\alpha_{11})_{32},$$

$i = 4, 5, 6, \dots, m-1$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m$ :

$$(\mathbf{D}_1)_{m,m-1} = (\alpha_6)_{m,2} + \beta_2(\alpha_{11})_{m,2},$$

$$(\mathbf{D}_1)_{m,m} = (\alpha_3)_{m,2} + \beta_1(\alpha_{11})_{m,2},$$

$$(\mathbf{D}_1)_{m,m+1} = (\alpha_8)_{m,2} + \beta_2(\alpha_{11})_{m,2} + \beta_2'(\alpha_{13})_{m,2},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{D}_1)_{m+1,m} = (\alpha_6 - \alpha_8)_{m+1,2} + \gamma'_3(\alpha_{13})_{m+1,2},$$

$$(\mathbf{D}_1)_{m+1,m+1} = (\alpha_3)_{m+1,2} + \beta'_2(\alpha_4)_{m+1,2} + \varphi_5(\alpha_{11})_{m+1,2} + \varphi'_5(\alpha_8)_{m+1,2} + \varphi_{24}(\alpha_{13})_{m+1,2}.$$

Dla  $j = 3, 4, 5, \dots, n$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{D}_{j-1})_{22} = (\alpha_3)_{2,j},$$

$$(\mathbf{D}_{j-1})_{23} = (\alpha_8)_{2,j},$$

$i = 3, 4, 5, \dots, m - 1$ :

elementy macierzy zgodnie ze wzorem (3.90),

$i = m$ :

$$(\mathbf{D}_{j-1})_{m,m-1} = (\alpha_6)_{m,j},$$

$$(\mathbf{D}_{j-1})_{m,m} = (\alpha_3)_{m,j},$$

$$(\mathbf{D}_{j-1})_{m,m+1} = (\alpha_8)_{m,j} + \beta'_2(\alpha_{13})_{m,j},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{D}_{j-1})_{m+1,m} = (\alpha_6 - \alpha_8)_{m+1,j} + \gamma'_3(\alpha_{13})_{m+1,j},$$

$$(\mathbf{D}_{j-1})_{m+1,m+1} = (\alpha_3)_{m+1,j} + \beta'_2(\alpha_4)_{m+1,j} + \beta'_1(\alpha_8)_{m+1,j} + \gamma'_4(\alpha_{13})_{m+1,j}.$$

Dla  $j = n + 1$ :

$i = 2$ :

$$(\mathbf{D}_n)_{22} = (\alpha_5)_{2,n} + \beta_1(\alpha_{12})_{2,n},$$

$$(\mathbf{D}_n)_{23} = (\alpha_9)_{2,n} + \beta_2(\alpha_{12})_{2,n},$$

$i = 3, 4, 5, \dots, m - 1$ :

wzory jak dla płyty analizowanej w podrozdziale A.2,

$i = m$ :

$$(\mathbf{D}_n)_{m,m-1} = (\alpha_6 - \alpha_7)_{m,n+1} + \gamma_3(\alpha_{12})_{m,n+1},$$

$$(\mathbf{D}_n)_{m,m} = (\alpha_3 - \alpha_5)_{m,n+1} + \gamma_1(\alpha_{12})_{m,n+1},$$

$$(\mathbf{D}_n)_{m,m+1} = (\alpha_8 - \alpha_9)_{m,n+1} + \gamma_3(\alpha_{12})_{m,n+1},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{D}_n)_{m+1,m} = (\alpha_6 - \alpha_7)_{m+1,n+1} + \gamma_3(\alpha_{12})_{m+1,n+1},$$

$$(\mathbf{D}_n)_{m+1,m+1} = (\alpha_3 - \alpha_5)_{m+1,n+1} + \beta'_1(\alpha_9 + \alpha_8)_{m+1,n} + \varphi_7(\alpha_{12})_{m+1,n+1} + \varphi'_7(\alpha_{13})_{m+1,n+1}.$$

Macierze  $\mathbf{C}_j$  ( $j = 1, 2, 3, \dots, n-1$ ) w sytuacji utwierdzenia płyty na lewej krawędzi określone są następująco:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & (\mathbf{C}_j)_{22} & & & & & \\ & & (\mathbf{C}_j)_{33} & & & & \\ & & & (\mathbf{C}_j)_{44} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & (\mathbf{C}_j)_{m-1,m-1} & \\ & & & & & & (\mathbf{C}_j)_{m,m} \\ & & & & & & & (\mathbf{C}_j)_{m+1,m+1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.97})$$

Dla  $j = 1$ :

$i = 2, 3, 4, \dots, m$ :

$$(\mathbf{C}_1)_{i,i} = (\alpha_{12} + \alpha_{11})_{i,1},$$

$i = m+1$ :

$$(\mathbf{C}_1)_{m+1,m+1} = (\alpha_{12})_{m+1,1} + \beta'_2(\alpha_8 + \alpha_9)_{m+1,1} + \varphi_{15}(\alpha_{13})_{m+1,1} + \varphi_{22}(\alpha_{11})_{m+1,1}.$$

Dla  $j = 2, 3, 4, \dots, n-1$ :

$i = 2, 3, 4, \dots, m$ :

$$(\mathbf{C}_j)_{i,i} = (\alpha_{12})_{i,j},$$

$i = m+1$ :

$$(\mathbf{C}_j)_{m+1,m+1} = (\alpha_{12})_{m+1,j} + \beta'_2(\alpha_9)_{m+1,j} + \gamma'_5(\alpha_{13})_{m+1,j}.$$

Macierze  $\mathbf{E}_{j-2}$  ( $j = 3, 4, 5, \dots, n+1$ ) w rozważanym przypadku można określić jak niżej:

$$\begin{bmatrix} 1 & & & & & & \\ & (\mathbf{E}_j)_{22} & & & & & \\ & & (\mathbf{E}_j)_{33} & & & & \\ & & & (\mathbf{E}_j)_{44} & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & (\mathbf{E}_j)_{m-1,m-1} & \\ & & & & & & (\mathbf{E}_j)_{m,m} \\ & & & & & & & (\mathbf{E}_j)_{m+1,m+1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.98})$$

Dla  $j = 3, 4, 5, \dots, n$ :

$i = 2, 3, 4, \dots, m$ :

$$(\mathbf{E}_{j-2})_{i,i} = (\alpha_{11})_{i,j},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{E}_{j-2})_{m+1,m+1} = (\alpha_{11})_{m+1,j} + \beta'_2(\alpha_8)_{m+1,j} + \gamma'_5(\alpha_{13})_{m+1,j}.$$

Dla  $j = n + 1$ :

$i = 2, 3, 4, \dots, m$ :

$$(\mathbf{E}_{n-1})_{i,i} = (\alpha_{11} + \alpha_{12})_{i,j},$$

$i = m + 1$ :

$$(\mathbf{E}_{n-1})_{m+1,m+1} = (\alpha_{11})_{m+1,n+1} + \beta'_2(\alpha_9 + \alpha_8)_{m+1,n+1} + \varphi'_6(\alpha_{13})_{m+1,n+1} + \\ + \varphi_6(\alpha_{12})_{m+1,n+1}.$$

W poniższym przykładzie opisano sposób wyznaczania wybranych elementów wyżej określonych macierzy-bloków, tworzących macierz  $\Delta$  układu równań (3.85), uwzględniając warunki brzegowe analizowanej płyty.

**Przykład A.1.** *Wyznaczanie elementów macierzy operatorów różnicowych płyty z uwzględnieniem jej warunków zamocowania*

Przedmiotem rozważań w niniejszym przykładzie jest wspornikowa płyta prostokątna, utwardzona przy lewej krawędzi. Na płytę nałożono regularną siatkę MRS w sposób pokazany na rysunku 3.4. Należy wyznaczyć niezerowe elementy drugiego wiersza macierzy  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  oraz  $\mathbf{C}_1$ , które wchodzi w skład macierzy  $\Delta$  o strukturze blokowej określonej wzorem (3.86). Są to więc elementy:

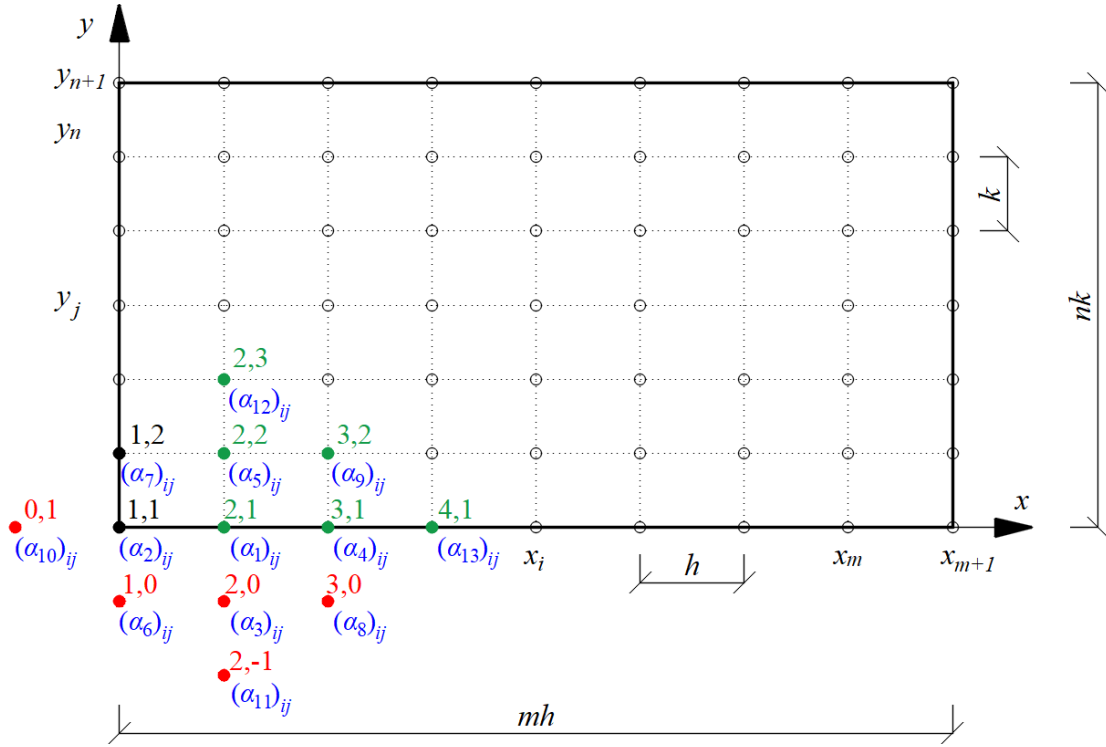
- $(\mathbf{A}_1)_{22}$ ,  $(\mathbf{A}_1)_{23}$  oraz  $(\mathbf{A}_1)_{24}$  w macierzy  $\mathbf{A}_1$  o strukturze określonej wzorem (A.30),
- $(\mathbf{B}_1)_{22}$  oraz  $(\mathbf{B}_1)_{23}$  w macierzy  $\mathbf{B}_1$  wyrażonej wzorem (A.95),
- $(\mathbf{C}_1)_{22}$  w diagonalnej macierzy  $\mathbf{C}_1$  o strukturze zgodnej ze wzorem (A.97).

Całe macierze  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  oraz  $\mathbf{C}_1$  można zbudować, korzystając z równania (3.39) zapisanego dla kolejnych punktów  $(i, j)$  siatki MRS należących do dolnej krawędzi płyty. W celu wyznaczenia wskazanych w zadaniu elementów macierzy należy wspomniane równanie zapisać tylko dla pierwszego z punktów dolnej krawędzi, a więc dla  $(i, j) = (2, 1)$ . Punkt  $(i, j) = (1, 1)$  w rozważanym sposobie zamocowania płyty pomija się, ponieważ występuje w nim zerowe przemieszczenie  $w_{11}$ . Uwzględniono to w pierwszym wierszu i kolumnie analizowanych macierzy.

Na rysunku A.1 pokazano zbiór 13 punktów<sup>1</sup>, w których występują przemiesz-

<sup>1</sup> por. rysunek 3.6

czenia wchodzące w skład równania (3.39) zapisanego dla punktu  $(i, j) = (2, 1)$ . Podano również przy tych punktach współczynniki  $(\alpha_l)_{ij}$  ( $l = 1, 2, 3, \dots, 13$ ), niezbędne do zapisania odpowiedniej kombinacji liniowej rozważanych przemieszczeń. Kolorem czerwonym oznaczono na rysunku punkty fikcyjne (poza płytą), zielonym – punkty w obrębie płyty oraz czarnym – punkty na krawędzi lewej (występują w nich zerowe przemieszczenia).



Rysunek A.1. Zbiór 13 punktów użytych w celu zapisania równania (3.39) dla węzła siatki  $(i, j) = (2, 1)$  wraz ze wskazaniem współczynników  $(\alpha_l)_{ij}$  występujących w równaniu

Poniżej przedstawiono kolejne etapy rozwiązywania zadania:

1. zapisanie równania różnicowego (3.39) dla punktu  $(i, j) = (2, 1)$  (skorzystanie pomocniczo z rysunku A.1):

$$\begin{aligned}
 & (\alpha_1)_{21} w_{21} + (\alpha_2)_{21} \overbrace{w_{11}}^0 + (\alpha_3)_{21} \underline{w_{20}} + (\alpha_4)_{21} w_{31} + (\alpha_5)_{21} w_{22} + \\
 & + (\alpha_6)_{21} \underline{w_{10}} + (\alpha_7)_{21} w_{12} + (\alpha_8)_{21} \underline{w_{30}} + (\alpha_9)_{21} w_{32} + (\alpha_{10})_{21} \underline{w_{01}} + \\
 & + (\alpha_{11})_{21} \underline{w_{2,-1}} + (\alpha_{12})_{21} w_{23} + (\alpha_{13})_{21} w_{41} = p_{21},
 \end{aligned} \tag{A.99}$$

2. zapisanie ugięć w punktach fikcyjnych (podkreślone w równaniu (A.99)) jako zależności od przemieszczeń w punktach występujących w obrębie płyty (sko-

rzystanie z odpowiednich wzorów zestawionych w niniejszym dodatku dla płyty utwardzonej na lewej krawędzi):

$$\begin{aligned}
 w_{20} &= -w_{22} + \beta_1 w_{21} + \beta_2 w_{31}, \\
 w_{10} &= 2\beta_2 w_{21}, \\
 w_{30} &= -w_{32} + \beta_1 w_{31} + \beta_2 (w_{21} + w_{41}), \\
 w_{01} &= w_{21}, \\
 w_{2,-1} &= w_{23} + \gamma_1 w_{22} + \varphi'_1 w_{21} + \varphi_2 w_{31} + \gamma_3 w_{32} + \varphi_3 w_{41},
 \end{aligned} \tag{A.100}$$

3. podstawienie równań (A.100) do wzoru (A.99) oraz pogrupowanie niewiadomych przemieszczeń zgodnie z kolejnością elementów w wektorze (3.92):

$$\begin{aligned}
 &\overbrace{[(\alpha_1)_{21} + (\alpha_{10})_{21} + 2\beta_2(\alpha_6)_{21} + \beta_1(\alpha_3)_{21} + \beta_2(\alpha_8)_{21} + \varphi'_1(\alpha_{11})_{21}]}^{(\mathbf{A}_1)_{22}} w_{21} + \\
 &+ \overbrace{[(\alpha_4)_{21} + \beta_2(\alpha_3)_{21} + \beta_1(\alpha_8)_{21} + \varphi_2(\alpha_{11})_{21}]}^{(\mathbf{A}_1)_{23}} w_{31} + \\
 &+ \overbrace{[(\alpha_{13})_{21} + \beta_2(\alpha_8)_{21} + \varphi_3(\alpha_{11})_{21}]}^{(\mathbf{A}_1)_{24}} w_{41} + \\
 &+ \overbrace{[(\alpha_5 - \alpha_3)_{21} + \gamma_1(\alpha_{11})_{21}]}^{(\mathbf{B}_1)_{22}} w_{22} + \overbrace{[(\alpha_9 - \alpha_8)_{21} + \gamma_3(\alpha_{11})_{21}]}^{(\mathbf{B}_1)_{23}} w_{32} + \\
 &+ \overbrace{[(\alpha_{12} + \alpha_{11})_{21}]}^{(\mathbf{C}_1)_{22}} w_{23} = p_{21},
 \end{aligned} \tag{A.101}$$

4. wyznaczenie, na podstawie wzoru (A.101), szukanych elementów macierzy  $\mathbf{A}_1$ ,  $\mathbf{B}_1$  oraz  $\mathbf{C}_1$  zgodnie z niżej zapisaną regułą:

- $(\mathbf{A}_1)_{22}$ ,  $(\mathbf{A}_1)_{23}$  oraz  $(\mathbf{A}_1)_{24}$  – współczynniki przy przemieszczeniach odpowiednio:  $w_{21}$ ,  $w_{31}$  oraz  $w_{41}$ ,
- $(\mathbf{B}_1)_{22}$  oraz  $(\mathbf{B}_1)_{23}$  – współczynniki przy przemieszczeniach odpowiednio  $w_{22}$  oraz  $w_{32}$ ,
- $(\mathbf{C}_1)_{22}$  – współczynniki przy przemieszczeniu  $w_{23}$ .

5. zapisanie końcowej postaci elementów macierzy:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{A}_1)_{22} &= (\alpha_1)_{21} + (\alpha_{10})_{21} + 2\beta_2(\alpha_6)_{21} + \beta_1(\alpha_3)_{21} + \beta_2(\alpha_8)_{21} + \varphi'_1(\alpha_{11})_{21}, \\
 (\mathbf{A}_1)_{23} &= (\alpha_4)_{21} + \beta_2(\alpha_3)_{21} + \beta_1(\alpha_8)_{21} + \varphi_2(\alpha_{11})_{21}, \\
 (\mathbf{A}_1)_{24} &= (\alpha_{13})_{21} + \beta_2(\alpha_8)_{21} + \varphi_3(\alpha_{11})_{21}, \\
 (\mathbf{B}_1)_{22} &= (\alpha_5 - \alpha_3)_{21} + \gamma_1(\alpha_{11})_{21}, \\
 (\mathbf{B}_1)_{23} &= (\alpha_9 - \alpha_8)_{21} + \gamma_3(\alpha_{11})_{21}, \\
 (\mathbf{C}_1)_{22} &= (\alpha_{12} + \alpha_{11})_{21}.
 \end{aligned}$$



# Skorowidz

## agregacja macierzy

bezwładności, 106, 130, 161

sztywności, 71, 130, 161

## agregacja wektora

obciążenia, 72

sił węzłowych, 72

## algorytm

analiza dynamiczna płyty z tłumika-  
mi, 196

analiza probabilistyczna, 236

dodawanie macierzy bezwładności pły-  
ty i cieczy

wg MES i MEB, 131, 134

wg MRS i MEB, 136, 137

generator całkowitych liczb losowych,  
214

## macierz bezwładności

cieczy otaczającej płytę, 121, 128,  
136, 137

cieczy otaczającej układ płyt, 157

płyty wg MRS, 109

układu płyt w cieczy wg MES, 162

układu płyt w cieczy wg MRS, 166

## macierz odwrotna, 123

macierz pomocnicza do metody PSO,  
213

macierz sztywności płyty wg MES, 131

metoda najmniejszych kwadratów, 238

metoda podprzestrzennych iteracji, 198

optymalizacja lokalizacji tłumików wg  
PSO, 217

rozkład Choleskiego macierzy, 103

standardowy problem własny, 103

uogólniony problem własny, 101, 193

## amplituda

ciśnienia hydrodynamicznego, 119

drgań punktu płyty, 108

przemieszczenia punktu płyty, 119

siły w tłumiku, 189

względnego przemieszczenia tłumika,  
189

## analiza

deterministyczna, 235, 242, 295

probabilistyczna, 235, 236, 243, 253,  
264, 302

analiza drgań własnych płyt, *zob.* analiza  
dynamiczna płyt

analiza dynamiczna płyt, 47, 48, 53, 61,  
242, 271, 295, 297, 300, 305, 307,  
309

w cieczy, 49, 54, 138–151, 297, 300,  
305

w ujęciu probabilistycznym, 235, 237,  
242, 243, 254, 306

wg MES, 104, 297, 309

wg MRS, 107, 297, 309

z tłumikami, 49, 54, 58, 59, 64, 181,  
211, 244, 305, 309

analiza dynamiczna układu płyt w cieczy,  
49, 57, 169, 260, 298, 300, 301,  
307, 309

wg MES i MEB, 160

wg MRS i MEB, 165

analiza losowa, 50, 56, 242, 243, 246, 247,  
295

płyty z tłumikami, 57, 243, 253, 302,  
307

układu płyt w cieczy, 57, 260, 261,  
307

analiza stateczności płyt, 47, 50, 57, 58,  
61, 64, 271–273, 277, 287, 301,  
305, 307, 309

- analiza stateczności spawanych dźwigarów  
stalowych, 58
- analiza statyczna  
dźwigarów powierzchniowych, 53  
płyt, 47, 48, 58, 61, 65, 67, 295, 305,  
307, 309  
na podłożu sprężystym, 53  
wg MES, 70, 297  
wg MRS, 73, 276, 297
- aproksymacja wielomianowa, 236, 238, 242,  
246, 254
- belka  
Timoshenki, 54  
wielowarstwowa, 55
- bezwymiarowy współczynnik tłumienia, 49,  
50, 61, 63, 192, 196  
jako funkcja celu, 215, 216, 218, 220,  
233  
wartości, 223  
pierwszej postaci drgań, 62, 217, 300,  
305
- brzegowe równanie całkowite, 119
- całkowanie macierzy bezwładności  
metodą Gaussa, 106, 145  
metodą niestandardową, 106, 138
- całkowanie macierzy sztywności  
analitycznie, 69  
metodą Gaussa, 69  
metodą niestandardową, 69, 138
- całkowanie numeryczne, 63, 110, 139, 140,  
142, 160
- charakterystyki probabilistyczne, 235–237,  
239–241, 248, 255, 262, 266, 306,  
307  
estymatory, 236, 241  
wpływ długości boku płyty, 249
- ciągły rozkład masy płyty, 106
- cząstka, 212
- częstość drgań własnych, 61, 62, 100, 235,  
239, 241, 242  
cieczy, 119  
jako funkcja zmiennej losowej, 237
- częstość drgań własnych płyty, 49, 54, 62,  
104, 108, 217, 230, 234, 236, 237,  
240, 297, 300  
w cieczy, 117, 132, 134, 138–151, 295,  
298, 300, 303  
w próżni, 111–116  
z tłumikami, 49, 192, 196, 205, 206,  
230, 234, 237, 243, 248, 249, 251–256,  
258, 259, 296, 299, 303, 305
- częstość drgań własnych układu płyt, 240  
w cieczy, 169–179, 237, 260, 261, 263,  
265–267, 299, 301
- drgania własne płyt, 100  
tłumione, 181
- dyskretyzacja płyty wg MEB, 154, 161,  
166, 169, 173, 177, 179, 261, 264  
przy całkowitym zanurzeniu w płynie,  
118, 129, 135  
przy częściowym zanurzeniu w płynie,  
123, 132, 136, 144
- dyskretyzacja płyty wg MES, 69, 88, 92,  
116, 129, 132, 142, 148, 161, 169,  
173, 182, 205, 206, 213, 217, 221,  
222, 228, 245, 253, 261, 264
- dyskretyzacja płyty wg MRS, 73, 92, 114,  
135, 136, 147–149, 166, 169, 173,  
177, 179, 261, 264, 273, 278, 280,  
282, 284–287, 319, 353
- dźwigar powierzchniowy, 47, 53
- element brzegowy typu „constans”, 118
- element Kelvina, 183, 197  
ułamkowy, 184

- element lepki, 184, 244, 254
- element Maxwella, 183, 202, 244, 253, 254
  - ułamkowy, 184, 206, 238
- element sprężysty, 183, 184, 197, 202, 206, 238, 244, 253, 254
- element skończony plQ4, 68, 307
  - aproksymacja funkcji ugięcia, 68
  - funkcje kształtu, 69
  - macierz pochodnych funkcji kształtu, 69
  - macierz sztywności, 69
  - pole przemieszczeń, 68
  - stopnie swobody, 68
  - węzły, 68
  - wektor przemieszczenia, 68
- element skończony trójkątny, 309
- entropia względna, 57, 241, 309
- funkcja
  - grubości płyty, 67
  - kształtu elementu skończonego, 69
  - odpowiedzi, 57, 246, 261, 265
  - przesunięcia, 190, 202
- funkcja celu, 62, 214, 216, 218, 222, 223, 234, 309
  - wartości, 224, 225, 230
- funkcja obciążenia płyty, 66
  - w analizie stateczności, 273, 274, 276
- funkcja sztywności płyty, 67, 273, 296
  - pochodne cząstkowe, 76
- funkcja ugięcia płyty, 66, 73, 273, 276
  - aproksymacja, 68
- gęstość
  - materiału płyty, 244
  - prawdopodobieństwa, 237, 240
  - wody, 260
- gęstość cieczy, 119, 153, 154
  - jako zmienna losowa, 261, 263, 269
  - jako zmienna projektowa, 268
- granica woda–powietrze, 124, 138
- granulacja masy płyty, 104
- hipoteza
  - badawcza, 48, 61, 303
  - Kirchhoffa-Love’a, 61, 65
- iloraz różnicowy, 74, 273
- interakcja płyty i płynu
  - wg MES i MEB, 128
  - wg MRS i MEB, 134
- jakobian przekształcenia obszaru, 69
- kąt obrotu w płycie, 79, 277, 322, 332–334
- krzywa dopasowania, 246
- kurtoza, 235, 237, 240, 248, 249, 252, 255–258, 262, 307
- liczba stopni swobody płyty, 70, 100, 131, 192
- macierz
  - blokowa, 84
  - dodatnio określona, 102, 103
  - hermitowska, 199
  - konsekwentna, 106
  - konsystentna, 106, 130, 145, 161
  - nieosobliwa, 71
  - osobliwa, 71
  - tłumienia konstrukcyjnego płyty, 100, 217
  - wartości własnych, 101, 198
  - wektorów własnych, 101, 198
- macierz bezwładności
  - agregacja, 106, 161
  - warunki brzegowe, 104, 107, 132, 135, 168
- macierz bezwładności cieczy, 49, 54, 307

- otaczającej płytę, 117, 119, 123, 128, 135, 138
- otaczającej układ płyt, 49, 153, 155, 160, 166
- struktura blokowa dla układu płyt, 161
- wymiar, 136, 161
- macierz bezwładności płyty, 63, 100, 117, 128, 134, 153, 160, 161, 166, 217, 307
- konsekwentna, 106
- konsystentna, 106, 111, 130, 138, 145, 161
- sposoby wyznaczania, 104
- wg granulacji masy, 104, 109, 166
- wg rozkładu ciągłego, 106, 130
- wymiar, 136
- macierz bezwładności układu płyt, 153, 160, 161, 166
- struktura blokowa, 161
- wymiar, 161
- macierz bezwładności układu płyt w cieczy, 153, 160, 166
- sumowanie, 161
- macierz bezwładności układu płyta–ciecz, 117, 128, 132, 134
- macierz lokalizacji
  - pojedynczego tłumika, 191
  - układu tłumików, 192
- macierz operatorów różnicowych, 276, 307
  - płyty, 84, 109, 165, 274
  - układu płyt, 165
  - warunki brzegowe, 87, 107, 135, 166, 276, 319, 322, 327, 344, 353
- macierz pochodnych funkcji kształtu
  - drugiego rzędu, 69
  - pierwszego rzędu, 106
- macierz podobszarów cieczy, 120
  - dla układu płyt, 155
- macierz powiązań, 157
  - dla podobszarów cieczy, 122, 127
  - dla elementów skończonych, 131
- macierz sztywności elementu skończonego
  - plQ4, 69, 130
  - wzory analityczne, 69, 145
- macierz sztywności płyty, 63, 71, 99, 130, 138, 160, 161, 217
  - agregacja, 71, 161
  - na zginanie i skręcanie, 66, 69, 142
  - warunki brzegowe, 71, 104, 132, 161
- macierz sztywności układu płyt, 160
- macierze-bloki, 84, 275, 276, 288, 319, 323, 334, 344, 353
- masa płyty
  - granulacja, 104
  - rozkład ciągły, 106
- materiał
  - anizotropowy, 47, 66
  - izotropowy, 65, 88, 91, 111, 138, 144, 169, 202, 206, 277, 296
  - ortotropowy, 66, 115, 142, 296
  - włóknokompozytowy, 66
- mechanika stochastyczna, 56
- metaheurystyczny algorytm optymalizacyjny, 56, 211
- metoda
  - Monte-Carlo, 57, 236, 241, 255, 262, 306
  - najmniejszych kwadratów, 236, 238, 242, 246, 254
  - Newtona, 194
  - pasm skończonych, 53
  - perturbacji stochastycznej, 57, 236, 241, 255, 262, 306
  - półanalityczna, 57, 236, 241, 248, 255, 262, 306

- równań równoważnych, 54, 58
- metoda elementów brzegowych, 49, 53, 57,
  - 117, 138, 140, 153, 304
  - w dynamice układu płyt w cieczy, 154
- metoda elementów skończonych, 48, 53,
  - 236, 237, 304, 306
  - stochastyczna, 50, 56, 236
  - w dynamice belek, 54
  - w dynamice płyt w cieczy, 138, 140,
    - 142, 145
  - w dynamice płyt w próżni, 99, 100
  - w dynamice płyt z tłumikami, 50, 182,
    - 244
  - w statyce płyt, 67, 68, 89, 94, 297
- metoda kontynuacji, 49, 55, 64, 182, 193,
  - 200, 201, 206–209, 234, 236, 305,
    - 306
  - krok ogólny, 196
  - krok pierwszy, 194
  - krok zerowy, 193
  - warunki zakończenia, 196
- metoda optymalizacji rojem cząstek, 50,
  - 56, 63, 211, 221, 300, 306, 308,
    - 309
  - algorytm, 217
  - cząstka, 212, 218, 219, 223, 228
  - efektywność, 216, 306
  - krok ogólny, 215, 219
  - krok zerowy, 213, 218, 223, 224
  - kryteria zakończenia, 217
  - modyfikacje, 56
  - otoczenie, 212, 218, 219, 222
  - parametry sterujące, 56
  - przyrost czasowy, 222
  - rój, 212, 218, 219, 224
  - sąsiedztwo, *zob.* otoczenie
  - waga inercji, 215, 216, 218, 222
  - wariant klasyczny, 56
  - współczynniki uczenia, 215, 216, 218,
    - 222
  - zbiór potencjalnych rozwiązań, 212,
    - 213
- metoda podprzestrzennych iteracji, 49, 55,
  - 182, 197, 201, 206–209, 236, 305
- krok ogólny, 198
- krok zerowy, 198
- warunki zakończenia, 200
- zredukowany problem własny, 199
- metoda różnic skończonych, 48, 53, 54,
  - 237, 304
  - w dynamice płyt w cieczy, 138, 140,
    - 141, 145
  - w dynamice płyt w próżni, 99, 107
  - w stateczności płyt, 271, 273, 277
  - w statyce płyt, 67, 73, 89, 94, 95, 297
- miara
  - asymetrii, 240
  - bezpieczeństwa, 242, 259
    - wg Bhattacharyya, 309
    - wg entropii względnej, 241, 260, 268
  - koncentracji i spłaszczenia, 240
  - niezawodności, 243
    - pierwszego rzędu, 57, 241, 259, 268
  - rozproszenia, 240
- model
  - Bhattacharyya, 57
  - tłumienia proporcjonalnego, 217
- model płyty
  - deterministyczny, 235
  - probabilistyczny, 235
- moduł
  - stratności, 189
  - szywności dynamicznej, 189
  - tłumienia, 189
  - zachowawczy, 189
  - zespólny, 189

- moduł Younga, 243  
 jako zmienna losowa, 235, 237, 254–256, 258, 259  
 płyty izotropowej, 66  
 podłużny, 142  
 poprzeczny, 142  
 włókien/osnowy, 66
- moment  
 centralny, 240, 241  
 losowy, 57, 243, 307  
 zginający w płycie, 78, 277, 322  
 na krawędziach, 319, 320, 323
- niepewność wejściowa, 237, 243, 247–250, 253, 256, 263
- niezawodność układu, 242, 269
- normowanie wektora własnego, 101, 193
- numeracja  
 elementów skończonych, 70, 88  
 mas skupionych w węzłach siatki MRS, 109  
 podobszarów cieczy  
 przy całkowitym zanurzeniu płyty, 118  
 przy częściowym zanurzeniu płyty, 123
- numeracja węzłów  
 elementu skończonego plQ4, 68  
 podobszarów cieczy, 122  
 siatki MES, 69, 88, 213  
 siatki MES z podobszarami cieczy, 129  
 siatki MRS, 73  
 siatki MRS z podobszarami cieczy, 135, 166  
 wewnętrznych siatki MES, 222
- obciążenie krytyczne, 50, 61, 62, 271, 273, 276, 277, 280, 282, 284, 286, 287, 290, 292, 293, 301
- wyrażone bezwymiarowo, 277, 278, 281, 285, 288
- obciążenie płyty  
 ściskające, 271, 272, 282  
 początkowe, 273  
 porównawcze, 273  
 równomierne, 91  
 sprowadzone do węzłów siatki, 91  
 referencyjne, 273  
 rozciągające, 271, 282  
 styczne do krawędzi, 271, 272, 285, 301  
 w płaszczyźnie środkowej, 271, 272, 277  
 zmienne liniowo, 287
- odchylenie standardowe, 237, 242, 247
- operator liniowy, 187
- optymalizacja rojem cząstek, *zob.* metoda optymalizacji rojem cząstek
- ortogonalność wektorów własnych, 101
- ośrodek zewnętrzny, 47, 48
- otoczenie, 212, 222
- parametr  
 homotopii, 193  
 perturbacji, 255
- parametr projektowy, 62, 63, 235–243, 246, 247, 253, 254, 259, 260, 264, 302, 304, 308  
 geometryczny, 249  
 wartość średnia, 244
- pasywna redukcja drgań, 47, 48, 54, 181, 183
- płaszczyzna środkowa, *zob.* powierzchnia środkowa płyty
- płyn  
 ściśliwy, 118, 309  
 nieściśliwy, 117, 121

- płyn nielepki, 117, 118
- plyta
- fundamentowa, 308, 309
  - kompozytowa, 56
  - względna głębokość zanurzenia w płynie, 144, 148
- plyta cienka, 47, 48, 53, 57, 58, 61, 65, 271, 277, 295
- grubość, 61, 65
  - ugięcie, 65
- plyta ściskana (rozciągana)
- dwukierunkowo, 272
  - jednokierunkowo, 272, 301
- plyta-belka, 87
- pochodna
- cząstkowa, 273
  - funckji złożonej, 76
  - niecałkowitego rzędu, *zob.* ułamkowa
  - ułamkowa, 55, 186, 254
- podobszar cieczy, 118, 138, 143, 144, 148, 166, 261
- fikcyjny, 125
- postać drgań własnych płyty, 54
- w cieczy, 132, 134, 138, 140, 141
  - w próżni, 49, 101, 104, 111, 113, 114, 228
  - z tłumikami, 192
- postać utraty stateczności płyty, 50, 271, 277, 278, 281, 282, 285, 289
- potencjał
- pola prędkości płynu, 118
  - warstwy podwójnej, 119
- powierzchnia
- środkowa płyty, 48, 65–68, 271–273
  - swobodna cieczy, 124, 127, 144, 146, 147, 149
- prędkość dźwięku w cieczy, 119
- problem badawczy, 48, 61–63, 303
- problem własny
- hermitowski, 199
  - liniowy, 197
  - nieliniowy, 47, 58, 64, 197, 201, 206, 305, 308
  - dla płyty z tłumikami, 49, 55, 182, 192, 236
  - z parametrem homotopii, 193
  - standardowy, 101–103
  - zredukowany, 199, 206, 208, 209
- przykłady numeryczne – dynamika
- plyta o zmiennej grubości w próżni, 114
  - plyta o zmiennej grubości zanurzona całkowicie w wodzie, 140
  - plyta o zmiennej grubości zanurzona częściowo w wodzie, 149
  - plyta ortotropowa w próżni, 115
  - plyta ortotropowa zanurzona całkowicie w wodzie, 142
  - plyta swobodnie podparta w próżni, 111
  - plyta swobodnie podparta zanurzona całkowicie w wodzie, 138
  - plyta utwierdzona w próżni, 112
  - plyta utwierdzona zanurzona całkowicie w wodzie, 139, 148
  - plyta utwierdzona zanurzona częściowo w wodzie, 144
  - układ płyt swobodnie podpartych o stałej grubości, 169
  - układ płyt swobodnie podpartych o zmiennej grubości, 176
  - układ płyt wspornikowych o stałej grubości, 173
  - układ płyt wspornikowych o zmiennej grubości, 178
- przykłady numeryczne – optymalizacja

- płyta z czterema tłumikami, 227  
 płyta z jednym tłumikiem, 222  
 przykłady numeryczne – tłumiki, 201  
 model ułamkowy tłumika, 206  
 wpływ temperatury, 202  
 przykłady numeryczne – probabilistyka  
 płyta z tłumikami drgań wg modelu klasycznego, 243  
 płyta z tłumikami drgań wg modelu ułamkowego, 253  
 układ płyt zanurzonych w płynie, 260  
 przykłady numeryczne – stateczność  
 płyta obciążona stycznie do krawędzi, 285  
 płyta obciążona w sposób liniowo zmienny, 287  
 płyta ściskana jednokierunkowo, 277  
 płyta ściskana lub rozciągana dwukierunkowo, 281  
 przykłady numeryczne – statyka  
 płyta obciążona równomiernie, 91, 95  
 płyta-belka wspornikowa, 87  
 punkty  
 całkowania, 69, 111–113, 116, 138–140, 143  
 fikcyjne, 87, 277, 319, 320, 323, 324, 332, 334, 335, 337–339, 344, 354  
 rama ścinana, 54–56  
 reakcja naroża płyty, 79  
 rezonans, 101, 241  
 rozkład Choleskiego macierzy, 102, 103  
 rozkład prawdopodobieństwa  
 asymetria lewostronna, 252, 256, 267  
 asymetria prawostronna, 251, 253, 258, 259, 264, 267  
 Gaussa, *zob.* normalny  
 leptokurtyczny, 252, 253, 257, 259, 264, 267  
 mezokurtyczny, 252  
 normalny, 237, 240, 247, 252, 253, 257  
 platykurtyczny, 252, 257  
 symetryczny, 252  
 rozproszenie względem wartości średniej, 251  
 rój cząstek, 212  
 równanie  
 drgań swobodnych nietłumionych, 100  
 Helmholtza, 118  
 pracy wirtualnej, 88  
 przyrostowe Newtona, 194  
 równanie równowagi płyty  
 wg MES  
 w dynamice, 100  
 w dynamice z tłumikami, 191  
 w statyce, 70, 99  
 wg MRS  
 w dynamice, 108  
 w stateczności, 274  
 w statyce, 83  
 równanie różnicowe ugięcia płyty, 75, 319, 353, 354  
 w analizie stateczności, 271  
 równanie różniczkowe ugięcia  
 płyty anizotropowej, 66  
 płyty izotropowej, 67  
 w analizie stateczności, 271, 272, 276  
 różnice centralne w punkcie, 74, 273  
 sąsiedztwo, *zob.* otoczenie  
 siła poprzeczna w płycie, 79  
 siła w tłumiku lepkosprężystym, 182, 185, 189  
 całkowita po przekształceniu Laplace'a

- w modelu ułamkowym, 187
  - w uogólnionym modelu Maxwella, 187
  - w uogólnionym modelu reologicznym, 187
- w elemencie Kelvina, 185
  - po przekształceniu Laplace'a, 187
- w elemencie Maxwella, 186
  - po przekształceniu Laplace'a, 187
- w elemencie sprężystym, 185
  - po przekształceniu Laplace'a, 186
- siły
  - bezwładności, 107
  - intensywność obciążenia, 107
  - hydrodynamiczne, 119
- skośność, 235, 237, 240, 248, 249, 251, 255, 258, 263, 267
- sposoby skupiania masy płyty, 104
- sprężenie hermitowskie macierzy, 199
- stochastyczna metoda elementów skończonych, *zob.* metoda elementów skończonych
- stochastyczny algorytm obliczeniowy, 211
- szereg potęgowy, 120
  - Taylora, 236, 241, 255
- temperatura referencyjna, 63, 182, 188, 190, 202, 205, 221, 238, 244, 296, 299, 303
- tłumik lepkosprężysty, 47, 49, 50, 54, 58, 236–238, 242, 243, 296, 299, 305
  - budowa, 181
- modele, 182, 183, 218
  - ułamkowy, 49, 55, 184, 206, 253, 258, 260
  - uogólniony Maxwella, 49, 55, 183, 202, 221
  - uogólniony reologiczny, 183, 188
  - Zenera, 183
- optymalna lokalizacja, 47, 50, 55, 62–64, 211, 222, 230, 253, 299, 304, 306, 308, 309
  - funkcja celu, 215
- wpływ temperatury, 54, 61–63
- transformacja falkowa, 56
- transformata Laplace'a, 182, 186
  - równania ruchu płyty z tłumikami, 49, 191
  - wektora oddziaływania tłumika na płytę, 191
- układ płyt, 49, 50, 153, 239, 242, 260
  - oznaczenia wymiarów, 154
  - przykłady numeryczne, 168
  - w dwóch płaszczyznach, 153, 154, 158, 264
  - w jednej płaszczyźnie, 153, 154, 156, 260
- warunki podparcia
  - wg MES, 164
  - wg MRS, 166, 168
- uogólniony problem własny, 49, 50, 198
  - srowadzenie do standardowego problemu własnego, 102
- w dynamice płyty
  - wg MES, 100
  - wg MRS, 108
- w dynamice układu płyt w cieczy
  - wg MES i MEB, 160
  - wg MRS i MEB, 165
- w dynamice układu płyta–ciecz
  - wg MES i MEB, 128, 134
  - wg MRS i MEB, 134
- w stateczności płyty, 271, 277, 288
  - wg MRS, 276
- waga całkowania, 69

- waga inercji, 215, 216
- dobór, 216, 233
  - wartość, 222
- wariancja, 235, 239–241
- warstwa lepkosprężysta, 309
- wartość oczekiwana, 235, 237, 239–242, 247–249, 253, 255, 257, 259, 263, 266
- wartość średnia, 237, 247, 255, 260
- odległości między płytami, 260, 264
  - parametru projektowego, 239, 244
- wartość własna, 101, 103, 109, 197, 198, 200, 201, 277
- zespolona, 192, 196
- warunki
- początkowe w dynamice płyty, 100
  - podparcia płyty, 78, 132, 135, 217, 276, 296
- warunki brzegowe
- typu Neumanna, 119
  - wg MES, 71
  - wg MRS
    - brzeg swobodnie podparty, 79
    - brzeg swobodny, 81
    - brzeg utwierdzony, 80
    - naroże punktowo podparte, 82
    - naroże swobodne, 82
    - płyta podparta na dwóch krawędziach, 323
    - płyta podparta na obwodzie, 319
    - płyta wspornikowa, 333
- wektor
- amplitud, 100
  - ciśnienia hydrodynamicznego płynu, 124
  - oddziaływania tłumika na płytę, 191
  - położenia cząstki roju wg PSO, 212, 215, 219, 223, 228
- wektor
- przyspieszenia węzłów płyty, 100
  - residualny, 200
  - współrzędnych Ritza, 199
  - zmiennych projektowych, 239
- wektor obciążenia płyty
- warunki brzegowe, 72, 87
  - wg MES, 72, 99, 100
  - wg MRS, 86, 107
  - z tłumikami, 191
- wektor prędkości
- cząstki roju wg PSO, 212, 214, 215, 218, 219, 223, 228
  - płynu, 124
  - węzłów płyty, 100
- wektor przemieszczeń
- wg MES, 70, 99, 100
  - wg MRS, 86, 276
- wektor sił
- skupionych, 72
  - węzłowych elementu plQ4, 72
- wektor własny, 101, 103, 104, 109, 192, 197, 198, 200, 201, 277
- normalizacja, 101
  - ortogonalność, 101
- węzły
- elementu skończonego plQ4, 68
  - siatki MES, 69
    - wewnętrzne, 213, 217
  - siatki MRS, 73
- wnioski
- aplikacyjne, 295, 307
  - metodyczne, 295, 304
  - poznawcze, 295,
  - prognostyczne, 295, 309
- współczynnik
- ekscesu, 257
  - sztywności, 186, 188

- 
- współczynnik
- ściśliwości cieczy, 118
  - tłumienia, 186, 188
  - wariancji, 237, 248
- współczynnik kognitywny, socjalny, 215
- dobór, 216, 233
  - wartości, 222
- współczynnik Poissona, 243
- jako zmienna losowa, 237, 255, 257–259
  - plyty izotropowej, 66
  - włókien/osnowy, 67
- współczynnik zmienności, 237, 240, 248–251, 253, 255–259, 263, 266
- długości boku plyty, 248, 249
  - gęstości cieczy, 262, 268, 269
  - grubości plyty, 248, 249
  - modułu Younga, 256
  - odległości między plytami, 266
  - pierwszej częstotliwości drgań, 250
- względne przemieszczenie tłumika, 186, 189
- wzór Williama-Landela-Ferry’ego, 190
- zagadnienie dynamiczne, 99, 100, 271
- zanurzenie plyty w płynie
- całkowite, 118
  - częściowe, 123
  - pionowo, 125
  - poziomo, 126
- zasada proporcjonalności częstotliwościowo-temperaturowej, 49, 55, 182, 188, 190, 202
- zdarzenie losowe, 47, 235
- zmienna
- losowa, 235, 237, 239, 240, 242, 244, 247, 254, 256, 306
  - projektowa, 243, 245, 248, 256
- zmienność cechy
- mała, 250
- przeciętna, 250
- silna, 251
- znormalizowany gradient wrażliwości, 62, 63, 239, 240, 242, 247, 303, 304, 308



© 2025 Agnieszka Lenartowicz

Politechnika Poznańska

Wydział Inżynierii Lądowej i Transportu

Instytut Analizy Konstrukcji

Skład wykonano w systemie L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X