Warszawa, 4 grudnia 2023 r.

Grzegorz Dzierżanowski, dr hab. inż.
Politechnika Warszawska, Wydział Inżynierii Lądowej
al. Armii Ludowej 16, 00-637 Warszawa
e-mail: grzegorz.dzierzanowski@pw.edu.pl

Recenzja rozprawy doktorskiej mgr inż. Pauliny Stempin
pt. *Structural models in the framework of space-Fractional Continuum Mechanics.*

## Podstawa opracowania recenzji

Recenzja została opracowana w odpowiedzi na pismo Przewodniczącego Rady Dyscypliny Inżynieria Lądowa, Geodezja i Transport Politechniki Poznańskiej z dnia 8.11.2023 r. (znak pisma: RD/d/31/02/2023).

## Charakterystyka rozprawy

Rozprawa składa się z części opisowej, spisu literatury oraz 5 opublikowanych i powiązanych tematycznie artykułów naukowych. Oświadczenia współautorów publikacji wskazują na centralną rolę Doktorantki w pracy merytorycznej i edycyjnej.

We Wstępie Autorka uzasadniła potrzebę podjęcia badań w zakresie nieklasycznej mechaniki ośrodków ciągłych, z opisem zjawisk za pomocą aparatu różniczkowego niecałkowitego rzędu. W ten sposób określiła cel i zakres pracy badawczej związanej z rozprawą. Rozdziały 1-3 części opisowej wprowadzają w tematykę badań; pełnią rolę objaśniającą i ułatwiającą lekturę części zasadniczej, tj. publikacji oznaczonych jako A.1 – A.5. Rozdział 4. zawiera wnioski z pracy oraz zestaw zagadnień, które Autorka zamierza podjąć w dalszej perspektywie badawczej.

Wykaz literatury liczy 40 pozycji powoływanych w części opisowej. Spisem objęte są monografie i artykuły dotyczące klasycznej (lokalnej) teorii sprężystości i rozmaitych jej wersji nielokalnych, uwzględniających oddziaływania międzycząsteczkowe. Większą część wykazu stanowią współczesne pozycje z zakresu mechaniki niecałkowitego rzędu.

Publikacje A.1 – A.4 dotyczą zadań statyki i dynamiki pręta smukłego (model Eulera-Bernoulliego) i pręta średniej grubości (model Timoshenki) w ujęciu mechaniki niecałkowitego rzędu.

Publikacja A.5 jest poświęcona zagadnieniu zginania płyty cienkiej (model Kirchhoffa-Love'a) i płyty średniej grubości (model Mindlina-Reissnera) w ujęciu mechaniki niecałkowitego rzędu.

## Opinia o celach i zakresie pracy badawczej

Doktorantka określa cel swojej pracy badawczej, opierając się na stwierdzeniu, że równania mechaniki klasycznej nie są odpowiednim narzędziem modelowania matematycznego konstrukcji z materiałów niejednorodnych, w tym materiałów o budowie ziarnistej i porowatej. To spostrzeżenie dotyczy w szczególności materiałów z nano- lub mikroskopową strukturą wewnętrzną, której rozmiary są znacznie mniejsze od makroskopowych rozmiarów zewnętrznych. Wpływ nano- i mikroskopowych niejednorodności konstytutywnych na makroskopowe cechy konstrukcji określa się terminem „efekt skali" albo „wpływ skali".

Badania efektu skali Doktorantka opiera na matematycznej koncepcji pochodnej ułamkowego rzędu. Takie ujęcie jest alternatywne wobec innych modeli nielokalnych, bowiem w opisie schematu oddziaływania międzycząsteczkowego uwzględnia się jedynie dwa parametry – $\ell_f$ oraz $\alpha$ – oznaczające kolejno długość charakterystyczną struktury wewnętrznej oraz niecałkowity rząd operatora różniczkowego.

Stosowanie operatorów rózniczkowych ułamkowego rzędu jest przedmiotem dyskusji w wielu środowiskach naukowych, także niezwiązanych z inżynierią lądową. Opinie na temat poprawności opisu zjawisk fizycznych za pomocą takich operatorów nie są ugruntowane i powszechnie przyjęte. Dlatego należy uznać, że tematyka badawcza podjęta przez Doktorantkę jest aktualna i naukowo istotna.

Doktorantka formułuje tezę pracy:

> *Wykorzystanie pochodnej niecałkowitego rzędu wprowadza nielokalność do strukturalnych modeli mechanicznych, pozwalając na opis efektu skali.*

Można odnieść wrażenie, że osiągnięcie tak postawionego celu jest skazane na sukces, a teza pracy nie wymaga dowodu. Do takiego wniosku skłania w szczególności to, że parametry odpowiedzialne za modelowanie efektu skali, tzn. $\ell_f$ oraz $\alpha$, w jawny sposób definiują pochodną niecałkowitego rzędu. Dlatego, moim zdaniem, cel pracy badawczej należałoby rozszerzyć o zdanie zapisane w Streszczeniu na s. ix:

> *Najistotniejszym aspektem [rozprawy][1] jest, że modele zapewniają dobre przybliżenie wyników eksperymentalnych dla nano/mikro belek i nano/mikro płyt.*

Uzupełnienie tezy o taki punkt pozwala mi stwierdzić, że cel pracy badawczej został określony poprawnie.

## Uwagi ogólne

### U1.

Pojęcie pochodnej niecałkowitego rzędu (pochodnej ułamkowej) jest wieloznaczne. Współczesny rachunek różniczkowy dysponuje zestawem kilkunastu operatorów noszących tę nazwę; jednym z nich jest pochodna ułamkowa w sensie Caputo. Liniowa kombinacja lewej i prawej pochodnej Caputo, nazywana pochodną Riesza-Caputo, jest podstawą formalizmu matematycznego stosowanego w rozprawie do opisu zagadnień z zakresu teorii sprężystości.

[1] przypis GD

Istotną cechą wyróżniającą operator Caputo, a więc także Riesza-Caputo, wśród innych operatorów różniczkowych niecałkowitego rzędu jest możliwość ominięcia kłopotów z fizyczną interpretacją warunków brzegowych i początkowych narzucanych na funkcje próbne w wariacyjnych zadaniach statyki i dynamiki. Chodzi tu w szczególności o przypadki wymagające określenia warunków dotyczących pochodnych tych funkcji. Wykorzystanie pochodnej Caputo zawęża to wymaganie do pochodnych całkowitego rzędu i tym samym uwalnia od dyskusji dotyczącej fizycznego znaczenia pochodnych ułamkowych.

Pochodna Riesza-Caputo ma podstawowe znaczenie w pracy badawczej Doktorantki; jest używana do wyprowadzenia równań rozwiązujących w ramach określonej teorii. Równania te są wywodzone ze sformułowań wariacyjnych. Dlatego warto w tym miejscu przypomnieć równanie Eulera-Lagrange'a określające ekstremalę funkcjonału zależnego od pochodnej funkcji próbnej w sensie Riesza-Caputo, por. (Almeida, 2012).[2]

Niech $[a, b] \in \mathbb{R}$ i niech $y : [a, b] \to \mathbb{R}$ będzie funkcją próbną klasy $C^1$ o ustalonych wartościach $y(a)$ oraz $y(b)$. Ponadto, niech $[A, B] \subset [a, b]$ będzie pewnym podzbiorem. Dodatkowo, niech symbole ${}^{R}_{A}D^{\alpha}_{B}$ oraz ${}^{RC}_{\ a}D^{\alpha}_{b}$ oznaczają odpowiednio operatory różniczkowe rzędu $\alpha \in (0, 1)$ w sensie Riesza i Riesza-Caputo. W dalszej części istotne jest, że pochodna Riesza jest w (Almeida, 2012) definiowana jako kombinacja liniowa pochodnych ułamkowych w sensie Riemannna-Liouville'a, a pochodna Riesza-Caputo jest kombinacją liniową pochodnych ułamkowych w sensie Caputo.

Wprowadzając standardowe oznaczenie, $L$, funkcji Lagrange'a w definicji funkcjonału

$$J(y) = \int_{A}^{B} L(x, y(x), {}^{RC}_{\ a}D^{\alpha}_{b} y(x))\, dx, \tag{1}$$

z warunkami brzegowymi

$$y(a) = y_a \quad \text{oraz} \quad y(b) = y_b, \tag{2}$$

dowodzi się prawdziwości warunku koniecznego ekstremum, por. (Almeida, 2012, Theorem 3): Jeżeli funkcja $y$ jest minimizerem $J$, to równanie Eulera-Lagrange'a przybiera postać

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x) - {}^{R}_{A}D^{\alpha}_{B} \frac{\partial L}{\partial\, {}^{RC}_{\ a}D^{\alpha}_{b}\, y}(x) = 0, \tag{3}$$

dla każdego $x \in [A, B]$. Należy podkreślić, że:

- W równaniu (3) stosuje się dwie pochodne ułamkowe. Pochodna w sensie Riesza-Riemanna-Liouville'a jest obliczana w dziedzinie $[A, B]$ funkcjonału $J$, a pochodna Riesza-Caputo w dziedzinie $[a, b]$ funkcji próbnych $y$.

Wobec dalszych uwag sformułowanych w recenzji, i w nawiązaniu do treści rozdz. 4.2 rozprawy, nasuwa się pytanie:

> Czy istnieją sformułowania wariacyjne z pochodną Riesza-Caputo, które są równoważne związkowi (3)?

[2]Almeida, R. (2012): Fractional variational problems with the Riesz-Caputo derivative, *Applied Mathematics Letters*, **25(2)**, 142-148, dostęp elektroniczny: `doi.org/10.1016/j.aml.2011.08.003`.

**U2.**

Zastosowanie aparatu matematycznego w teorii sprężystości nie podlega silnym ograniczeniom. Dzięki temu miary deformacji i prawa konstytutywne można postulować w ramach dość szerokiego spektrum z zastrzeżeniami sformułowanymi w U3 poniżej.

Na tym tle wyróżnia się równanie ruchu (równanie równowagi). Ten warunek jest jednoznacznie określony za pomocą praw fizyki, więc – moim zdaniem – nie może zależeć od dowolnie dobieranych cech matematycznych, np. definicji pochodnej, jej rzędu, czy parametru skali. W mojej opinii, twierdzenie odwrotne należy uznać za bardzo dyskusyjne. Opracowując recenzję, nie natknąłem się na dowód takiego twierdzenia.

**U3.**

Poprawne miary deformacji są określane w ramach kryterium ruchu sztywnego. Dlatego wykorzystanie operatorów różniczkowych niecałkowitego rzędu w definicji odkształcenia musi być ograniczone spełnieniem tego kryterium. W związku z tym zasadne jest pytanie, czy stosowane w rozprawie definicje miary deformacji zerują się na ruchach sztywnych.

Dodatkowo, miara odkształcenia musi spełniać czysto matematyczny warunek, tzn. musi być polem tensorowym. Zastosowanie pochodnej Caputo, a w konsekwencji także Riesza-Caputo, w opisie deformacji nie prowadzi do określenia takiego pola. Ten fakt nie ma znaczenia w teoriach jednowymiarowych, ale ma znaczenie istotne np. w teorii płyt.

Gradient ułamkowy nie zachowuje się jak tensor przy transformacji ortogonalnej (obrocie) układu współrzędnych, co oznacza że za jego pomocą nie można prawidłowo zdefiniować miary odkształcenia w teorii sprężystości małych odkształceń. Tę kluczową wadę można zilustrować na następującym przykładzie.

Przyjmijmy obszar $[0,a] \times [0,a] \subset \mathbb{R}^2$ z bazą kartezjańską $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$. Niech $p = (x, y)$ będzie punktem należącym do tego obszaru. Dla uproszczenia rozważmy pole skalarne

$$f(p) = x \tag{4}$$

i gradient ułamkowy w rozumieniu Caputo

$$\overset{\alpha}{\nabla}(\cdot) = {}_0^C D_x^\alpha (\cdot)\, \mathbf{e}_1 + {}_0^C D_y^\alpha (\cdot)\, \mathbf{e}_2. \tag{5}$$

Ustalając $\alpha = 1/2$ w definicji pochodnej ułamkowej Caputo, dostajemy

$$\overset{\alpha}{\nabla} f(p) = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}\, \mathbf{e}_1. \tag{6}$$

Następnie obracamy układ współrzędnych o kąt $\varphi$ w ten sposób, że

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi, \quad y = x' \sin\varphi + y' \cos\varphi. \tag{7}$$

Wtedy z (5) otrzymujemy

$$\overset{\alpha}{\nabla} f(p) = \frac{2\sqrt{x'}}{\sqrt{\pi}} \cos\varphi\, \mathbf{e}_1 - \frac{2\sqrt{y'}}{\sqrt{\pi}} \sin\varphi\, \mathbf{e}_2. \tag{8}$$

Podstawiając (5) do (6) obliczamy

$$\|\overset{\alpha}{\nabla} f(p)\| = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{x' \cos\varphi - y' \sin\varphi}}{\sqrt{\pi}} & \text{w układzie nieobróconym,} \\ \dfrac{2\sqrt{x' \cos^2\varphi + y' \sin^2\varphi}}{\sqrt{\pi}} & \text{w układzie obróconym.} \end{cases} \tag{9}$$

To oznacza, że operacja gradientu ułamkowego nie jest niezmiennicza względem obrotu układu współrzędnych, a więc gradient ułamkowy w sensie Caputo nie jest operatorem wektorowym. Zatem za jego pomocą nie można zdefiniować pola tensorowego reprezentującego miarę odkształcenia.

## Uwagi szczegółowe

**U4.**
Równania rozwiązujące przytoczone w rozdziałach 2.3 i 2.4 opisowej częsci rozprawy i wyprowadzone w publikacjach A.1 – A.5 nie mają postaci zgodnej z formułą Eulera-Lagrange'a (3).

Na przykład, w równaniu opisującym zagadnienie s-FTB każda pochodna ułamkowa jest obliczana w sensie Riesza-Caputo w przedziale $(x - \ell_f, x + \ell_f)$ – patrz wzór (2.10) na s. 9 opisowej części rozprawy. To oznacza, że wzory (47, 48, publikacja A.2) zostały otrzymane z formuł Eulera-Lagrange'a, które można sprowadzić do postaci

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x) - {}^{RC}_{x-\ell_f}D^{\alpha}_{x+\ell_f} \frac{\partial L}{\partial\, {}^{RC}_{x-\ell_f}D^{\alpha}_{x+\ell_f}\, y}(x) = 0, \tag{10}$$

podczas gdy w świetle (3) powinno być

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x) - {}^{R}_{x-\ell_f}D^{\alpha}_{x+\ell_f} \frac{\partial L}{\partial\, {}^{RC}_{0}D^{\alpha}_{L}\, y}(x) = 0. \tag{11}$$

Wątpliwość budzi drugi składnik wzoru (10). Pochodna funkcji, względem której różniczkowana jest funkcja Lagrange'a powinna być, według (3), obliczana w przedziale $(0, L)$. Dodatkowo, w określeniu tego składnika Doktorantka nie używa w ogóle pochodnej Riesza-Riemanna-Liouville'a. Szczegółowe wyprowadzenie poprawnych, tzn. zgodnych z wzorem (3), wersji równań (47, 48, publikacja A.2) wykracza poza ramy recenzji.

Podobna uwaga dotyczy także pozostałych równań rozwiązujących w rozdziałach 2.3 i 2.4 rozprawy i pozostałych publikacji będących podstawą postępowania awansowego.

**U5.**
Doktorantka stosuje w rozprawie i w pracach A.1 – A.5 określenie $n = \lfloor\alpha\rfloor + 1$, zakładając jednocześnie $\alpha \in (0, 1]$. W wyniku obu założeń powstaje błąd polegający na tym, że operator Riesza-Caputo zdefiniowany za pomocą wzoru (2.1) na s. 7 rozprawy nie zwraca pochodnej rzędu 1.

Przyjmując $\alpha = 1$, mamy $n = 2$, więc

$$\begin{aligned} {}_{x-\ell_f}^{RC}D^{1}_{x+\ell_f}\, f(x) &= \frac{1}{2}\left(\int_{x-\ell_f}^{x} f''(\tau)\, d\tau + \int_{x}^{x+\ell_f} f''(\tau)\, d\tau\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f'(x) - f'(x-\ell_f) + f'(x+\ell_f) - f'(x)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(f'(x+\ell_f) - f'(x-\ell_f)\right) \\ &\neq f'(x). \end{aligned} \tag{12}$$

**U6.**

Doktorantka definiuje we wzorze (2.1) pochodną w sensie Riesza-Caputo inaczej niż przyjęto w literaturze, wprowadzając dodatkowy mnożnik $\frac{\Gamma(2-\alpha)}{\Gamma(2)}$. Jakie matematyczne i fizyczne przesłanki uzasadniają zastosowanie tego mnożnika? Czy tak zdefiniowany operator różniczkowy ma cechę łączności? Czy wzór (2.1) ma zastosowanie w obliczeniach pochodnych ułamkowych i całkowitych rzędów wyższych niż 1? Czy w definicji mnożnika można skreślić mianownik, skoro $\Gamma(2) = 1$?

**U7.**

Parametr skali $\ell_f$ jest określony przez cechy mikrogeometryczne konstrukcji, a więc jest wielkością, której wartość jest ustalana indywidualnie w każdym zadaniu. Nie jest jednak jasne jakie cechy konstrukcji, bądź zadania, decydują o rzędzie pochodnej ułamkowej. Czy w związku z tym wartość $\alpha$ można dobrać dowolnie z zakresu $(0, 1]$, czy może istnieje kryterium wyboru wartości optymalnej?

Wydaje się, że takie kryterium powinno być sformułowane. Przy jego braku nic nie stoi na przeszkodzie, aby zawsze załozyć, że $\alpha = 1$.

**U8.**

W rozprawie wielokrotnie podkreślono znaczenie aparatu różniczkowego niecałkowitego rzędu w uwzględnieniu niejednorodności materiałowych w nano- i mikroskali. Tymczasem w części ogólnej i niektórych pracach przyjęto $E = const$. Czy takie uproszczenie nie jest sprzeczne z podstawową przesłanką stosowania pochodnych ułamkowych?

Podstawienie $E = const.$ można łatwo uzasadnić w przypadku zadań dotyczących np. zarysowania belek żelbetowych, ale nie jest zrozumiałe w kontekście zagadnień omawianych w rozprawie.

## Podsumowanie

Wyniki uzyskane w rozprawie są zależne od wartości parametrów operatora pochodnej ułamkowej. Dodatkowo, istotne obiekty matematyczne zależne od tego operatora nie mają cech niezmienniczych przy transformacjach ortogonalnych układu współrzędnych. Ponadto, formuły opisujące równowagę konstrukcji, z których korzysta Doktorantka mają niejasny sens matematyczny; trudno stwierdzić, czy wynikają wprost z równań Eulera-Lagrange'a.

Nie można jednak wykluczyć, że zjawiska mechaniki ciał odkształcalnych podlegają różnym prawom matematycznym i fizycznym w zależności od skali, w jakiej zachodzą. W tym miejscu nasuwa się porównanie mechaniki klasycznej z mechaniką kwantową. Podobną rolę może pełnić teoria sprężystości korzystająca, w bardzo małych skalach, z aparatu różniczkowego niecałkowitego rzędu, jednak moim zdaniem poprawność takiej teorii nie została dotychczas udokumentowana.

Celem rozprawy doktorskiej mgr inż. Pauliny Stempin było potwierdzenie stosowalności różniczkowych równań rozwiązujących z pochodnymi ułamkowymi w wybranych zadaniach statyki i dynamiki. W mojej opinii Doktorantka osiągnęła ten cel poprawnie opracowując, a następnie stosując, formuły numeryczne. Graficzne porównanie wyników symulacji komputerowych z wynikami badań laboratoryjnych wskazuje na zgodność obliczeń z eksperymentem. Co za tym idzie, można sądzić, że praktyczna wartość zastosowanego modelu matematycznego przewyższa jego niedostatki teoretyczne. Oczywiste jest jednak, że tych niedostatków nie usuwa.

Stwierdzam, że mgr inż. Paulina Stempin potwierdziła znajomość zagadnień określonych tematem rozprawy. Doktorantka śledzi bieżące osiągnięcia w tym zakresie. Wskazane w recenzji błędy i niedociągnięcia, szczególnie te o charakterze teoretycznym, wpływają na moją ocenę rozprawy, lecz mimo to uważam, że mgr inż. Paulina Stempin jest przygotowana do zaawansowanej pracy naukowej.

## Wniosek końcowy

Reasumując, stwierdzam, że rozprawa doktorska mgr inż. Pauliny Stempin pt. *Structural models in the framework of space-Fractional Continuum Mechanics* spełnia wymagania stawiane rozprawom doktorskim w Ustawie z dnia 20 lipca 2018 r. Prawo o Szkolnictwie Wyższym i Nauce oraz w innych przepisach związanych. Tym samym wnioskuję o dopuszczenie rozprawy do publicznej obrony.

PODPIS ZAUFANY
GRZEGORZ MICHAŁ
**DZIERŻANOWSKI**
04.12.2023 12:30:51 [GMT+1]
Dokument podpisany elektronicznie podpisem zaufanym